Nisi ratio quam tenent inter se series

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \text{etc.}$$

et

$$1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \text{etc.}$$

mihi jam pridem constitisset, non potuissem utriusque seriei summam, casibus quibus n est numerus par, assignare, ut feci. Quodsi enim prior series multiplicetur per $\frac{1}{2^n}$, prodit

$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n} + \text{etc.}$$

cujus duplum ab illa ipsa serie subtractum relinquet alteram seriem, unde ratio prodit ut 2^n ad $2^n - 2$.

Quae de summis serierum

$$1 \pm \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} \pm \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} \pm \frac{1}{6^6} + \text{etc.}$$

jam dudum elicui, huc redeunt, ut sit generaliter hujus seriei

$$\frac{1}{n+1} - \frac{m}{(n+2)^2} + \frac{m^2}{(n+3)^3} - \frac{m^3}{(n+4)^4} + \frac{m^4}{(n+5)^5} - \frac{m^5}{(n+6)^6} + \text{etc.}$$

summa $= \int x^{mx} x^n dx$, posito post integrationem $x = 1$. Quodsi jam ponatur $n = 0$, erit

$$\frac{1}{1} - \frac{m}{2^2} + \frac{m^2}{3^3} - \frac{m^3}{4^4} + \text{etc.} = \int x^{mx} dx.$$

hincque fiet cum

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \text{etc.} = \int x^x dx,$$

uti Ipse olim invenisti, tum etiam

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} + \text{etc.} = \int x^{-x} dx = \int \frac{dx}{x^x}.$$

Expressio, quam aequivalere invenisti, Vir Celeb., huic seriei

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{x}$$

est admodum concinna et elegans: dubito autem an sit apta ad quotvis assignatorum terminorum summam proxime exhibendam: quemadmodum ego per methodum meam series summandi universalem quotcunque terminorum summam in fractionibus decimalibus ad plures quam 15 figuras expedite assignare possum. Inveni scilicet esse hujus seriei summam

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{x}$$

$$=\text{Const.}+lx+\frac{1}{2x}-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 2x^2}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6x^4}-\frac{1}{6\cdot 7\cdot 6x^6}+\frac{3}{8\cdot 9\cdot 10x^8}$$

$$-\frac{5}{10\cdot 11\cdot 6x^{10}}+\frac{691}{12\cdot 13\cdot 210x^{12}}-\frac{35}{14\cdot 15\cdot 2x^{14}}+\text{etc.}$$

quae quidem series maxime convergit: constantem autem tantam accipi oportet ut satisfiat uni casui, veluti si est $x=10$, et decem seriei priores termini actu addantur: qui valor semel inventus pro omnibus casibus valebit: deinceps autem notandum est esse lx logarithmum hyperbolicum ipsius x, cum sit $lx=\int\frac{dx}{x}$. Erit autem illa constans[1])

$$=0{,}57721566490153252.$$

et quia est

$$l\,10=2{,}302585092994045684$$

erit verbi gratia summa millies mille terminorum

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots\cdot+\frac{1}{1000000}=14{,}392726722865723\,29.$$

Quae de integratione aequationum differentialium indefiniti gradus mihi rescribis, mirifice mihi placent; methodus quidem, qua uteris, Vir Excell., in aequatione

$$0=y+\frac{ady}{dx}+\frac{bddy}{dx^2}+\frac{cd^3y}{dx^3}+\text{etc.}$$

fere congruit cum mea, altera autem quam praebes pro aequatione

$$0=y+\frac{axdy}{dx}+\frac{bxxddy}{dx^2}+\frac{cx^3d^3y}{dx^3}+\text{etc.}$$

a mea maxime discrepat, mihique compendia nonnulla patefecit, quae ex mea methodo non tam sponte manarent. Ceterum mea methodus hoc

1) Den Wert der sogenannten Eulerschen Konstante C hatte Euler in der Abhandlung *De progressionibus harmonicis observationes* (Comment. acad. sc. Petrop. 7, 1734—1735 [gedruckt 1740], S. 150—161, speziell S. 157) auf 6 Dezimalstellen (von denen die ersten 5 richtig sind) angegeben. Von den im Briefe aufgeführten 17 Dezimalen sind die ersten 15 richtig, und diese 15 Dezimalen sind auch von Euler in seiner Abhandlung *Inventio summae cuiusque seriei ex dato termino generali* (Comment. acad. sc. Petrop. 8, 1736 [gedruckt 1741], S. 9—22, speziell S. 19) angegeben.

praecipue discrepat, quod semper aequationem realem exclusis imaginariis praebeat: id quod nisi ad quantitates vel exponentiales vel a circuli quadratura pendentes confugere velimus, effici omnino nequit.

Quas annotationes de motu oscillatorio corporum aquae innatantium mecum communicare voluisti, summa attentione, prout merentur, perpendi: primo autem videre non possum, cur neges motum centri gravitatis durante motu oscillatorio ab intervallo inter rectas verticales binas, quarum altera per centrum gravitatis totius corporis, altera per centrum gravitatis sectionis aquae transeat, pendere, multo minus cur statuas loco hujus posterioris rectae verticalis substitui oportere eam, quae per centrum gravitatis portionis corporis aquae submersae transeat: hae duae enim rectae in situ aequilibrii, quem ego perpetuo contemplor, ex eoque motum oscillatorium definio, necessario invicem incidere debent, ita ut intervallum absolute foret nullum. Deinde quod scribis durante motu oscillatorio centrum gravitatis moveri posse tam horizontaliter quam verticaliter, nullo modo cum mea theoria conciliare queo; mihi enim certum est, centrum gravitatis in motu oscillatorio ad motum horizontalem impelli omnino non posse: propterea quod virium sollicitantium media directio, a qua motus centri gravitatis pendet, perpetuo est in recta verticali posita. Quod denique attinet ad dubia, quae circa formulam meam

$$M\left(GO + \frac{\int (y^3 + z^3)\, dx}{3V}\right),$$

qua firmitatem definio, profers, quantum memini, jam dudum Tibi, Vir Excell., perscripsi, me ea formula momentum absolutum indicare, quod semper exprimitur facto ex potentia in lineam quandam rectam. Scilicet corpore ex situ aequilibrii per angulum infinite parvum dw declinato, investigavi momentum virium corpus in situm aequilibrii restituentium, hocque momentum inveni esse

$$= M dw \left(GO + \frac{\int (y^3 + z^3)\, dx}{3V}\right);$$

ex quo momentum absolutum ita definivi ut sit

$$= M \left(GO + \frac{\int (y^3 + z^3)\, dx}{3V}\right);$$

ex hoc enim cognito facile intelligere licet, quanta vi corpus ex situ aequilibrii deturbatum sese restituere conetur, in quo ipso ideam firmitatis constituo.

Aequatio differentialis secundi gradus

$$yx^2dx^2 + addy = 0,$$

est nitida et figurae rudi omnino Minerva delineatae, omnia quippe tremente manu peracta: Res ipsa vero, ut spero, Tibi Tuoque judicio ideo non minus placebit. Methodum meam investigandi velocitates aquarum fluentium ita adornavi, ut esset generalissima, inserviens pro vasis et canalibus cujuscunque figurae atque modo quocunque inter se adaptatis. Abstinui in explicatione fundamentali ab idea gurgitis, ne scilicet Angli possent captare ansam confundendi gurgitem meum cum Newtoni catarracta, quasi ego illum ab hac mutuatus fuissem, etiamsi inter se toto coelo differant. Usum vero et actionem gurgitis involvi duobus principiis, *hydrostatico* uno, altero *hydraulico*, ex quorum debita combinatione tota mea theoria absolvitur; id cum ante me nemini in mentem venerit, mirum non est, quod pariter ante me nemo dederit veram et directam methodum determinandi velocitates fluidorum ex vasis et canalibus erumpentium: Tu, Vir Clar., primus fuisti, qui eo, quo polles, ingenii acumine, visis quae communicavi in prima scripti mei parte, statim eruisti solutionem velocitatis quaesitae fluidi ex quolibet vase prosilientis. Quod si nunc talia, hactenus tam densa caligine obsepta, nunc vero demum in lucem feliciter a me protracta, non mereantur, ut aliquando, promissum obtineant honorarium annuum, certe non video quid sit in posterum mihi sperandum . . .[1])

Transeo nunc ad jucundiora: Gratias ago pro communicatione methodi Tuae summandi hanc seriem:

$$\frac{1}{1+n}+\frac{1}{4+n}+\frac{1}{9+n}+\frac{1}{16+n}+\text{etc.}$$

Intelligo quidem modum reducendi illam ad hanc formam:

$$1\cdot\alpha\pi^2-n\beta\pi^4+n^2\gamma\pi^6-n^3\delta\pi^8+n^4\varepsilon\pi^{10}-\text{etc.}$$

sed non satis bene capio legem progressionis coefficientium $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc; quae enim disseris de eorum origine, obscura mihi sunt; aliquando Davus sum, non Oedipus, hoc praesertim tempore, quo praeter alia negotia, quibus distrahor, tam publica quam domestica, nunc ea accedunt, quae quotidie subnascuntur ex munere Decanatus oriunda, quod munus nuper meis ingratiis mihi fuit impositum, per integrum annum gerendum; unde vides attentionem, quae ad talia probe penetranda singulariter requiritur, saepissime interrumpi, id quod Tibi, qui hisce unice vacare potes, non aeque ac mihi contingit; adde incommoda senectutis meae, quae memoriam et attentionis facultatem mirum quantum debilitat.

1) Zwischen „sperandum" und „Transeo" stand offenbar im Briefe etwas, das bei Fuss ausgelassen ist. Da das Konzept des Briefes in Stockholm fehlt, kann ich nicht ermitteln, ob möglicherweise das bei Fuss ausgelassene sich auf eine überstrichene Stelle bezieht, die vermutlich in der von ihm benutzten Abschrift fehlt.

Quod vero attinet ad rationem quam habet series

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\text{etc.}$$

ad eandem, sed alternis signis sumtam:

$$1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}-\text{etc.}$$

vidisti in praecedentibus meis litteris, quod dixi non esse difficile demonstratu, summam prioris esse ad summam alterius ut 2^n ad 2^n-2. Hoc quidem jam olim perscripseram LEIBNITIO, ante initium hujus saeculi[1]), ut ex nostris litteris patet. Existente $n=1$, oritur progressio harmonica

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\text{etc.},$$

quae erit ad $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\text{etc.}$ ut 2 ad 0; unde sequitur, progressionem harmonicam habere summam infinitam, quod alio modo ego olim,[2]) et postea Frater meus sed per ambages demonstrabamus, etsi veritas ejus tam facile ex ipsa ratione 2^n ad 2^n-2 fluat.

Placent quae habes de summis serierum

$$1\pm\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}\pm\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^5}\pm\frac{1}{6^6}+\text{etc.}$$

sed suspicor Te non alia methodo fuisse usum, quam quae ex mea derivata est, cujus specimen jam dedi in Actis Lipsiensibus anni 1697.[3]) Ipsam vero analysin exposui in iisdem Actis 1737, mense Februarii[4]); ubi vidisti, fundamentum totius artificii in hoc consistere, ut ex dato quantitatis x^x logarithmo $x\,\mathrm{l}x$ per reversionem redeatur ad ipsam x^x, ope seriei notissimae, quae ex logarithmo dat numerum, ita ut sit

$$x^x=1+x\,\mathrm{l}x+\frac{x^2\mathrm{l}x^2}{2}+\frac{x^3\mathrm{l}x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^4\mathrm{l}x^4}{2\cdot 3\cdot 4}+\text{etc.}$$

Poteram utique, si vel tantillum attendissem, generalius ponere x^{mx}, vel etiam $x^{mx}\cdot x^n$, et tum utique, sequendo methodum meam, eadem facilitate

1) Der fragliche Brief von JOHANN BERNOULLI an LEIBNIZ ist vom 1. Dezember 1696; vgl. *Leibnitii et Bernoullii Commercium* (Lausannae 1745) I, S. 218.

2) Siehe den in der vorigen Fußnote zitierten Brief von JOHANN BERNOULLI an LEIBNIZ; vgl. noch JOHANN BERNOULLI, *Opera omnia,* t. IV S. 8.

3) Vgl. S. 54, Anm. 1.

4) JOHANN BERNOULLI, *Demonstratio methodi analyticae, qua usus est pro determinanda aliqua quadratura exponentiali per seriem traditam olim in Actis Eruditorum a. 1697;* Acta Eruditorum 1737, S. 82—88 [= *Opera omnia,* t. III S. 376—383].

invenissem, quod Tu nunc mihi proponis, nempe $\int x^{mx} x^n dx$, seu quod idem est:

$$\int x^{mx+n} dx = \frac{1}{n+1} - \frac{m}{(n+2)^2} + \frac{mm}{(n+3)^3} - \frac{m^3}{(n+4)^4} + \frac{m^4}{(n+5)^5} - \frac{m^5}{(n+6)^6} + \text{etc.},$$

posito nempe post integrationem $x = 1$. Hinc nunc sponte fluit, quod tum temporis animadvertere negligebam, posito scilicet $m = -1$ et $n = 0$, prodíturum esse

$$\int x^{-x} dx \text{ seu } \int \frac{dx}{x^x} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} + \text{etc.}$$

Vellem autem scire, an fortasse per aliam viam huc perveneris, quam per meam ipsam; nam si Tua non esset diversa a mea, certe nihil fecisses quam mihi reddere meum cum foenore. En nunc par pari refero, et foenus foenore: Sit integrandum $\int x^{mx^p} dx$ per seriem, ubi p est exponens constans ipsius x in exponente mx^p, dico fore

$$\int x^{mx^p} dx = x - \frac{m}{(p+1)^2} x^{p+1} + \frac{mm}{(2p+1)^3} x^{2p+1} - \frac{m^3}{(3p+1)^4} x^{3p+1} + \text{etc.}$$

Expressionem, quam aequivalere inveneram huic seriei:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{x},$$

dedi tantum pro theoremate, quod terminorum summam accurate exhibet, non tantum proxime, neque dedi pro compendio, quale Leibnitius a me petebat, sed, ut dixi, pro theoremate. Quod si vero duntaxat postuletur modus approximandi ad summam terminorum ad ingentem numerum continuatorum, mihi videtur id effici posse quodammodo simplicius quam mihi perscripsisti; ecce quo pacto procedo. Addantur actu, ut Tu facis, Vir Excell., aliquot termini primores, quorum numerus sit n, quo major autem est hic numerus, eo propius pervenietur ad desideratum. Sit igitur summa horum terminorum $= C$, dicaturque $x = n + y$, erunt termini reliqui summandi sequentes:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \cdots + \frac{1}{n+y}.$$

Pono $dy = 1$, ut scilicet exprimatur haec series per

$$\frac{dy}{n+1} + \frac{dy}{n+2} + \frac{dy}{n+3} + \frac{dy}{n+4} + \cdots + \frac{dy}{n+y},$$

cujus integrale, seu summa est $l(n+y) - ln$, qui duo logarithmi sumendi sunt in logarithmica, quae habet subtangentem = unitati; ut autem accommodentur ad logarithmicam, ad quam tabula logarithmorum Vlacchi supputata est, cujus subtangens est $= 4342945$, erit summa terminorum post terminum $\frac{1}{n}$ sequentium $\frac{1(n+y)-1n}{4342945}$, cui addatur summa terminorum praecedentium actu sumta, quae supponitur $= C$, habebitur summa totius seriei $= \frac{1(n+y)-1n}{4342945} + C$.

Exemplum 1. Quod Tuum est: Proponatur series ad terminum millionesimum prolongata:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1000000},$$

hoc est, sit $n + y = 1000000$, sitque numerus terminorum praecedentium $n = 10$, invenietur eorum summa actu addendo, nempe $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{10} = \frac{7381}{2520} = C$. Item $1(n+y) = l\,1000000 = 6{,}0000000$, atque $1n = l\,10 = 1{,}0000000$, adeoque $1(n+y) - 1n = 5{,}0000000$, unde summa totius seriei, seu $\frac{1(n+y)-1n}{4342945} + C = \frac{50000000}{4342945} + \frac{7381}{2520} = 14\frac{967235489}{2188844280}$, qui numerus tantillo major est quam Tuus $14\frac{39272672286572329}{100000000000000000}$.

Exempl. 2. Esto numerus terminorum decem milliones: erit summa totius seriei $= \frac{60000000}{4342945} + \frac{7381}{2520} = 16 + \frac{967235489}{2188844280} + \frac{262822}{868589} = 16\frac{2}{3}$ proxime.

Exempl. 3. Sit numerus terminorum centum milliones, erit summa totius seriei $= \frac{70000000}{4342945} + \frac{7381}{2520} = 18 + \frac{967235489}{2188844280} + \frac{525644}{868589} = 19$ quam proxime.

Coroll. Crescente numero terminorum per decuplum, crescet summa seriei per $2\frac{262822}{868589}$, hoc est fere per $2\frac{1}{3}$.

Scholion. Quo major sumitur numerus primorum terminorum actualiter summandorum et quo longius continuata supponitur tota series, eo propius ad verum accedet regula colligendi seriem totam in unam summam. Ratio hujus est evidens, quia quo major est numerus n totusque $n + y$, eo magis considerari potest unitas tanquam dy, seu elementum ipsius $n + y$.

Miror Te nunc dicentem, Vir Clarissime, methodum meam, pro tractanda aequatione

$$0 = y + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{b\,ddy}{dx^2} + \frac{c\,d^3y}{dx^3} + \text{etc.}$$

fere congruere cum Tua, cum tamen antea illam tanquam non satis generalem (utpote ad solas logarithmicas sese extendentem) praedicaveris. Estne forsan ejus rei ratio, quod me monente nunc demum intellexisti, Te perperam putasse quod aequationes duae $pp + kp\sqrt{2} + kk = 0$ et $pp - kp\sqrt{2} + kk = 0$, in quas resolvitur aequatio algebraica $p^4 + k^4 = 0$, habeant radices duas ipsius k *reales*, cum tamen sint mere imaginariae, seu impossibiles? Hoc si supposuisti principium erroneum, oportet ut agnoscas, formulas illas, quas in anterioribus Tuis litteris mihi dedisti, non posse subsistere. Hoc unicum ergo sciscitor, an praeter meas logarithmicas habeas adhuc alias curvas possibiles, quae satisfaciant aequationi

$$0 = y + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{b\,ddy}{dx^2} + \frac{c\,d^3y}{dx^3} + \text{etc.},$$

an vero formulae illae Tuae, pro exemplo particulari

$$y + \frac{e\,d^4y}{dx^4} = 0$$

datae, sint erroneae? rogo ut categorice respondeas, sicuti decet inter amicos. Factores quidem sunt reales $pp + kp\sqrt{2} + kk$ et $pp - kp\sqrt{2} + kk$, ex quibus componitur $p^4 + k^4$, sed non sunt aequationes reales, qui neutra habet radicem k possibilem. Quod spectat ad solutionem meam alterius aequationis differentialis gradus indefiniti

$$0 = y + \frac{ax\,dy}{dx} + \frac{bxx\,ddy}{dx^2} + \frac{cx^3\,d^3y}{dx^3} + \text{etc.},$$

gaudeo illam Tibi perplacuisse, atque quaedam compendia suppeditasse. Interim parum refert, quod promiscue praebeat casus reales et imaginarios (debet utique omnes praebere) sed in potestate est secernere reales ab imaginariis, quod sufficit.

Non opus esse censeo ut serram diutius reciprocemus inutiliter disputando de motu oscillatorio corporum aquae innatantium; video enim alterum ab altero non intelligi, quamvis forsan ambo recte sentiamus. Non dixi considerandam esse rectam verticalem eam, quae transeat per centrum gravitatis *portionis corporis* aquae submersae, sed eam volui, quae transeat per centrum gravitatis, non quidem *portionis corporis*, sed *voluminis aquei*, quod portio ista occupat, et ita, ni fallor, locutus sum. Tu vero statuis rectam illam verticalem concipiendam esse tanquam transeuntem per centrum gravitatis *sectionis aquae:* interim quid, si ista duo centra essent in eadem recta verticali ex necessitate rei, foret utique nostra disputatio mera logomachia. Similiter dissentimus, uti videtur, tantum verbis, agentes de firmitate. Tu intelligis momentum ejusdem quam ego sumsi in sensu absoluto, haud aliter quam dicerem, vim firmitatis penduli simplicis ordinarii, oscillationes minimas facientis, esse ipsam fili tensionem, cujus vis aequalis est ipsi ponderi oscillanti et hac quidem vi, vel potius propter hanc vim affectat pendulum redire ad situm quietis, hoc est, ad situm verticalem, quod sufficit ad naturam firmitatis explicandam, etsi non improbam, pro accurata mensura habenda, vim illam multiplicari posse per arculum minimum, quem pondus excurrendo describit, ut ejus momentum prodeat.

Non me fugiebat, posse quidem aequationem secundi gradus

$$yx^2dx^2 + addy = 0$$

reduci ad aequationem simpliciter differentialem; est enim ex earum numero, pro quarum reductione inveni jam diu regulam generalem[7]), sed optabam talem, ut reducta esset integrabilis, vel saltem, concessa quadratura, construibilis; tali enim opus habebam ad certum aliquem scopum obtinendum.

Vale, Vir Excellentissime, meque porro ama.

Dabam Basileae a. d. 31. Aug. 1740.

27.

Euler an Bernoulli 18. Oktober 1740.

Antwort auf Bernoullis Brief vom 31. August 1740. Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. Der Anfang des Briefes wurde schon 1743 im 4. Bande (S. 389) von Johann Bernoullis *Opera omnia* (der auf dem Titelblatte das Druckjahr 1742 hat) abgedruckt. Ein anderer Passus ist von Eneström in der Biblioth. Mathem. 1897, S. 47—48 veröffentlicht.

Inhalt. Über die zweite Abteilung von Johann Bernoullis *Dissertatio hydraulica.* — Über die Ausströmung von Flüssigkeiten aus Gefäßen. — Stand der Herausgabe der Commentarii der Petersburger Akademie. — Über gewisse Zahlen, die bei der Summation der Reihe

$$\frac{1}{1 \pm n} + \frac{1}{4 \pm n} + \frac{1}{9 \pm n} + \frac{1}{16 \pm n} + \cdots$$

vorkommen. — Über die Reihe

$$\frac{1}{1} \pm \frac{1}{2^2} \pm \frac{1}{3^3} \pm \frac{1}{4^4} \pm \cdots$$

und über die angenäherte Summation einer endlichen Anzahl von Gliedern der harmonischen Reihe. — Integration der unvollständigen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und besonders der Gleichung

$$y + c\,\frac{d^4y}{dx^4} = 0.$$

Viro Celeberrimo atque Excellentissimo Johanni Bernoulli S. P. D. Leonhard Euler.

Jam ante quidem maximi feci theoriam Tuam aquarum fluentium, propter veram et genuinam methodum, quam Tu, Vir Excellentissime,

---

7) Siehe den Aufsatz von Johann Bernoulli: *Reductio aequationis* $y^m ddy = qx^n dx^p dy^{2-p}$ *ad aequationem differentialem primi gradus, ubi supponitur* $ddx = 0$ in seinen *Opera omnia*, t. IV S. 79—80.

primus atque solus aperuisti ad hujus generis problemata solide pertractanda. Nunc vero, perlecta altera Tuarum meditationum parte, penitus obstupui foecundissima principiorum Tuorum applicatione ad perplexissima problemata resolvenda, quo utilissimo pariter ac profundissimo invento nomen Tuum celeberrimum apud posteros perpetuo erit sacrum. Obscurissimam autem atque abstrusissimam quaestionem de pressione quam latera vasorum ab aquis transfluentibus patiuntur, tam distincte et enucleate enodasti, ut nihil amplius in hac tam difficili re supersit, quod desiderari queat. Ut enim nemo, praeter Filium Tuum Celeberrimum, hoc argumentum attigit, qui tamen tantum cum totus motus sese jam ad statum permanentem composuerit, pressionem via satis indirecta definivit; ita Tu statim, methodo genuina patefacta, pressionem in omni aquae statu accuratissime determinasti, de quo Te dignissimo invento Tibi, Vir Excellentissime, ex animo gratulor, et pro communicatione maximas gratias ago.[1])

Quod vero attinet ad vim, qua vasa ab erumpente aqua retroaguntur, circa ipsam methodum qua uteris ad eam determinandam, minime quidem dubito; at dum pro tubis vasi horizontaliter infixis pressionem vas retro urgentem invenis diversam ab ea, quae Filii Tui hypothesi sit conformis, vis illa uti a Filio Tuo Clar. assignatur mihi quidem veritati magis consentanea videtur, quam Tua, quod pace Tua dixerim. Ex formula enim, quam pro retroactione in hoc casu affers, sequitur retroactionem posse esse quantumvis magnam, etiamsi foramen sit minimum, motusque lentissimus, hocque incommodo expressio a Filio Tuo data non laborat: mihi vero persuadeo, si hanc partem denuo examini subjicere dignaberis, Tuam theoriam cum Filii Tui sententia perfectissime esse consensuram; suspicor enim fractiones inverti debere, hocque pacto consensus cum veritate et expressione Filii Tui perfectissime restituetur.[2])

Occasio mihi nondum idonea sese obtulit Illustrissimo Praesidi Nostro, qui perpetuo gravissimis negotiis obruitur, justam Tuam petitionem proponendi,[3]) quare de hoc negotio nihil mihi respondere licet. Interim rogo ne existimes scripta Tua, quae hic in summo honore servantur, in oblivionis abyssum detradi; nam prima meditationum hydraulicarum pars jam actu typis mandatur in IX Comment. tomo, ad finem nunc quidem perductis tomis VII et VIII; qui autem tomi ante hos Tibi defuerant, eos mox a Filio Tuo accipies, cui eos per Hollandiam misi; anno autem proximo

1) Anbelangend diese Stelle vgl. den Brief von Daniel Bernoulli an Euler vom 4. September 1743 (Fuss, a. a. O. II, S. 531).

2) Die Richtigkeit dieser Ausstellung erkannte Johann Bernoulli in seiner Antwort an (siehe unten S. 78—79).

3) Vermutlich handelte es sich um eine Pension, die Johann Bernoulli durch Eulers Vermittelung bekommen würde.

certe tres tomos sequentes nancisceris, in quibus omnia Tua scripta praeter ultimam dissertationem conspicies.

Quae in antecedentibus litteris Tibi scripsi de coefficientibus α, β, γ, δ, etc. hujus seriei

$$\alpha\pi^2 - \beta n\pi^4 + \gamma n^2\pi^6 - \delta n^3\pi^8 + \varepsilon n^4\pi^{10} - \text{etc.},$$

ea forte planiora fient, si dicam esse

$$\alpha = \frac{1}{6};\ \beta = \frac{2}{5}\cdot\alpha^2;\ \gamma = \frac{2}{7}\cdot 2\alpha\beta;\ \delta = \frac{2}{9}(2\alpha\gamma + \beta\beta);\ \varepsilon = \frac{2}{11}(2\alpha\delta + 2\beta\gamma);$$
$$\zeta = \frac{2}{13}(2\alpha\varepsilon + 2\beta\delta + \gamma\gamma);\ \text{etc.}$$

ubi fractionum numeralium $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{9}$, etc. lex progressionis est manifesta, reliqui vero factores α^2, $2\alpha\beta$, $2\alpha\gamma + \beta\beta$, $2\alpha\delta + 2\beta\gamma$, etc. sunt illi ipsi coefficientes potestatum ipsius x. Si seriei

$$\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{etc.}$$

quadratum capiatur, prodit enim

$$\alpha^2x^2 + 2\alpha\beta x^3 + (2\alpha\gamma + \beta\beta)x^4 + (2\alpha\delta + 2\beta\gamma)x^5 + \text{etc.},$$

hujusque proprietatis consideratione tota mea summatio absolvitur.

Jam pridem seriem hanc

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \text{etc.}$$

quam ex integratione $\int x^x dx$ casu $x = 1$ jam elapso saeculo eruisti, Vir Celeb., contemplatus ingenti quidem labore verumtamen proprio marte methodum eam inveniendi elicui, cujus summum consensum cum Tua methodo A. 1737 publicata demum perspexi: usus enim utique sum conversione hujus expressionis exponentialis x^y in hanc seriem

$$1 + \frac{y\,lx}{1} + \frac{y^2(lx)^2}{1\cdot 2} + \frac{y^3(lx)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.};$$

deinde hoc lemma in subsidium vocavi, esse $\int x^m dx(lx)^n$, si post integrationem ponatur $x = 1$, integrale

$$= \pm\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n}{(m+1)^{n+1}},$$

ubi signum $+$ valet, si n est numerus par, signum vero $-$, si n est impar. Hinc facile deduxi fore (si post integrationem ponatur $x = 1$)

$$\int x^{ax^m} dx = 1 - \frac{a}{(m+1)^2} + \frac{aa}{(2m+1)^3} - \frac{a^3}{(3m+1)^4} + \text{etc.}$$

Methodus mea assignandi summam quotcunque terminorum hujus seriei harmonicae

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{etc.}$$

magis quidem operosa est quam Tua, Vir Exell., additis enim actu aliquot terminis initialibus, pro valore sequentium omnium exhibeo seriem maxime convergentem, cujus ope illorum summa quantumvis prope assignari potest. Tu vero pro illis terminis sumis tantum primum meae seriei terminum: unde fit ut meae summae in fractionibus decimalibus inventae nequidem in ultima figura a veritate discrepent.

Nunquam ego quantum memini dixi methodum Tuam integrandi hanc aequationem

$$0 = y + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{b\,ddy}{dx^2} + \frac{c\,d^3y}{dx^3} + \text{etc.}$$

non satis esse generalem: sed tantum dixi eam hoc laborare incommodo, ut saepissime integrale quantitatibus imaginariis involutum exhibeat. Quotiescunque autem aequationis differentialis realis invenitur aequatio integralis imaginariis inquinata, toties ea in aliam formam illi quidem aequivalentem sed realem transformari potest, atque in hoc solo mea methodus a Tua differt, ut mea statim illas expressiones reales pro integrali exhibeat. Quo in negotio miror Te, Vir Celeb., integrale aequationis

$$y + \frac{e\,d^4y}{dx^4} = 0$$

a me datum a Tuo re vera discrepans arbitrari, cum ego tantum logarithmicarum imaginariarum, quas Tu invenis, statim earum valores reales per quadraturam circuli expressos exhibeam; eoque magis miror quod Tute primus reductionem quadraturae circuli ad logarithmos imaginarios et vicissim patefeceris.[1]) Categorice itaque, uti postulas, respondeo, me integrale aequationis

$$y + \frac{e\,d^4y}{dx^4} = 0$$

a me datum non solum pro vero agnoscere, verum etiam id a Tuo logarithmis imaginariis constante specie tantum, non autem ipsa re dissentire. Æque nimirum integralia nostra inter se conveniunt, ac istae expressiones $e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$ et $2 \cos A.\ x$, etsi specie maxime a se invicem diversae, existente $le = 1$: utraque enim expressio in seriem mutata eandem dat seriem

1) Siehe die Abhandlung von Johann Bernoulli, *Solution d'un problème concernant le calcul intégral avec quelques abregés par rapport à ce calcul;* Histoire de l'académie des sciences [de Paris] 1702; Mémoires S. 296–305 [= *Opera omnia*, t. I S. 393–400].

$$2\left(1-\frac{xx}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{x^6}{1\cdot 2\ldots 6}+\text{etc.}\right).$$

Utraque etiam est valor integralis ipsius y ex aequatione

$$ddy+ydx^2=0;$$

cujus ideo si alter nostrûm dicat integrale esse

$$y=e^{+x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}$$

alter vero esse

$$y=2\cos A.\,x,$$

diversis quidem modis idem dicimus, at posterior expressio magis est intelligibilis, ex eaque facilius pro quovis ipsius x valore proposito conveniens valor ipsius y exhiberi potest. Demonstrare autem possum, quoties in integratione Tua methodo instituta perveniatur ad logarithmicas imaginarias, eas semper ita esse comparatas, ut illarum binae conjunctae sinum vel cosinum cujuspiam arcus, hoc est quantitatem realem repraesentant; atque mea methodo statim valores hos reales loco quantitatum imaginariarum introduco.

Vale, Vir Excellentissime, meque favore Tuo, quo mihi nihil est carius, complecti perge.

D. Petropoli d. 18 Oct. 1740.

28.

Bernoulli an Euler 18. Februar 1741 [mit Postskriptum vom 1. September 1741].

Antwort auf Eulers Brief vom 18. Oktober 1740; das Postskriptum bezieht sich auf einen verlorenen Brief von Euler vom August (?) 1741. Original im Archiv der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg. Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. S. 50—58.

Inhalt. Johann Bernoulli beklagt sich über die Gebrechlichkeiten des Alters. — Berichtigung von Fehlern in der zweiten Abteilung der *Dissertatio hydraulica.* — Anzeige des Empfanges der von Euler übersandten Schriften. — Ermittelung von $\int x^p dx\,(\log x)^q$. — Integration der unvollständigen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. — Über Eulers Berufung nach Berlin.

Viro Celeberrimo atque Excellentissimo Leonhardo Eulero S. P. D.
Joh. Bernoulli.

Jam duo elapsi sunt menses et amplius cum ad me perferrentur litterae Tuae novissimae, quo ipso tempore in lecto decubui misere laborans doloribus podagricis, chiragricis, ut et tussi asperrima, asthmate aliisque symtomatibus, praesertim quadam paralysi, quae manum dextram ita corripuit ut per plures hebdomadas calamo ad scribendum uti non potuerim, imo ne nunc quidem possim expedite exarare litteras quas non tam scribo quam pingo, ob vehementem manus tremorem, jam a longo tempore me infestantem atque indies ingravescentem; talia sunt senectutis incommoda, a quibus curari posse nulla spes affulget. Sed ne Te molestem importunis meis querelis, festino, at lente, ad litterarum Tuarum contenta.

Vix credideris, Vir Excell., quanto me gaudio perfuderit elogium quo decorare voluisti meditationes meas hydraulicas, a Te enim laudari, qui omnium es perspicacissimus simul etiam judex integerrimus, potiori mihi duco honori quam si a mille aliis laudarer; inserviet mihi judicium Tuum, tanquam omni exceptione majus, contra quosvis cavillatores, sive sint invidi sive ignari; facile enim percipis, non defuturos, praesertim in Anglia, qui more suo extenuabunt inventum non aliam ob causam quam quia debetur extraneo. Interim probe observasti ἀβλεψίαν meam, in determinanda vi retroactionis aquae ex vase per canalem horizontalem erumpentis; notasti quoque, uti decet, lapsum illum meum plane non promanasse ex fundamentis meae theoriae, sed tantum ex ejusdem perversa applicatione per meram inadvertentiam facta. En hujus rei originem. Cum in describendo alteram partem Hydraulicae meae pervenissem ad hunc locum, ubi de vi retroactionis ago, de qua materia ne cogitaveram quidem adhuc, ex improviso contigit ut inciderem in quasdam litteras veteres Filii mei,[1]) ubi praeter expectationem inveni aliquas formulas (sed sine analysi vel demonstratione) expositas; curiosus itaque videndi an respondeant principiis a me positis, festinanter feci calculum, quo tempore vestigia theoriae meae fere jam erant in ideis meis obliterata, quod ob memoriae labilitatem hac qua sum aetate saepissime mihi accidit; unde factum est ut putarem quemadmodum aqua erumpens ex vase per orificium in tubum primum, suam exerit (?) vim in latus vasis tubo oppositum, ita quoque considerandam esse vim retrourgentem aquae transeuntis ex quolibet tubo per foramen suum in tubum proxime sequentem, quod autem nunc video verum non esse, quia illa vis quaelibet sustinetur vel potius absorbetur ab aqua jugiter pone (?) sequente, adeo ut illa vis omnis jam contineatur in vi primitiva, quacum ex vase ipso in tubum primum pellitur et quae in latus oppositum vasis retroagit; sed quod incautus neglexi hoc fuit, quod debebam sumere vim aquae prementem fundum vel laminam perforatam, cum transit ex quolibet tubo in sequentem contiguum; hinc patet omnes istas vires, utpote antrorsum agentes, debere subtrahi a vi illa primitiva retrourgente, adeoque residuum tantum dare veram et absolutam vim qua vas retropellitur; proin tantum abest, ut quemadmodum putâram augeatur vis illa

1) Vgl. in betreff dieses Briefes von Daniel Bernoulli an seinen Vater, was jener in seinem Briefe an Euler vom 5. November 1740 (Fuss, a. a. O. II, S. 463) bemerkt.

primitiva a multitudine tuborum adaptatorum in amplitudine decrescentium, ut potius diminuatur eadem prout numerus tuborum crescit, decrescentibus amplitudinibus. Haec est rei gestae narratio. Cur autem mentionem fecerim Filii mei a me abludentis, id factum est, quia credebam ipsius solutionem a mea discrepantem extare in sua *Hydrodynamica*, atque ideo absurdum fore si silentio praeterirem, quando videret publicum nos esse in contradictoriis. Rogaris ergo, Vir Clariss., ut supprimas in scripto meo transmisso quatuor articulos erroneos, nimirum art. 28, 29, 30 et 31 una cum duobus subjunctis corollariis, eorumque loco substituas totidem alios in separata charta Tibi transmittendos.[1]) Videbis nunc me conspirare cum Filio pro casu unius tubi in § 28 explicato, ut et quod attinet ad duos tubos vasi adaptandos, qui casus est § 29, ubi pariter non est dissensus inter nos; unum tamen credere me facit, Filium ipsummet suo solvendi modo non satisfactum esse, quia non video causam cur de tribus tubis pluribusve numero determinatis nihil omnino dixerit, totamque istam materiam in opere suo hydrodynamico omiserit. Quod dedit de numero infinito tuborum seu de canali conoidico decurtato, qui casus est facilis, mecum convenit.

Pergo, Vir Excel., ad reliqua epistolae tuae capita. Accepi tandem nuper per manus Filii libros inter quos inveni quoque *Musicam* Tuam, pro qua, si missa est ex Tua liberalitate, debitas refero gratias. Legam eam quam primum licuerit per valetudinem. Optarim vero ut quae imposterum mittenda sunt, non per mercatores sed alia via commodiori transmittantur; hi enim lucripeti homines, qui nil faciunt nisi quaestus gratia, tot sumtus exigunt variis sub titulis, ut dubitem an non exsuperaturi essent pretium quod valerent libri ipsi si in auctione aliqua statim divendi deberent. Fortassis melius et promtius Tubingam dirigerentur, ut olim jam factum memini, ad Clar. BULFFINGERUM, qui a nobis non plus peteret quam quod ipse erogaturus esset.

Ob distractiones alienas viresque ex morbo adhuc dum prostratas non licet profundius tentare jam serierum materiam, in quibus tanquam in elemento Tuo versaris felicissime; habeo interim de quo mihi gratulor, videns inventa mea olim facta Tibi saepissime ansam dare eruendi exquisitissimas veritates, aliaque producendi inventa ex meis deducta; inter talia refero quae nunc habes de sequestrandis integralibus imaginariis a realibus,

---

1) Laut dem Postskriptum des Briefes wurden diese Änderungen am 1. September 1741 an EULER abgesandt. Aber schon am 20. September 1741 schrieb DANIEL BERNOULLI an EULER, daß er die Änderungen falsch befunden hatte (siehe FUSS, a. a. O. II, S. 475), und zuletzt gab auch JOHANN BERNOULLI dies zu, denn in seinem Briefe an EULER vom 28. Oktober 1741 ersuchte er diesen (vgl. FUSS, a. a. O. II, S. 60), die am 1. September 1741 übersandten Änderungen zu unterdrücken.

quae utique omnia fluunt ex eo, quod expressiones quadraturae circuli reduci possunt ad logarithmos imaginarios et vicissim, quod me primum patefecisse, et quidem jam ab initio hujus saeculi, ingenue agnoscis. Tale quid etiam est, quod jam in superiori saeculo dedi pro integratione $\int x^x dx$ in casu quo $x = 1$, eo artificio usus ut ex logarithmo ipsius x^x, nempe ex $x \mathrm{l} x$, iterum formarem, regrediendo ad numerum, valorem ipsius x^x per seriem

$$1 + \frac{x \mathrm{l} x}{1} + \frac{xx(\mathrm{l}x)^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3(\mathrm{l}x)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.}$$

quod usque adeo placuit Klingenstiernio,[1]) professori matheseos Upsaliensi, ut sciscitaturus originem meae seriei

$$\int x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \text{etc.},$$

casu $x = 1$, quam suo Marte nullatenus invenire poterat, praecipue hunc in finem iter ad me fecerit, per 6 menses postea commoratus, mea institutione usurus. Miror vero quod dicis, Vir Celeb., Te *ingenti* labore elicuisse methodum eam inveniendi, cum tamen ego non magnum laborem adhibuerim pro isto negotio, ut vidisti ex methodo mea quam demum A. 1737 publicavi, postquam fere per 40 annos eam suppresseram. Lemma illud pro inveniendo valore ipsius $\int x^m dx(\mathrm{l}x)^n$, quod dicis in subsidium vocasse, jam tum temporis mihi innotuisse, cum solutionem ipsam integrationis formulae $\int x^x dx$ adinveni, facile percipis, siquidem unum sine altero vix fieri potest: cujus rei ut Tibi fidem faciam, transcribam quod in schedula scriptum inveni inter chartas meas antiquas; calculus est brevis et perfacilis atque methodus similis illi per quam inveni seriem meam universalem pro integrando $\int n dz$ quam dedi in Actis Lips. 1694 ni fallor.[2]) Ecce ergo,

1) Der bekannte schwedische Mathematiker Samuel Klingenstierna (geb. 1698, gest. 1765) machte 1728 eine Studienreise nach Marburg und Basel. Daß er sich vorzugsweise für den von Johann Bernoulli angegebenen Zweck nach Basel begab, scheint mir wenig wahrscheinlich, und meine Ansicht wird auch durch den folgenden Passus eines Briefes bestätigt, den Johann Bernoulli am 26. Oktober 1728 an J. J. Scheuchzer schrieb (das Konzept des Briefes befindet sich in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm): „J'ai présentément sous mon information un suédois nommé Mr. Klingenstiern, qui est aussi professeur désigné en mathématiques à Upsal et qui est aussi venu de si loin exprès pour profiter de mes faibles lumières quoique, pour dire la vérité, il entend déjà la plus sublime géométrie à merveille, en sorte que je ne sais ce que la renommée a menti de moi, qui l'ait pu attirer ici de son pays septentrional".

2) Siehe Johann Bernoulli, *Additamentum effectionis omnium quadraturarum et rectificationum curvarum per seriem quandam generalissimam;* Acta Eruditorum 1694, S. 437—441 [= *Opera omnia*, t. I S. 125—128].

retentis meis symbolis, integrationem formulae $\int x^p dx (\mathrm{l}x)^q$, ubi p et q idem sunt quod apud Te m et n. Operatio est ut sequitur:

$$\int x^p dx (\mathrm{l}x)^q = \frac{1}{p+1} x^{p+1} \cdot \mathrm{l}x^q - \frac{1}{(p+1)^2} x^{p+1} q \mathrm{l}x^{q-1}$$

$$+ \frac{1}{(p+1)^3} x^{p+1} \cdot q - 1 \cdot q \mathrm{l}x^{q-2} - \frac{1}{(p+1)^4} x^{p+1} \cdot q - 2 \cdot q - 1 \cdot q \mathrm{l}x^{q-3}$$

$$+ \frac{1}{(p+1)^5} x^{p+1} \cdot q - 3 \cdot q - 2 \cdot q - 1 \cdot q \mathrm{l}x^{q-4} - \cdots\cdots$$

$$\pm \frac{1}{(p+1)^{q+1}} x^{p+1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots q.$$

Nota. Si numerus terminorum, seu $q + 1$, est par, finietur progressio signo $-$, sin vero $q + 1$ sit impar, finietur signo $+$.

Coroll. In casu, quo x evadit $= 1$, evanescunt omnes termini excepto solo ultimo, singuli enim, in quibus est $\mathrm{l}x$ ejusque aliqua potestas, aequantur zero ex natura logarithmorum, nam exponens q supponitur affirmativus; adeoque erit in hoc casu

$$\int x^p dx \mathrm{l}x^q = \frac{\pm 1}{(p+1)^{q+1}} x^{p+1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots q = \frac{\pm 1}{(p+1)^{q+1}} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots q.$$

Vides expressionem meam ante tot annos inventam Tuae quidem omnino esse consentaneam, sed non notasti quod requiratur meum q vel Tuum n debere esse affirmativum. Dubito an inveniri possit formula aliqua pro casu in quo q vel n esset negativum. Inveni quidem hanc aliam seriem

$$\int x^p dx (\mathrm{l}x)^q = x^{p+1} \Big(\frac{1}{1+q} (\mathrm{l}x)^{1+q} - \frac{p+1}{1+q \cdot 2+q} (\mathrm{l}x)^{2+q}$$

$$+ \frac{(p+1)^2}{1+q \cdot 2+q \cdot 3+q} (\mathrm{l}x)^{3+q} - \frac{(p+1)^3}{1+q \cdot 2+q \cdot 3+q \cdot 4+q} (\mathrm{l}x)^{4+q} + \cdots \Big)$$

quae pro negativo q aeque valet ac pro affirmativo, mutando tantum signa ante q posita. Sed nihil inde in rem nostram hactenus elicere potui.

Quod attinet ad methodum meam integrandi hanc aequationem

$$0 = y + \frac{a dy}{dx} + \frac{b ddy}{dx^2} + \frac{c d^3 y}{dx^3} + \text{etc.},$$

non amplius scio an dixeris eam non satis esse generalem, de hoc vero non agebatur, nam ipsemet ego dubitavi de ejus legitima generalitate, siquidem pro fundamento posui curvam satisfacientem esse ex classe logarithmicarum, cujus subtangens tantum quaerenda sit, etiamsi nondum pro demonstrato habuerim, imo ne nunc quidem habeam, nullam curvam ex alio curvarum genere dabilem esse, quae forsan etiam respondeat propositae aequationi. At vero scandalum mihi facesserat (hinc enim oborta est nostra controversia) quod in aliqua Tua anteriori epistola dixisti aequationem algebraicam, ad quam ego etiam dudum perveneram,

$$p^4 + k^4 = 0,$$

resolvi in has duas aequationes duarum dimensionum *reales*:

$$pp + kp\sqrt{2} + kk = 0 \text{ et } pp - kp\sqrt{2} + kk = 0.$$

Ad quod ego respondi, has quantitates esse quidem factores reales, in quos altera illa

$$p^4 + k^4 = 0$$

resolvi potest, quod jam olim demonstratum dedi Tayloro,[1]) sed illos factores utut reales non tamen posse esse aequationes reales, hoc est, non posse habere radices reales, adeoque impossibile esse ut $pp \pm kp\sqrt{2} + kk$ fieri possit = zero; fortassis autem mentem Tuam non satis clare expressisti. Caeterum facile concipio, quomodo ex logarithmis imaginariis perveniri possit ad valores reales per quadraturam circuli exprimendos, et quî ignorare possem, cum primus hanc materiam in scenam produxerim. Cavendum interim suspicor ne quod hic de imaginariis primi gradus intelligitur idem extendi debeat ad imaginaria altiorum graduum, dubito, inquam, an si reperiretur

$$y = e^{+x\sqrt[b]{-1}} + e^{-x\sqrt[b]{-1}},$$

idem reduci posset ad quadraturam circuli realem.

Audivi cum voluptate, Te, Vir Celeb., invitatum esse nomine regis Borussiae ad novam academiam Berolini stabiliendam, imo Te jamjam acceptasse invitationem, de quo honore Tibi ex animo gratulor. Velit Deus secundare Tua coepta atque Te comitari in itinere, jam proximo, ut intelligo, mense Junii suscipiendo. Rogo ut mihi scribas quantum Tibi promissum sit salarium annuum. Etiam ego et ambo mei Filii accepimus litteras invitatorias jussu regio, sed mihi grandior est aetas et valetudo nimis vacillans, quam ut possim, quemadmodum optarem, auscultare tam honorificae atque illecebrosae ablectationi. Si vicenis annis junior essem, mehercle, ne per momentum quidem cunctarer; mihi adeo sordent omnia in patria. Quid consilii capturi sint Filii mei, nondum scio; expectabunt

---

1) Siehe Johann Bernoulli, *Clar. Taylori mathematici Angli problema analyticum, quod omnibus geometris non-Anglis proposuit, solutum;* Acta Eruditorum 1719, S. 256—270 [= *Opera omnia,* t. II S. 402—418], vgl. oben S. 40, Anm. 2.

credo significationem magis praecisam conditionum offerendarum, id quod fiet, si conjectare licet, finita expeditione in Silesiam suscepta. Quando veneris Berolinum, habebimus Te multo viciniorem, quod me sperare facit, Te aliquando ad Patrios Lares exspatiaturum, salutandorum Parentum gratia, quo ipso Tui videndi copia mihi daretur, quod vehementer desidero priusquam morior.

Interim Vale, Vir amicissime, et me amare perge.

Dabam Basileae d. 18. Febr. st. n. 1741.

P. S. Sicuti scribis, pars prior hydraulicorum meorum jam erit impressa in IX Comment. tomo; pars altera sine dubio typis mandabitur pro tomo X. Sed cura quaeso ut correcte prodeat atque immunis a vitiis typographicis, quod monere necesse duco, quia vidi in tomo V exercitationem meam de triangulo retrocedente a pressione ponderis, hypothenusae impositi, tot scatere erroribus a typotheta commissis, ut ipse me vix cognoscere potuerim vel cogitata mea intelligere. Imprimis optarim ut figurae, Hydraulicae meae inservientes, a chalcographo caelentur cum aliqua venustatis gratia, quales ego exprimere non potui, quia nunquam didici delineandi artem, et omnes tremula manu, utcunque potui, in chartam conjeci: Ad hoc autem opus erit ut Tu, Vir Excell., vel alius quispiam harum rerum peritus explicet chalcographo quid in singulis locis observandum sit ad res ipsas menti meae convenientes nitide probeque repraesentandas.

Hasce jam scriptas dimissurus eram mense Februario, Vir Celeb., cum nuncius paulo ante ad nos deferretur de descessu Tuo tanquam proxime instanti, id quod fecit, ut retinuerim donec scirem adventum Tuum Berolinum, veritus ne Te non amplius inveniant Petropoli, quanquam ut nunc video sat temporis ante abitum Tuum superfuisset quo meas litteras (si misissem) ibi adhuc accipere potuisses; mitto tamen nunc, etsi sero, ne responsione careat ad Tuas anteriores. Rogo ut schediasma adjectum quantocius Petropolin transmittas, spero enim satis mature illuc venire posse, ut inseri queat parti secundae Hydraulicae meae, antequam tomus X Comment. eousque impressus sit. Caeterum jucundissimum fuit intelligere ex novissimis Tuis litteris Berolini datis et nudius tertius acceptis, Te una cum Tua familia felicissime adventasse in locum novae Tuae stationis, de quo Tibi gratulor voveoque ut omnia Tibi ex animi sententia eveniant. Gratulor et mihi Te nobis viciniorem factum, indeque spem affulgere futurum ut aliquando huc excurras ad salutandum parentes et amicos, quod ut fiat ante meam mortem est quod ardentissime desidero. Non possum satis àdmirari excessum Tuae erga me benevolentiae, videns Tibi res meas usque adeo cordi esse, ut ultro et non rogatus easdem deferri curaveris ad Illustrissimum Comitem Ostermannum,[1]) quam in partem quoque adduxisti, sicuti ais, Clariss. Prof. et Consiliarium Grossium, qui hoc onus in se suscepturum promiserit. Nihil jam reliquum est hac vice, quam ut Te, amice exoptatissime, quamvis absentem, animo exosculer, donec id, si Superis placet, coram facere possim. Vale, iterumque vale.

Basil. a. d. 1. Sept. 1741.

28*.

Euler an **Bernoulli** August (?) 1741.

Verloren; zitiert von Bernoulli in seinem Postskriptum an Euler vom 1. September 1741 („Jucundissimum fuit intelligere ex novissimis tuis litteris Berolini datis").

28**.

Euler an **Bernoulli** 16. September 1741.

Verloren; zitiert von Bernoulli in seinem Brief vom 28. Oktober 1741 („ignosce tardiuscule respondenti ad litteras Tuas Berolini datas d. 16. Sept.").

29.

Bernoulli an Euler 28. Oktober 1741.

Antwort auf Eulers verlorenen Brief vom 16. September 1741. Original im Archiv der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg. Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. S. 59—63.

Inhalt. Neue Berichtigungen zur zweiten Abteilung der *Dissertatio hydraulica.* — Eulers Stellung in Berlin. — Johann Bernoulli selbst muß den Ruf nach Berlin ablehnen. — Die Integration der unvollständigen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. — Johann Bernoullis amtliche Verpflichtungen.

29*.

Euler an **Bernoulli** 26. Dezember 1741.

Verloren; zitiert von Bernoulli in seinem Brief vom 15. März 1742 („Distuli responsionem ad literas Tuas die 26. Decembris datas").

30.

Bernoulli an Euler 15. März 1742.

Antwort auf Eulers verlorenen Brief vom 26. Dezember 1741. Original im Archiv der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg. Veröffentlicht von Fuss a. a. O. S. 64—71.

Inhalt. Die politischen Verhältnisse in Rußland und Preußen und ihre mutmaßliche Einwirkung auf die Akademien in St. Petersburg und Berlin. — Über die Rückwirkung der aus Gefäßen ausströmenden Flüssigkeiten. — Zwei mechanische Probleme in betreff der Bewegung eines Körpers, der in einer Röhre eingeschlossen ist, welche sich um eine Achse dreht; im ersten Falle dreht sich die Röhre in einem Vertikalplane auf Grund der Schwere des Körpers, im anderen Falle geschieht die Drehung der Röhre in einem Horizontalplane mit gleichmäßiger Geschwindigkeit.

---

1) Der fragliche russische Staatsmann Andrej Iwanowitsch Ostermann (1686—1747) wurde bekanntlich während der Revolution in St. Petersburg 1741 verhaftet und zum Tode verdammt, obgleich er später begnadigt wurde.

30*.

Euler an Bernoulli Mai 1742.

Verloren; zitiert von BERNOULLI in seinem Brief vom 27. August 1742 („Jam propemodum quadrimestre effluxit ex quo ultimas Tuas litteras accepi").

31.

Bernoulli an Euler 27. August 1742.

Antwort auf EULERS verlorenen Brief vom Mai 1742. Original im Archiv der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg; Konzept in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. Veröffentlicht von FUSS, a. a. O. S. 72—81.

Inhalt. JOHANN BERNOULLIS Kränklichkeit. — Die Akademien in St. Petersburg und Berlin. — Die zwei im vorigen Briefe behandelten mechanischen Probleme und ein Satz über die Bewegung eines Körpers der einen Stoß bekommen hat, dessen Richtung nicht durch den Schwerpunkt des Körpers geht. — Über die Rückwirkung der aus Gefäßen ausströmenden Flüssigkeiten.

[Das in Stockholm aufbewahrte Konzept enthält am Ende folgende Aufzeichnung von JOHANN BERNOULLI.]

Ex natura virium vivarum debebat esse

$$\left(qaa + \frac{pttdy^2 + pyyds^2}{ds^2}\right) \times \int \frac{yds}{qaa + pyy} = ys,$$

seu

$$\left(qaa + pyy + \frac{pttdy^2}{ds^2}\right) \times \int \frac{yds}{qaa + pyy} = ys;$$

est autem ex natura curvae inventae

$$\int \frac{yds}{qaa + pyy} = \frac{ds^2}{pttdy^2} \int sdy,$$

ideoque substituendo hoc pro illo prodibit

$$\left(qaa + pyy + \frac{pttdy^2}{ds^2}\right) \times \frac{ds^2}{pttdy^2} \int sdy = ys,$$

seu

$$\left(\frac{qaads^2 + pyyds^2}{pttdy^2} + 1\right) \int sdy = ys,$$

hoc est

$$(qaads^2 + pyyds^2 + pttdy^2) \int sdy = pttysds^2.$$

Sed hinc nihil adhuc liquet pro veritate aequationis inventae; interim tamen etiam nihil in contrarium conduci potest. Videamus autem, an in uno alterove casu particulari aliquid inde evidentiae elici queat. Sit igitur primo p infinite parvum respectu q; hoc casu aequatio nostra generalis

$$\frac{ds^2}{tt} \int sdy = pdy^2 \int \frac{yds}{qaa + pyy}$$

pro natura curvae inventae degenerat in hanc

$$\frac{ds^2}{tt} \int sdy = 0 \cdot dy^2 \int \frac{yds}{qaa}, \text{ ideoque } \frac{ds^2}{tt} \int sdy = 0,$$

seu $ds = 0$, id quod indicat in hoc casu fore $s =$ constanti cuilibet, ac proinde situm tubi, in quo descendit ponduscuIum p esse invariabilem, ingens enim corpus q gravitatis expers non potest in motum concitari a ponduscuIo p infinite parvo. Hactenus igitur aequatio nostra verum exhibet.

Sit nunc q infinite parvum respectu p, quo casu patet, curvam quaesitam abire in rectam verticalem quamlibet, quia q nihil impedire potest quominus pondus p ex situ suo initiali liberrime descendat, ut faceret in vacuo, si esset extra tubum. Examinemus nunc quid monstret aequatio nostra generalis

$$\frac{ds^2}{tt}\int s\,dy = p\,dy^2\int\frac{y\,ds}{qaa+pyy};$$

haec utique in hoc casu abit in hanc

$$\frac{ds^2}{tt}\int s\,dy = dy^2\int\frac{ds}{y}.$$

Ut autem pateat, utrum respondeat necne rei veritati: sit ponderis p distantia initialis a centro rotationis (quando scil. tubus adhuc est in situ horizontali) b; erit ergo

$$y = \frac{ab}{t} = \frac{ab}{\sqrt{(aa-ss)}} \text{ et } dy = \frac{absds}{(aa-ss)^{\frac{3}{2}}},$$

quibus substitutis mutatur aequatio generalis in hanc specialem

$$\frac{ds^2}{aa-ss}\int\frac{abssds}{(aa-ss)^{\frac{3}{2}}} = \frac{aabbssds^2}{(aa-ss)^3}\int\frac{ds\sqrt{(aa-ss)}}{ab},$$

porroque in hanc

$$\int\frac{ssds}{(aa-ss)^{\frac{3}{2}}} = \frac{ss}{(aa-ss)^2}\int ds(aa-ss)^{\frac{1}{2}}.$$

Quae reducta non videtur fore identica.

Nota. Quod hic vocatur s, id in ipsa epistola est x.

31*.

Euler an Bernoulli 22. September 1742.

Verloren; zitiert von Bernoulli in seinem Brief vom März 1743 („Defectus attentionis non permittit aliter respondere ad litteras Tuas d. 22. Sept. 1742 scriptas"). Vgl. auch den Brief von Daniel Bernoulli an Euler vom 20. Oktober 1742 (Fuss, a. a. O. II, S. 500).

32.

Bernoulli an Euler März 1743.

Antwort auf Eulers verlorenen Brief vom 22. September 1742. Original im Archiv der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg. Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. S. 82–87.

Inhalt. Die Akademien in St. Petersburg und Berlin. — Das erste der in den zwei vorigen Briefen behandelten mechanischen Probleme. — Ein anderes ähnliches Problem, das Euler als neu bezeichnet hatte, dessen Lösung aber Bernoulli als eine unmittelbare Anwendung einer bekannten Methode betrachtet. — Die Bewegung eines Körpers auf Grund eines Stoßes, dessen Richtung nicht durch den Schwerpunkt des Körpers geht. — Über die Zuverlässigkeit der von Daniel Bernoulli in seiner *Hydro-*

dynamica angeführten Experimente. — Johann Bernoulli empfiehlt den Verleger Bousquet.

32*.

Euler an Bernoulli 1744.

Verloren; zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Brief an Euler vom 29. August 1744 („Mein Vater hat mir beiliegende Schrift als eine Antwort auf Ew. letztes Schreiben übergeben", siehe Fuss, a. a. O. II, S. 566).

32**.

Euler an Bernoulli 1745 (?).

Verloren; zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Brief an Euler aus dem Anfang des Jahres 1745 („Dero Brief hab ich demselben [= meinem Vater] überliefert", siehe Fuss, a. a. O. II, S. 569).

33.

Bernoulli an Euler 23. September 1745.

Original im Archiv der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg. Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. S. 88—91.

Inhalt. Fortgesetzte Wehklage über die Gebrechlichkeiten des Alters. — Über zwei von Euler übersandte Schriften. — Berichtigung der irrigen Angabe, daß Taylor die Bewegung eines Körpers in resistentem Medium bestimmt hatte für den Fall, daß der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit des Körpers proportional ist. — Eulers Arbeit über isoperimetrische Kurven. — Leibniz' und Bernoullis *Commercium.*

34.

Bernoulli an Euler 24. Mai 1746.

Original im Archiv der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg. Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. S. 92—93.

Inhalt. Sieg des Prinzips der lebendigen Kraft in Frankreich.