Der Briefwechsel zwischen Leonhard Euler und Johann I Bernoulli.

Von G. Eneström in Stockholm.

III. 1739—1746.

Der letzte im vorigen Abschnitte[1]) zum Abdruck gebrachte Brief von Euler ist vom 20. Dezember 1738, und diesen Brief beantwortete Bernoulli am 7. März 1739. Aus demselben Jahre stammen zwei Briefe von Euler, nämlich vom 5. Mai und 15. September, sowie zwei Antwortschreiben des Bernoulli, das eine jetzt verloren, das andere vom 9. Dezember datiert. Auch im Jahre 1740 war der Briefwechsel zwischen Euler und Bernoulli ziemlich regelmäßig; diesem Jahre gehören nämlich drei Briefe von Euler (vom 19. Januar, 20. Juni, 18. Oktober) und zwei Antwortschreiben von Bernoulli (vom 16. April, 31. August) an. Eine Antwort auf Eulers Brief vom 18. Oktober 1740 fing Bernoulli zwar am 18. Februar 1741 an, aber diese Antwort blieb viele Monate liegen, und erst im September 1741 wurde sie zusammen mit einem Postskriptum abgesandt. Alle jetzt erwähnte Briefe, mit Ausnahme der verloren gegangenen aus dem Jahre 1739, also 5 Briefe von Euler und 5 Briefe von Bernoulli, sind im folgenden zum Abdruck gebracht worden.

Mit dem soeben zitierten Schreiben des Bernoulli vom 18. Februar 1741 brach der Briefwechsel zwischen ihm und Euler keineswegs ab; in der Tat hat Fuss[2]) sechs weitere Briefe von Bernoulli an Euler veröffentlicht, und wenigstens sieben Briefe an Bernoulli hat Euler nach 1740 geschrieben. Indessen sind alle diese Eulerschen Briefe verloren gegangen, und unter solchen Umständen habe ich keinen hinreichenden Anlaß gehabt, die sechs Bernoullischen Briefe noch einmal abzudrucken. In der Einleitung zum ersten Abschnitte[3]) habe ich nämlich das erneute

1) Siehe Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 248—291.

2) *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle publiée par* P. H. Fuss. T. II (St.-Pétersbourg 1843), S. 59—93.

3) Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 345.

Abdrucken der früheren BERNOULLIschen Schreiben dadurch begründet, daß sie eine wichtige Ergänzung zu den EULERschen Briefen bilden, und da diese fehlen, so ist es natürlich, daß jene auch in Fortfall kommen sollen. Noch dazu sind die letzten BERNOULLIschen Briefe für die Geschichte der Mathematik von untergeordnetem Interesse, was ja nicht wundernehmen kann, da sie von einem alten und kränklichen Mann geschrieben sind. Indessen habe ich es nützlich erachtet, die nach dem 18. Februar 1741 zwischen EULER und BERNOULLI gewechselten Schreiben zu verzeichnen und den Inhalt der von FUSS veröffentlichten Briefe anzugeben. Unmittelbar nach der Inhaltsangabe des Briefes vom 27. August 1742 habe ich eine Aufzeichnung des BERNOULLI hinzugefügt, die sich in seinem in Stockholm aufbewahrten Konzepte findet.

Schon in der Einleitung zum vorigen Abschnitte[1]) habe ich bemerkt, daß in den in Stockholm befindlichen Briefen und Konzepten aus den Jahren 1737—1738 Streichungen vorkommen, und dieselbe Bemerkung gilt auch in betreff der im folgenden abgedruckten Aktenstücke. Solche Streichungen kommen vor in den EULERschen Briefen vom 5. Mai 1739 (14 Zeilen), 15. September 1739 (13 Zeilen), 19. Januar 1740 (7 Zeilen), 20. Juni 1740 (4 Zeilen) und in den BERNOULLIschen Konzepten vom 7. März 1739 (13 Zeilen), 16. April 1740 (14 Zeilen). Nimmt man noch hinzu, daß statt der BERNOULLIschen Briefe vom 7. März 1739, 9. Dezember 1739, 16. April 1740 und 31. August 1740 nur Abschriften[2]) (vermutlich nicht ganz vollständig) in St. Petersburg vorhanden sind, so kann man nicht umhin anzunehmen, daß JOHANN BERNOULLI auch während der Jahre 1739—1740 mit EULER über irgend eine Frage sehr privater Natur verhandelte.

Unter den rein mathematischen Fragen, die in den hier abgedruckten Briefen behandelt werden, sind in erster Linie zu nennen die Integration der unvollständigen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und die Summierung der Reihe

$$\sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{1}{x^2 \pm n}.$$

Den Anlaß, sich mit der ersten Frage zu beschäftigen, bekam EULER dadurch, daß er 1739 zufälligerweise entdeckte, daß die einfache Differentialgleichung

$$a^3 \frac{d^3y}{dx^3} = y$$

dreimal integriert werden konnte. Die Form des Integrales ließ ihn vermuten, daß es durch eine einzige Operation erhalten werden könnte, und

1) Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 248—249.

2) Siehe FUSS, a. a. O. I, S. XXI.

bald entdeckte er die Methode, die unvollständige lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$y + a\frac{dy}{dx} + b\frac{d^2y}{dx^2} + c\frac{d^3y}{dx^3} + d\frac{d^4y}{dx^4} + \cdots = 0$$

zu integrieren. Was seine Briefe an Bernoulli hierüber enthalten, sowie was Bernoulli über die Integration einer verwandten Gleichung mitteilte, habe ich vor 8 Jahren in einem besonderen Aufsatze ausführlich auseinandergesetzt.[1])

Mit der Reihe

$$\sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{1}{x^2 \pm n}$$

hat sich Euler später in seinen gedruckten Schriften vielfach beschäftigt; die Resultate, die er seinem alten Lehrer brieflich mitteilte, sind also schon längst bekannt, aber die dabei benutzte Behandlungsweise ist nicht ohne Interesse, da sie, so viel ich weiß, nicht von Euler veröffentlicht worden ist. Er verwandelt nämlich die gegebene unendliche Reihe in eine andere, die nach Potenzen von π fortschreitet, nimmt eine einfache Transformation vor, differentiiert die neue Reihe nach π, und erhält dadurch eine Differentialgleichung, deren Integral er finden kann.

Mehr im Vorübergehen werden in den Briefen einige andere Fragen aus dem Gebiete der Analysis behandelt, z. B. über die Summen der Reihen

$$\sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{1}{x^{2n}} \text{ und } \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{1}{x^x};$$

die Summierung einer endlichen Anzahl von Gliedern der harmonischen Reihe gibt Euler Anlaß, den angenäherten Zahlenwert der später nach ihm benannten Konstante zu berechnen. Zur Integralrechnung gehören einige von Euler aufgestellte Reduktionsformeln für das Integral

$$\int x^m (a^n - x^n)^r \, dx.$$

In betreff der rein mathematischen Fragen ist es eigentlich Euler, der in den Briefen die Resultate seiner Untersuchungen mitteilt, während sich Bernoulli meistenteils auf gelegentliche Bemerkungen beschränkt oder auf seine früheren Arbeiten hinweist. Anders liegt dagegen die Sache hinsichtlich der in den Briefen behandelten Gegenstände aus der angewandten Mathematik. Hier fühlte sich Bernoulli offenbar mehr auf eigenem Boden stehen, und die Briefe handeln ebenso sehr von seinen eigenen Untersuchungen. Die Übersendung der zwei für die Petersburger Commentarii bestimmten Abteilungen der *Dissertatio hydraulica*, sowie die Fortsetzung der schon im Jahre 1737 begonnenen Diskussion über

1) Eneström, *Sur la découverte de l'intégrale complète des équations différentielles linéaires à coefficients constants;* Biblioth. Mathem. 11_2, 1897, S. 43—50.

das Gleichgewicht und die Bewegung schwimmender Körper, bieten BERNOULLI die sicherlich nicht unerwünschte Gelegenheit dar, sich sowohl über die Prinzipien wie auch über gewisse Details der Hydrodynamik zu äußern, und nebenbei die Untersuchungen seines Sohnes DANIELS zu bemängeln. EULER spricht zwar seine Bewunderung für die BERNOULLIschen Untersuchungen aus, beanstandet aber einzelne Punkte derselben, und zum Teil muß ihm BERNOULLI auch Recht geben.

Auch andere Gegenstände der angewandten Mathematik werden in den Briefen berührt, vorzugsweise spezielle mechanische Probleme. Natürlich handeln BERNOULLI und EULER auch über mehr literarische und allgemein wissenschaftliche Fragen. Nicht ohne Interesse für die Geschichte des buchhändlerischen Verkehrs im 18. Jahrhundert ist BERNOULLIS Bericht in seinem Briefe vom 16. April 1740 über die Schwierigkeit, Bücher von Leipzig nach Basel transportiert zu bekommen.

Daß Privatsachen in den Briefen berührt worden sind, habe ich schon oben bemerkt. Einen wenig erfreulichen Eindruck machen die wiederholten Wehklagen des BERNOULLI über Krankheit und Altersschwäche.

19.

Bernoulli an Euler 7. März 1739.

Antwort auf EULERS Brief vom 20. Dezember 1738. Original verloren; Konzept in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. Veröffentlicht von FUSS, a. a. O. S. 18—25 nach einer von N. FUSS verfertigten Abschrift des Originals; schon früher hatte N. FUSS in seinem *Eloge d'EULER* (Nova acta acad. sc. Petrop. 1, 1783 [gedruckt 1787], S. 173) einige Zeilen daraus abgedruckt.

Inhalt. Übersendung des ersten Teiles der *Dissertatio hydraulica* und Hinweis auf die Wichtigkeit der Methode, deren sich JOHANN BERNOULLI darin bedient hatte. — Kritische Bemerkungen anbelangend die *Hydrodynamica* des DANIEL BERNOULLI. — Über den Inhalt des in Angriff genommenen zweiten Teiles der *Dissertatio hydraulica*. — Über eine früher übersandte Abhandlung *De motu corporum in orbibus mobilibus*. — Die Arbeit von EULER über die Musik. — Verschiedene Arten von Gleichgewicht schwimmender Körper. — Über vertikale Schwingungen. — Isoperimetrische Probleme. — Eigenschaften der elastischen Kurve. — JOHANN BERNOULLIS finanzielle Verhältnisse.

Viro Excellentissimo atque Acutissimo LEONHARDO EULERO S. P. D.
JOH. BERNOULLI.[1])

Exoptatissimae Tuae litterae d. 20. Decembris st. v. mihi traditae sunt atque a me perlectae summa cum voluptate. Ecce! nunc ad Te mitto partem priorem meditationum mearum hydraulicarum[2]), quas tantopere

1) Bei dem folgenden Abdruck habe ich auch das Konzept verglichen.

2) *Dissertatio hydraulica de motu aquarum per vasa aut per canales, quamcunque figuram habentes. Pars prima agens de motu aquarum per vasa et canales cylindricos qui ex pluribus tubis cylindricis sibi invicem adaptatis sunt conflati;* Comment. acad. sc. Petrop. 9, 1737 (gedruckt 1744), S. 3—49. Ein vorläufiger Abdruck findet sich in den *Opera omnia* (t. IV S. 391—432) des JOHANN BERNOULLI.

Te desiderare testaris, et vel ideo desideras, quod cognoveris imperfectionem, qua haec doctrina etiamnunc ab aliis tractari soleat, immo, ut candide fateris, Tu ipse frustra omne studium in genuina methodo detegenda collocaveris, invita omni, qua polles, perspicacia. Videbis, originem sequioris successus scriptorum hydraulicorum ex eo unice venisse, quod nemo hactenus attenderit, partem aliquam finitam virium prementium insumi ad formandum gurgitem, quando aqua cogitur ex uno tubo in alium diversae amplitudinis transire, licet gurges ipse constare concipiatur ex portiuncula aquae infinite parva. Post pertinacem diutinamque pensitationem animadverti tandem, non sufficere, ut attendatur ad solam illam vim vel pressionem, qua liquor in tubis in motum localem seu progressivum excitetur data cum velocitate, sed praeterea in considerationem trahi debere principium *continuitatis*, quo fit ut nulla mutatio in effectibus producendis fiat per saltum, sed successive per gradus infinite parvos, ut in hoc negotio accidit, ubi liquor a velocitate minori ad majorem, vel vicissim a majori ad minorem transire debet; unde omnino necesse est, ut prope transitum, vel ante vel post, concipiatur aliqua portiuncula liquoris, quantumvis parva, cujus stratula infinite parva vel accelerando vel retardando procedant, atque haec portiuncula, inaequabili velocitate gaudens, in stratulis est, quam voco gurgitem: haec omnia uberius et clarius ex ipso scripto intelliges.

Videbis etiam methodum hanc directam mirifice conspirare cum indirecta (qua sola usus est Filius meus in sua *Hydrodynamica*), etenim ambae dant eandem solutionem problematum hydraulicorum. Posset autem aliquis mirari, cur, qui ista solvere vult per theoriam virium vivarum, non pariter teneatur rationem habere formandi gurgitis, utpote qui videatur requirere ad sui generationem aliquam partem virium vivarum, aeque ac requiritur partem virium mortuarum; sed causam discriminis explico in scripto meo, monstrans, quantitatem materiae quae componit gurgitem etsi sit infinite parva, nihilominus opus habere vi finita et determinata pressionis ad acquirendam accelerationem vel retardationem in stratulis, sive ad id, ut sese gradatim accommodet ad motum, quem liquor jam habet in tubo, in quem ingredi debet. At vero vim vivam, quae est in omni materia gurgitis, quippe quae quantitatis est infinite parvae et tantum finitam celeritatem in singulis stratulis habens, oppido patet fore illam vim vivam gurgitis infinite parvam adeoque prorsus incomparabilem cum totali vi viva totius massae aqueae in tubis motae. Hoc ergo notari debuisset a Filio, antequam aggrederetur tractationem Hydraulicae per theoriam conservationis virium vivarum, ne quis scrupulum habere possit, videns negligi considerationem gurgitis, quae in methodo directa citra paralogismum negligi non potest; sed quomodo potuisset hoc praecavere, cum nequidem ideam habuerit naturae gurgitis, quo tempore librum suum scripsit?

Vides, Vir Clariss., figuras rudi admodum et crassa Minerva esse delineatas, sine ullo ornamento, nedum ad stereographiae regulas repraesentatas, id sane efficere non potui, si vel maxime voluissem, ob tremorem manuum mearum qui cum aetate continuo ingravescit. Fortassis dabitur apud Vos aliquis amanuensis qui, Te dirigente, figuras elegantius et majore cum gratia delineare poterit, ita ut ad mentem meam respondeant.

Ceterum si videro, primam hanc partem hydraulicae meae exercitationis Tibi non displicuisse, transmittam protinus alteram partem, quam interea temporis, dum responsio Tua ad me venerit, absolvam, ut ad mittendum sit parata. Deprehendes, illam adhuc magis esse curiosam, dum ita modifico theoriam meam, ut fere opus non sit idea gurgitis, quem sub alia notione involvo; unde nascitur novum principium hydraulicum, a nemine antea animadversum, cujus auxilio statim pervenio ad motum aquae determinandum fluentis per vasa vel canales, non tantum ex tubis cylindricis conflatos, sed quamcunque figuram, etiam irregularem habentes, aliaque explico phaenomena jucunda et utilia, quae in Physicis quoque suum usum habebunt.

Tres quatuorve illae lineae, quas delevisti in litteris tuis, potuissent sine ulla consequentia indeletae manere[1]) . . . .

Vides, Vir Celeb., post tot scriptorum expeditionem parum temporis mihi superesse ad excutienda pro merito singula epistolae Tuae capita; attingam tamen tumultuarie quantum permittit mentis distractio, oculorum hebetudo, atque imprimis manuum lassitudo et tremor. Quod in conventu Vestro praelegeris solutionem meam succinctam problematis de motu corporum in orbitis mobilibus[2]), gratias ago, quamvis eam non scripserim ut publice proponeretur, alias majori eam cura elaborassem atque extendissem magis. Dabitur forsan occasio alia vice communicandi quae mihi sunt meditata alia circa hanc materiam, et praesertim quae mihi subnata sunt ex lectione NEWTONianorum non semper recte se habentium.

Gratum erit accipere tomos, quos promittis, Commentariorum, qui post quartum mihi desunt.

In Musicis non valde sum exercitatus, neque hujus scientiae fundamenta satis mihi sunt perspecta, ut de inventis Tuis judicare queam. Videntur sane egregiae, quae in litteris Tuis obiter tantum attingis; sed

1) Im Konzepte sind hier 13 Zeilen gestrichen (möglicherweise von JOHANN II BERNOULLI), und darauf folgen die Worte: „eum sine mora ad Tuas manus curatum iri“. Bei Fuss fehlt alles was im Briefe nach „habebunt“ und vor „Vides“ stand.

2) *Compendium analyseos pro inventione vis centralis in orbibus mobilibus planetarum;* Comment. acad. sc. Petrop. **10**, 1738 (gedruckt 1747), S. 95—101.

cum videro ipsum tractatum Tuum, quam de harmoniae principiis edere statuisti, spero fore ut exinde lux clarior mihi affulgeat ad inventorum Tuorum praestantiam penitius introspiciendam.

Eandem ob causam nolo nunc diutius inhaerere iis, quae hactenus inter nos agitata sunt de situ et motu corporum aquae innatantium, antequam visus mihi sit Tuus hac de re tractatulus, quem ad finem perductum esse ais. Interim bene est quod nunc agnoscas veritatem nonnullorum, quae monueram tam de situ obliquo coni et conoidis parabolici, quam de modo multiplicandi corporis particulas per quadrata distantiarum, non a centro ejus gravitatis, sed ab axe horizontali, per centrum transeunte, circa quem fiunt oscillationes. Corpus aliquod tribus utique modis in quiete vel aequilibrio conservatur: 1°) Si corpus duabus viribus aequalibus sed oppositis et ad se invicem tendentibus sollicitatur, fiet aequilibrium, quod olim in alia occasione vocavi *coactum*, idque est quod nunc vocas *firmum*. 2°) Quodsi vires illae duae aequales et oppositae a se invicem tendunt, hoc est, quae corpus non premunt, sed trahere conantur, fiet iterum aequilibrium, quod a Te vocatur *infirmum*, mihi vero pro scopo, quem olim tunc habueram, illud aequilibrium iterum vocabatur *coactum*. 3°) Si nullis omnino viribus oppositis corpus sollicitatur, nec premendo ad se invicem nec trahendo a se invicem, erit utique aequilibrium, quod a me dicebatur *otiosum*, ideo quia, si tale corpus a causa aliqua externa ex situ suo tantisper disturbatur, non amplius affectabit ad pristinum suum situm redire. Sic ex. gr. corpus sphaericum et homogeneum aquae insidens ac quiescens, si nonnihil circa centrum suum rotetur, manebit in hoc novo situ et non repetet priorem. Patet autem tale aequilibrium nec firmum esse nec infirmum, quodque ideo commode vocavi *otiosum*, quia est quasi in statu indifferentiae. Utrum vero corpus aquae insidens et quiescens sit in aequilibrio firmo vel infirmo, ex hoc utique cognoscitur, si nimirum nonnihil ex situ aequilibrii inclinetur, et ita quidem ut pars immersa idem semper volumen in aqua occupet, tunc centrum gravitatis corporis vel ascendisse in recta verticali, vel descendisse observabitur; si prius, concludendum erit corpus esse in aequilibrio firmo; si posterius, erit aequilibrium infirmum; si neque ascendit neque descendit, erit in statu neutro, seu indifferentiae, quod, ut dixi, mihi vocatur aequilibrium otiosum. In casu firmitatis attendendum est, quantum ex assumta inclinatione centrum gravitatis ascendat, tum enim ex utriusque collatione calculari potest lex accelerationis oscillationum corporis, atque inde determinari longitudo penduli isochroni. Sufficit theoriam ac fundamentum detexisse, calculum instituere non vacat tot aliis laboribus et negotiis distracto. De caetero gratissimum mihi fuit intelligere, quod ad admirationem usque Tibi placuerint, quae scripsi de oscillationibus verticalibus, propter simplicitatem expressionis et insignem usum quem praestare possunt in explorandis navium ponderibus; maluissem autem ut ipse quoque calculum fecisses ex Tuo ingenio, quo mihi patuisset, annon erraverim in ratiocinando, nam ingenue fateor, me Tuis luminibus plus fidere quam meis.

Quae nunc uberius affers, Vir Exc., de isoperimetricis, credo equidem, Te omnia probe ruminasse atque ad veritatis trutinam expendisse, ita ut vix quicquam restet, quod acerrimam Tuam sagacitatem subterfugere potuerit; ad me quod attinet, diu adeo est quod haec seposui, ut mihi ea plane non amplius sint praesentia, quare ab his desisto.

Lectu jucundissimum fuit, quod addis in fine litterarum Tuarum de proprietate Tibi observata circa elasticam rectangulam (vel etiam linteariam, ambae enim eandem faciunt curvam) in qua si abscissa ponatur x, est applicata $= \int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}}$ et longitudo curvae $= \int \frac{aa\,dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}}$, quas expressiones ita comparatas dicis ut inter se comparari nequeant. At invenisti si abscissa ponatur $= a$, rectangulum sub applicata et arcu comprehensum aequale esse areae circuli, cujus diameter sit abscissa $= a$. Est utique haec observatio notatu dignissima, *sed vellem scire*, an hanc proprietatem a priori et de industria quaesiveris et inveneris, aut an illam, ut saepe accidere solet, aliud quaerendo detexeris per casum fortuitum. Ego jam olim observavi circa has lineas duas aliquam proprietatem non minus elegantem, etsi inventu faciliorem, quae in hoc consistit, quod earum, non quidem rectangulum, sed summa sit aequalis quadranti circumferentiae ellipseos, cujus axis minor $= 2a$ et axis major $= 2a\sqrt{2}$. Vid. Act. Lips. 1694. m. Octob.[1]) Hoc autem valet non tantum de tota curva, cujus abscissa $x = a$ ejusque applicata maxima, sed indefinite de quibuscunque partibus earum ad se invicem spectantibus, quarum utique summa semper aequalis est arcui elliptico, qui pro abscissa habet x in axe minori a centro sumtam, a cujus arcus longitudine etiam dependere demonstravi loco citato dimensionem arcus lemniscatae curvae, quam adhibui ad construendam isochronam paracentricam LEIBNITII, quae tum temporis multum rumoris excitaverat.[2]) Quando autem affirmas applicatam $\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}}$ et longitudinem curvae $\int \frac{aa\,dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}}$ ita esse comparatas, ut inter se comparari

1) Siehe JOHANN BERNOULLI, *Constructio facilis curvae recessus aequabilis a puncto dato per rectificationem curvae algebraicae*; Acta Eruditorum 1694, S. 394—399 [= *Opera omnia*, t. I S. 119—122].

2) Über die Geschichte der paracentrischen Isochrone siehe LORIA, *Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte* (Leipzig 1902), S. 585.

nequeant, nescio an hoc intellectum velis generaliter et sine ulla exceptione; an vero non putes posse quidem comparari pro aliqua x determinatae longitudinis, sed non indefinite pro singulis x, sicuti revera datur aliqua hujusmodi expressio, nempe haec: $\int \frac{x^4\,dx}{aa\sqrt{(a^4 - x^4)}}$, quam in casu $x = a$ inveni[1]) aequalem esse trienti curvae totius, adeo ut habeatur

$$\int \frac{aa\,dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}} = 3\int \frac{x^4\,dx}{aa\sqrt{(a^4 - x^4)}}.$$

Optarim ut ad hoc investigandum aliquid temporis colloces, siquidem non minus notatu dignum videtur, quod Tuum illud alterum:

$$\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}} \cdot \int \frac{aa\,dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}} = \text{circulo}.$$

Quod supra in hac pagina scripsi his verbis: *sed vellem scire* etc., id nunc didici ex litteris Tuis ad filium Danielem datis,[2]) quas mihi legendas exhibuit, postquam totam meam epistolam hucusque jam absolvissem.

Curiosa sunt theoremata in illis Tuis litteris contenta: ego jam olim similia inveni, sed mea magis geometrica sunt, ex consideratione curvarum deducta, Tua vero analytica magis, ope calculorum eruta. Combinando haec nostra in corpus commune, poterimus doctrinam de curvis inter se comparandis mirum quantum augere.

Quod denique doleas frequens damnum ex tot iteratis decoctionibus mercatorum mihi illatum, facis quidem, quod Christiana inculcat charitas, idque mihi solaminis loco erit, sed cum cogito, me hic Basileae esse, ubi perpetuis vexationibus fortunae obnoxius sum, ubi omni mea scientia vix minimam jacturae partem reparare possim, dum alibi honoribus et bonorum copia abundare potuissem, parum abest, quin tandem animum despondeam atque scientiarum culturae, quoad vixero, valedicam.

Valeas vero et Tu, Vir Excell., diutissime, mihique favere perge. Dabam Basileae a. d. 7. Mart. 1739.

20.

Euler an Bernoulli 5. Mai 1739.

Antwort auf Bernoullis Brief vom 7. März 1739. Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm.

Inhalt. Johann Bernoullis *Dissertatio hydraulica.* — Ausströmung von Flüssigkeiten aus Gefäßen von beliebiger Form. — Vertikale Schwingungen schwimmender Körper. — Eigenschaften der elastischen Kurve und Reduktionsformeln für Integrale

1) Den Beweis dieses Satzes hat Johann Bernoulli später im 4. Bande seiner *Opera omnia* (S. 90) angegeben.

2) Der fragliche Brief von Euler an Daniel Bernoulli ist vom 23. Dezember 1738 (vgl. Fuss, a. a. O. II, S. 458).

von der Form $\int x^m (a^n - x^n)^r dx$. — Eine lineare Differentialgleichung 3. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. — Ein Problem aus der Theorie der Ebbe und Flut, dessen Lösung die Integration einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung erfordert.

Viro Celeberrimo atque Excellentissimo JOHANNI BERNOULLI S. P. D.
LEONHARDUS EULER.

Quantam attentionem atque adeo admirationem excitaverint profundissime Tuae de fluxu aquarum meditationes non solum apud me, sed etiam universam Academiam, litteris vix satis exprimere possum. Quod quidem ad me attinet, sic judico, Te, Vir Excellentissime, hanc rem ita expedivisse, quemadmodum ego non solum optavi, sed etiam jam dudum ipse efficere, etsi irrito conatu, sum annisus. Nunc autem plurimum lucis hac in re mihi es foeneratus, cum antea haec materia ingenti caligine mihi esset obducta, neque quicquam nisi indirecta methodo definire licuisset: quam ob causam Tibi me eo magis obstrictum agnosco. Interim alteram meditationum Tuarum partem magna impatientia expectamus, ex qua mihi persuadeo non minus me esse profecturum, quam ex parte priore. Quanquam autem theoriam Tuam in his schedis tantum ad casus speciales accommodasti, uberioremque explicationem in sequente dissertatione nobiscum communicanda promittis, operam tamen dedi, ut ipse hanc theoriam Tuam ad vasa cujuscunque figurae extenderem, qua in re si intentum scopum fuero assecutus, id quidem Tibi Ipse tribuas, Vir Celeb., sin secus, summo desiderio ab Te corrigi cupio.

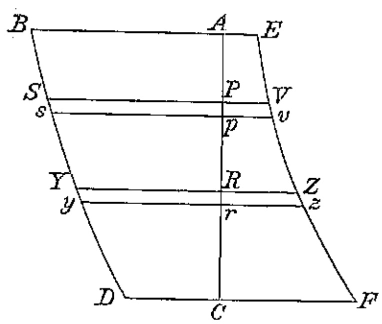

Fig. 1.

Sit igitur [Fig. 1] vas cujuscunque figurae $ABDC$, initio, quo aqua per foramen CD effluere incipit, usque ad AB aqua repletum, cujus altitudo AC sit $= a$, et foraminis CD amplitudo $= n$. Ponamus aquam jam usque in PS subsedisse hocque tempore aquam per foramen CD effluere celeritate altitudini z debita, minimo autem tempusculo subsidere superficiem PS per spatiolum Pp; sitque $Pp = dp$ atque amplitudo vasis $PS = s$, denotabit $z + dz$ altitudinem celeritati aquae effluentis debitam, cum suprema aquae superficies usque in ps subsedit. Ut nunc mutatio motus hoc tempusculo genita innotescat, concipiatur superficies quaecunque aquae RY, ponaturque $AR = r$, et amplitudo $RY = y$; erit celeritas hujus strati RY debita altitudini $\frac{nnz}{yy}$; et quia tempusculo infinite parvo superficies RY descendit in ry, erit tum ejus celeritas debita altitudini

$$\frac{nnz}{yy} + \frac{nndz}{yy} - \frac{2\,nnzdy}{y^3}.$$

Est autem, quia eodem tempusculo suprema superficies PS per Pp descendere ponitur

$$s\,dp = y\,dr.$$

Cum igitur superficies RY descendendo per altitudinem $Rr = dr$ ita acceleretur, ut altitudo ipsius celeritati debita augmentum capiat

$$= \frac{nn\,dz}{yy} - \frac{2\,nnz\,dy}{y^3},$$

hoc augmentum per spatium percursum dr divisum dabit vim acceleratricem

$$= \frac{nn\,dz}{yy\,dr} - \frac{2\,nnz\,dy}{y^3\,dr};$$

quae per massam strati $RYyr = y\,dr$ multiplicata praebet vim motricem hujus strati

$$= \frac{nn\,dz}{y} - \frac{2\,nnz\,dy}{yy}.$$

Transferatur haec vis motrix ad datam amplitudinem m, prodibit ea

$$= mn^2\left(\frac{dz}{yy} - \frac{2\,z\,dy}{y^3}\right) = mn^2\left(\frac{dz}{y}\cdot\frac{dr}{s\,dp} - \frac{2\,z\,dy}{y^3}\right)$$

$$\text{ob } \frac{1}{y} = \frac{dr}{s\,dp},$$

quam substitutionem eo facio, quo differentialia dr et dy ingrediantur, quae a variabilitate sectionis RY pendent. Totius igitur vis motricis elementum erit

$$= mn^2\left(\frac{dz}{s\,dp}\cdot\frac{dr}{y} - \frac{2\,z\,dy}{y^3}\right),$$

cujus integrale ita est capiendum, ut tantum quantitates r et y tanquam variabiles spectentur Integrale ergo

$$mn^2\left(\frac{dz}{s\,dp}\int\frac{dr}{y} + \frac{z}{yy} - \frac{z}{ss}\right)$$

exprimet vim motricem pro volumine aquae $SPRY$, ac posito $y = n$ habebitur vis motrix totalis aquam urgens ad amplitudinem m relata. Construatur in hunc finem nova curva $EVZF$, in qua sit $ZR = \frac{1}{y}$; exprimetque $\int\frac{dr}{y}$ aream hujus curvae $PCFV$, ponatur haec area $PCFV = R$, eritque vis motrix totalis

$$= mn^2\left(\frac{dz}{s\,dp}R + \frac{z}{nn} - \frac{z}{ss}\right),$$

quae vi motrici actuali seu cylindro aqueo altitudinis CP et basis $= m$ aequalis poni debet. Sit itaque altitudo $CP = x$, erit $Pp = dp = -\,dx$, atque cum R sit area $CPVF$, erit per coordinatas x et s; $R=\int\frac{dx}{s}$, hoc integrali ita capto ut evanescat posito $x=0$. Posito ergo $-dx$ loco dp, ob vim motricem actualem $=mx$ habebitur haec aequatio

$$-\frac{n^2Rdz}{sdx}+z-\frac{n^2z}{ss}=x,$$

sive

$$dz+z\left(\frac{dx}{Rs}-\frac{sdx}{n^2R}\right)=-\frac{sxdx}{n^2R}.$$

Ad quam aequationem integrandam sumo integrale quantitatis $\frac{dx}{Rs}-\frac{sdx}{n^2R}$, per quam z est affecta, quod ob $dR=\frac{dx}{s}$ est $1R-\int\frac{sdx}{n^2R}$: positoque

$$\int\frac{sdx}{n^2R}=1S,$$

erit id integrale $1\frac{R}{S}$, numerusque huic logarithmo respondens $=\frac{R}{S}$: quae quantitas aequationem illam, si multiplicetur, integrabilem reddit, proditque

$$\frac{Rz}{S}=C-\int\frac{sxdx}{n^2S}$$

et

$$z=\frac{CS}{R}-\frac{S}{R}\int\frac{sxdx}{n^2S}$$

ubi quantitatem constantem C eo determinari oportet, quo fiat $z=0$, posito $x=a$. Exemplo veritas sese manifestabit; si ponamus vas cylindricum amplitudinis m, quod in fundo habeat foramen $=n$; erit $s=m$; et $R=\int\frac{dx}{s}=\frac{x}{m}$; $1S=\int\frac{sdx}{n^2R}=\int\frac{m^2dx}{n^2x}=\frac{m^2}{n^2}1x$;
unde fit

$$S=x^{\frac{m^2}{n^2}},$$

atque

$$\frac{z}{mx^{\frac{mm-nn}{nn}}}=C-\frac{m}{nn}\int x^{\frac{-mm+nn}{nn}}dx=\frac{m}{m^2-2n^2}\left(x^{\frac{-mm+2nn}{nn}}-a^{\frac{-m^2+2n^2}{nn}}\right),$$

quae tandem praebet

$$z=\frac{mmx}{mm-2nn}\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mm-2nn}{nn}}\right).$$

Ad hanc igitur aequationem sine gurgitis consideratione est perventum, quippe cujus ratio in integratione, ubi amplitudo foraminis n est inducta, jam fuit habita; id quod Ipse innuis, Vir Celeb., quando dicis, si res generaliter consideretur, gurgite nequidem opus esse.

Determinatio oscillationum verticalium, quae in corpora aquae innatantia cadere possunt, cum ob ipsam questionem tum etiam simplicitatem solutionis mihi tantopere placuit, ipsa vero solutio non solum mihi non

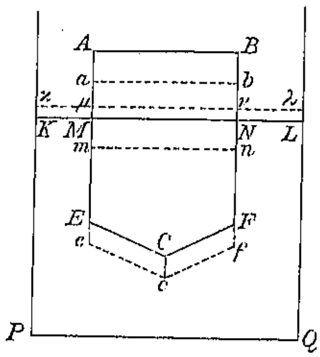

Fig. 2.

difficilis visa est, sed ex tempore calculus, quem institui, statim convenientiam declaravit. Quoniam autem cupis, Vir Excellentissime, meam solutionem videre, ea ita se habet.

Insidat aquae corpus quodcunque [Fig. 2] $AECFB$ in aequilibrio, quod circa sectionem aquae MN saltem sit cylindricum, ita ut inter oscillandum aequalis semper sectio in superficie aquae versetur. Sit pondus hujus corporis $= M$; sectio horizontalis MN in superficie aquae facta $= n$, et volumen partis submersae $= V$: unde pressio aquae in partem submersam exorta erit $= M$. Jam ponatur aqua in vase finitae amplitudinis contineri sitque amplitudo vasis $KL = m$; ac demergatur corpus profundius per altitudinem $Aa = Cc = x$, ascendetque aqua in vase per intervallum $M\mu = N\nu$, ita ut sit $(m-n)\,M\mu = nx$, seu $M\mu = \frac{nx}{m-n}$. Volumen ergo, quod nunc aquae est submersum erit

$$= V + n\left(x + \frac{nx}{m-n}\right) = V + \frac{mnx}{m-n},$$

unde vis aquae sursum urgens erit

$$= \frac{M}{V}\left(V + \frac{mnx}{m-n}\right);$$

vi gravitatis autem deorsum nititur pondere M, quare sursum sollicitabitur vi

$$= \frac{mnMx}{(m-n)\,V},$$

quae vis quia est proportionalis spatio x quo corpus descendit, indicat oscillationes fore isochronas. Quocirca si ponatur longitudo penduli simplicis isochroni $= L$, oritur vis ad situm aequilibrii urgens $= \frac{Mx}{L}$, unde resultat ista aequatio

$$\frac{mn}{(m-n)V} = \frac{1}{L},$$

seu

$$L = \frac{(m-n)V}{mn} = V\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right).$$

Ac si amplitudo vasis $KL = m$ infinita statuatur, erit longitudo penduli isochroni $L = \frac{V}{n}$: omnino uti Tu invenisti, Vir Celeberrime.

Ceterum Tibi placuisse, Vir Excellentissime, theoremata mea de reductione quarundam formularum integralium magnopere gaudeo, etiamsi methodo non satis directa ad ea pervenerim; tamen methodus ita est comparata, ut ejusmodi theoremata inde secutura esse praeviderim. Interim eo majori attentione digna mihi ea videntur, quo minus via directa ad ea vel demonstranda vel invenienda patet: hocque ipso magnopere discrepant a theorematis in se quidem elegantissimis, quorum mentionem facis, scilicet esse

$$\int\frac{a^2dx}{\sqrt{(a^4-x^4)}}+\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(a^4-x^4)}}$$

casu quo $x=a$ quadrantem circumferentiae ellipseos, cujus axis minor est $2a$, et major $=2a\sqrt{2}$; item esse eodem casu

$$\int\frac{a^2dx}{\sqrt{(a^4-x^4)}}=3\int\frac{x^4dx}{a^2\sqrt{(a^4-x^4)}},$$

quorum quidem theorematum veritas, statim ac investigatur sponte se prodit. Quando autem scripsi formulas

$$\int\frac{a^2dx}{\sqrt{(a^4-x^4)}}\ \text{et}\ \int\frac{x^2dx}{\sqrt{(a^4-x^4)}}$$

ita esse comparatas, ut inter se comparari nequeant, id utique latissimo sensu intellectum volo, neque methodis consuetis relationem ullam definiri posse assero. Hocque pacto has formulas discernere volui ab aliis, quae inter se comparari possunt, cujusmodi sunt

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(a^4-x^4)}};\ \int\frac{x^4dx}{\sqrt{(a^4-x^4)}};\ \int\frac{x^8dx}{\sqrt{(a^4-x^4)}};\ \text{etc.}$$

quarum si unius integratio esset data, simul reliquarum omnium integrationes haberentur. Circa hujusmodi comparationes mihi jam pridem ipse aliqua theoremata formavi, ex quibus statim perspicere possum utrum unius formulae integratio ad integrationem alius cujusdam reduci queat necne. Theoremata vero ipsa ita se habent; generaliter quidem sine ulla ad definitum quendam ipsius x valorem restrictione[1]).

$$\text{I.}\quad \int x^{m-n}dx\,(a^n-x^n)^k$$
$$=\frac{x^{m-n+1}(a^n-x^n)^{k+1}}{(m-n+1)\,a^n}+\frac{m+nk+1}{(m-n+1)\,a^n}\int x^m\,dx\,(a^n-x^n)^k$$

$$\text{II.}\quad \int x^{m+n}\,dx\,(a^n-x^n)^k$$
$$=-\frac{x^{m+1}(a^n-x^n)^{k+1}}{m+nk+n+1}+\frac{(m+1)\,a^n}{m+nk+n+1}\int x^m\,dx\,(a^n-x^n)^k$$

1) So viel ich weiß, rührt diese übersichtliche Zusammenstellung der 6 Reduktionsformeln von EULER her. Selbstverständlich enthält sie kein wesentlich Neues, denn schon NEWTON hatte sich mit ähnlichen Untersuchungen beschäftigt; übrigens können vier der Gleichungen durch einfache algebraische Transformationen aus den zwei übrigen erhalten werden, und diese zwei (Gl. II und V) hatte NIKOLAUS I BERNOULLI schon 1720 benutzt, um einen von JOHANN BERNOULLI aufgestellten Satz zu beweisen (siehe JOHANN BERNOULLI, *Opera omnia*, t. II S. 418, 419—422).

$$\text{III.}\quad \int x^{m-n}\,dx\,(a^n - x^n)^{k+1}$$
$$= \frac{x^{m-n+1}(a^n - x^n)^{k+1}}{m-n+1} + \frac{nk+n}{m-n+1}\int x^m\,dx\,(a^n - x^n)^k$$

$$\text{IV.}\quad \int x^{m+n}\,dx\,(a^n - x^n)^{k-1}$$
$$= -\frac{x^{m+1}(a^n - x^n)^k}{nk} + \frac{m+1}{nk}\int x^m\,dx\,(a^n - x^n)^k$$

$$\text{V.}\quad \int x^m\,dx\,(a^n - x^n)^{k+1}$$
$$= \frac{x^{m+1}(a^n - x^n)^{k+1}}{m+nk+n+1} + \frac{(nk+n)\,a^n}{m+nk+n+1}\int x^m\,dx\,(a^n - x^n)^k$$

$$\text{VI.}\quad \int x^m\,dx\,(a^n - x^n)^{k-1}$$
$$= -\frac{x^{m+1}(a^n - x^n)^k}{nka^n} + \frac{m+nk+1}{nka^n}\int x^m\,dx\,(a^n - x^n)^k.$$

Horum theorematum primum statim, ponendo $n = 4$; $m = 4$; $k = -\frac{1}{2}$ prebet

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}} = \frac{x\sqrt{(a^4 - x^4)}}{a^4} + \frac{3}{a^4}\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}},$$

unde casu quo $x = a$ erit

$$\int\frac{a^4\,dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}} = 3\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}}.$$

Simul autem intelligitur ex his formulis cujusmodi formulae integrales generaliter cum ista $\int\frac{a^2\,dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}}$ comparari queant, mox autem patebit inter illas non contineri istam $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}}$, ex quo eo magis notatu dignum est productum harum duarum formularum casu quo $x = a$ ope circuli indicari posse, cum neutrius in se spectatae integratio a quadratura circuli pendeat, neque inter se comparari queant.

Methodus autem qua ego in inventione horum novorum theorematum sum usus, huc redit. Resolvi utramque formulam seorsim in expressiones infinitas, quas deinceps in se invicem multiplicavi, ac producti summam peculiari modo investigavi,[1]) quam per circulum exprimi posse deprehendi.

1) Die Methode, worauf Euler hier hindeutet, ist wohl die, welche er in seiner Abhandlung *De productis ex infinitis factoribus ortis* (Comment. acad. sc. Petrop. 11, 1739 [gedruckt 1750], S. 3—31) anwendete (siehe speziell S. 11—12).

Deinde vero hanc methodum magis extendi, ejusque ope reliqua Theoremata Filio Tuo Celeb. missa elicui.[1])

Incidi nuper in hanc aequationem differentialem tertii ordinis

$$a^3 d^3 y = y\,dx^3,$$

posito dx constante, quae etiamsi prima fronte integratu difficilis visa esset, triplicem tamen integrationem admittebat, ac concessis circuli et hyperbolae quadraturis ad aequationem finitam se reduci patiebatur;[2]) aequatio vero integralis haec prodiit

$$y = b e^{\frac{x}{a}} + c e^{-\frac{x}{2a}} \,\text{sinū Arcus.}\, \frac{(f+x)\sqrt{3}}{2a},$$

denotante e numerum, cujus logarithmus est $= 1$, seu

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.};$$

arcus vero $\frac{(f+x)\sqrt{3}}{2a}$ in circulo cujus radius $= 1$ abscindi, ejusque sinus in alterum integralis terminum introduci debet; at b, c et f sunt quantitates constantes arbitrariae ex tribus integrationibus ortae. Quodsi autem integratio aequationis istius alio modo tentetur, prouti pluribus modis absolvi potest, pervenitur tandem ad hujusmodi aequationem

$$v\,dv + dv\,(az^2 + bz + c) = v\,dz\,(az + f),$$

quae ergo necessario separationem variabilium atque constructionem ope circuli et hyperbolae admittere debet: quo autem pacto separatio obtineatur, id quidem non adeo obvium videtur, methodo tamen quadam ab HERMANNO quondam in Comm. Tom. II. exposita[3]) absolvi potest; id quod fit ponendo $dv = p\,dz$ atque eliminando v.

Tractavi quoque nuper circa fluxum ac refluxum maris occupatus[4])

---

1) Vgl. den Brief von DANIEL BERNOULLI an EULER vom 12. Dezember 1742 (FUSS, a. a. O. II, S. 514).

2) Auf diesen Passus hätte ich eigentlich in meinem Artikel *Sur la découverte de l'intégrale complète des équations différentielles linéaires à coefficients constants* (Biblioth. Mathem. 1897, S. 43—50) hinweisen sollen, denn daraus scheint hervorzugehen, daß EULER seine allgemeine Integrationsmethode für unvollständige lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten nach dem 5. Mai 1739 erfand.

3) J. HERMANN, *De constructione aequationum differentialium primi gradus per viam separationis indeterminatarum;* Comment. acad. sc. Petrop. 2, 1727 (gedruckt 1729), S. 188—199.

4) Siehe die Preisschrift von EULER, *Inquisitio physica in causam fluxus et refluxus maris*; Pièces qui ont remporté le prix de l'académie royale des sciences en M. DCC. XL. sur le flux et reflux de la mer (Paris 1741), S. 235—350.

sequens problema mechanicum, quo singularis oscillationum casus continetur.[1]) In recta AB [Fig. 3] extat corpus C mobile sursum et deorsum quod a duobus viribus sollicitatur. Altera harum virium pendet a distantia

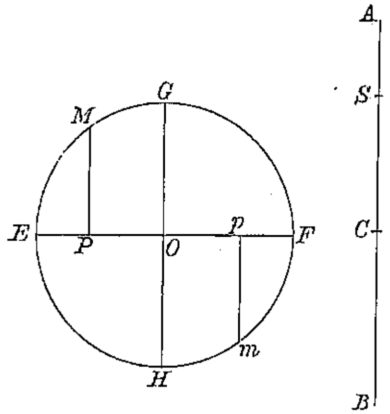

Fig. 3.

corporis C a puncto C, ipsisque distantiis est proportionalis; a qua corpus continuo versus punctum C, nisi ibi existat, sollicitatur. Quod si igitur corpus a sola hac vi moveretur tum circa punctam C oscillationes modo ascendendo modo descendendo perageret tautochronas itaque haberetur casus oscillationum isochronarum Hugenianum notissimus. Pono autem corpus praeter hanc vim urgeri ab alia cujus tam directio quam quantitas a tempore jam effluxo pendeat. Tempora scilicet per arcus circuli $EMGFmH$ exprimo, viresque sollicitantes sinibus arcuum tempora exprimentium proportionales facio; ita ut corpus sursum sollicitetur, si sinus fuerint affirmativi, deorsum vero, si sinus sint negativi. Sic si temporis initium ponatur in E, post tempus EM corpus sursum pelletur vi, quae est ut sinus PM; hocque pacto sursum ab ista vi urgebitur quoad tempus EGF durat; cum autem praeterlabitur majus tempus, puta $EGFm$, tum corpus deorsum sollicitabitur vi, quae erit ut sinus pm, haecque sollicitatio deorsum tendens durabit, donec tempus recidat in punctum E, ex quo sollicitationes sursum directae redibunt. Questio igitur huc redit, ut motus corporis C ab his duabus viribus sollicitati definiatur, ejusque locus in recta AB ad quodvis tempus assignetur. Ponamus tempus jam effluxisse, quod arcu EM indicetur, tumque corpus in puncto S versari. Sit distantia $CS = s$, arcus seu tempus $EM = t$, ejus sinus $PM = y$, posito radio circuli $OE = 1$, ita ut sit

$$t = \int \frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}};$$

ex his solutio problematis perducitur ad hanc aequationem

$$a^2 dds + s dt^2 = b y dt^2$$

sumto elemento dt constante. Ista autem aequatio differentio-differentialis

1) Siehe die Abhandlung von Euler *De novo genere oscillationum;* Comment. acad. sc. Petrop. 11, 1739 (gedruckt 1750), S. 128—149.

praeter opinionem bis se integrari passa est,[1]) atque ex aequatione integrali situm corporis C ad quodvis tempus una cum ipsius celeritate definire potui. Prodierunt autem pro varia relatione litterarum a et b, a quibus ambae vires sollicitantes pendent, tam diversi ac mirabiles motus, ut eorum indoles nisi calculo peracto praevideri omnino nequeat. Circa hunc motum id notatu dignum accidit, unico casu spatia per quae corpus C in recta AB excurrit perpetuo crescere, oscillationes tamen ejusdem durationis manere: reliquis autem casibus omnibus excursiones esse finitae ac definitae magnitudinis.

Ceterum denuo veniam peto ob lineas illas in superioribus litteris deletas,[2]) hancque ob causam integram epistolam libenter transcripsissem, si id tempus permisisset. Interim noli suspicari, Vir Excellentissime, illas lineas eo fuisse deletas,[3]) .... Hunc itaque ne idem mihi usu eveniat, ...[4])

Quod superest Tuo me favori ac benevolentiae commendo, Tibi omnia fausta et felicia ex animo apprecaris. Vale, Vir Excellentissime, atque adhuc diutissime rei litterariae praeesse ne graveris.

Dabam Petropoli d. 5. Maji
1739.

Aufschrift:

A Monsieur
Monsieur JEAN BERNOULLI
Professeur en Mathematiques, et Membre Honoraire des Academies de St. Petersburg, de celles de Paris, de Londres etc.
à
Bâle.

20*.

Bernoulli an Euler August (?) 1739.

Verloren; zitiert in EULERS Brief vom 15. September 1739 („tardius ad litteras tuas postremas respondeo, quam quidem optassem").

21.

Euler an Bernoulli 15. September 1739.

Antwort auf BERNOULLIS verlorenen Brief vom August (?) 1739. Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. Auszüge veröffentlicht von ENESTRÖM in der Biblioth. Mathem. 1897, S. 43—44.

---

1) Hier beschäftigt sich EULER also mit einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten von der Form

$$a^2 \frac{d^2 s}{dt^2} + s = b \sin t.$$

EULERS Methode zur Integration dieser Gleichung ist auseinandergesetzt in seiner oben zitierten Preisschrift S. 300—304 und in der vielleicht früher redigierten aber später erschienenen Abhandlung: *De novo genere oscillationum* (vgl. S. 32 Anm. 1), S. 134—141.

2) Vgl. Biblioth. Mathem. 5, 1904, S. 285 Anm. 1.

3) Hier sind zwei Zeilen gestrichen, vielleicht von JOHANN II BERNOULLI.

4) Hier sind zwölf Zeilen gestrichen, ohne Zweifel im Zusammenhang mit der soeben erwähnten Streichung.

Inhalt. Die in Aussicht gestellte zweite Abteilung von Johann Bernoullis *Dissertatio hydraulica.* — Fertigstellung neuer Teile der Commentarii der Petersburger Akademie. — Eulers Methode, die Reihe

$$\frac{1}{1 \pm n} + \frac{1}{4 \pm n} + \frac{1}{9 \pm n} + \frac{1}{16 \pm n} + \cdots$$

zu summieren. — Integration der unvollständigen linearen Differentialgleichungen n ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Viro Celeberrimo atque Excellentissimo Joanni Bernoulli S. P. D. Leonhardus Euler.

Tardius ad litteras Tuas postremas, Vir Excellentissime, respondeo, quam equidem optassem atque officium meum ergo Te summum postulasset: cujus morae causa in absentia Illustrissimi Praesidis Nostri, qui cum Aula Imperatoria Peterhofii commorabatur, est posita ....[1])

Ego interea summo studio expecto alteram partem meditationum Tuarum hydraulicarum, quarum desiderium apud me eo majus existit, quod multo plura, quam ego quidem suspicatus eram, in iis praestitisse nuncias; quamobrem Te, Vir Celeb., academiae nomine maximopere rogo, ut hoc scriptum, quamprimum licuerit, nobiscum communicare velis; neque ab hoc proposito retardatione editionis Commentariorum nostrorum deterreare. Nam nunc quidem sex tomi priores jam prodierunt, et septimus non solum sub prelo sudat, sed etiam brevi temporis spatio usque ad decimum publice comparebunt; preterea ego etiam operam dabo, ut scripta Tua eximia his ipsis Tomis, qui nunc parantur, commode inseri queant. Ceterum Tomos, qui Tibi adhuc desunt, Lipsiae accipies, una cum Tractatu meo de *Musica*, quem ut benevole accipere ac perlegere velis, vehementer etiam atque etiam rogo.

Perscripsi nuper Filio Tuo Clar. summationem meam hujus seriei:

$$\frac{1}{1 \pm n} + \frac{1}{4 \pm n} + \frac{1}{9 \pm n} + \frac{1}{16 \pm n} + \frac{1}{25 \pm n} + \text{etc.} = s;$$

cujus seriei casum, quo $n = 0$ jam pridem inveneram, Tecumque, Vir Celeberrime, communicaveram,[2]) quem etiam patruelis Tuus, Vir Consultissimus Nicolaus Bernoulli, examini subjicere est dignatus.[3]) Methodus, qua ad summam hujus seriei perveni, quia mihi quidem peculiaris videtur, Tibi fortasse, Vir Celeberime, haud erit ingrata: ea autem ita se habet. Posita summa seriei quam quaero $= s$, singulos terminos modo consueto in series geometricas converto; ipsi n vero valorem affirmativum tribuo,

1) Hier sind dreizehn Zeilen gestrichen, möglicherweise von Johann II Bernoulli.

2) Vgl. den Brief von Johann Bernoulli an Euler vom 2. April 1737 (Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 253).

3) Vgl. Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 276.

quia si hoc casu summa fuerit reperta, alter casus se sponte offert ponendo n negativum. Sit igitur

$$s = \frac{1}{1+n} + \frac{1}{4+n} + \frac{1}{9+n} + \frac{1}{16+n} + \frac{1}{25+n} + \text{etc.}$$

erit

$$\begin{aligned} s = {} & \frac{1}{1} - \frac{n}{1} + \frac{n^2}{1} - \frac{n^3}{1} + \frac{n^4}{1} - \frac{n^5}{1} + \text{etc.} \\ & + \frac{1}{2^2} - \frac{n}{2^4} + \frac{n^2}{2^6} - \frac{n^3}{2^8} + \frac{n^4}{2^{10}} - \frac{n^5}{2^{12}} + \text{etc.} \\ & + \frac{1}{3^2} - \frac{n}{3^4} + \frac{n^2}{3^6} - \frac{n^3}{3^8} + \frac{n^4}{3^{10}} - \frac{n^5}{3^{12}} + \text{etc.} \\ & + \frac{1}{4^2} - \frac{n}{4^4} + \frac{n^2}{4^6} - \frac{n^3}{4^8} + \frac{n^4}{4^{10}} - \frac{n^5}{4^{12}} + \text{etc.} \\ & \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

sive

$$\begin{aligned} s = {} & 1\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \text{etc.}\right) \\ & - n\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \text{etc.}\right) \\ & + n^2\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{6^6} + \text{etc.}\right) \\ & - n^3\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{6^8} + \text{etc.}\right) \\ & \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Quodsi autem ponatur π peripheria circuli, cujus diameter est $= 1$, summatio singularum serierum per potestates ipsius π absolvi potest, ut ante jam ostendi:[1]) erit nempe existente

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc.} = \alpha\pi^2, \; \alpha = \frac{1}{6}, \\ & 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.} = \beta\pi^4, \; \beta = \frac{2\alpha^2}{5}, \\ & 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \text{etc.} = \gamma\pi^6, \; \gamma = \frac{4\alpha\beta}{7}, \\ & 1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \text{etc.} = \delta\pi^8, \; \delta = \frac{4\alpha\gamma + 2\beta^2}{9}, \\ & \qquad \varepsilon = \frac{4\alpha\delta + 4\beta\gamma}{11}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Erit igitur:

$$s = \alpha\pi^2 - \beta n\pi^4 + \gamma n^2\pi^6 - \delta n^3\pi^8 + \varepsilon n^4\pi^{10} - \text{etc.}$$

hincque

$$\begin{aligned} 2s^2 = 2\alpha^2\pi^4 - 4\alpha\beta n\pi^6 & + 4\alpha\gamma n^2\pi^8 - 4\alpha\delta n^3\pi^{10} + 4\alpha\varepsilon n^4\pi^{12} - \text{etc.} \\ & + 2\beta^2 \qquad\quad - 4\beta\gamma \qquad\quad + 4\beta\delta \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 2\gamma^2 \end{aligned}$$

1) Vgl. den Brief von Euler an Johann Bernoulli vom 27. August 1737 Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 257—258).

Quare si superiores litterarum β, γ, δ, ε etc. determinationes in subsidium vocentur, erit

$$2s^2 = 5\beta\pi^4 - 7\gamma n\pi^6 + 9\delta n^2\pi^8 - 11\varepsilon n^3\pi^{10} + 13\zeta n^4\pi^{12} - \text{etc.}$$

Multiplicetur ubique per $d\pi$ et integretur, erit

$$\int 2s^2 d\pi = \beta\pi^5 - \gamma n\pi^7 + \delta n^2\pi^9 - \varepsilon n^3\pi^{11} + \zeta n^4\pi^{13} - \text{etc.}$$

Haec vero eadem series a superiori ita pendet ut sit

$$\frac{\alpha\pi^3 - \pi s}{n} = \beta\pi^5 - \gamma n\pi^7 + \delta n^2\pi^9 - \varepsilon n^3\pi^{11} + \zeta n^4\pi^{13} - \text{etc.}$$

Quocirca ob $\alpha = \frac{1}{6}$ erit

$$\frac{\pi^3}{6} - \pi s = 2n\int ss\,d\pi$$

ac differentiando habebitur

$$\frac{\pi^2 d\pi}{2} - \pi ds - s d\pi = 2nss\,d\pi,$$

quae debito modo integrata praebet[1])

$$s = \frac{\pi\sqrt{n} - 1}{2n} + \frac{\pi\sqrt{n}}{n\,(e^{2\pi\sqrt{n}} - 1)}$$

denotante e numerum, cujus logarithmus est $= 1$. Haecque expressio idcirco est summa hujus seriei

$$\frac{1}{1+n} + \frac{1}{4+n} + \frac{1}{9+n} + \frac{1}{16+n} + \text{etc.}$$

---

1) Daß Euler die vorgelegte unendliche Reihe ganz wie ein Polynom mit einer endlichen Anzahl von Termen behandelt, ist ja eigentlich bei einem Mathematiker des 18. Jahrhunderts nicht besonders auffallend. Kühner ist dagegen dem Anschein nach sein Verfahren, die Zahl π als eine *veränderliche* Größe zu betrachten, aber man findet leicht, daß dies Verfahren hier durchaus korrekt ist, da es sich in Wirklichkeit nur um die Summe der Reihe

$$\alpha x^2 - \beta n x^4 + \gamma n^2 x^6 - \delta n^3 x^8 + \varepsilon n^4 x^{10} - \dots$$

handelt. Bekanntlich hat sich Euler in seinen Schriften sehr oft mit der Summation der Reihe

$$\frac{1}{1 \pm n} + \frac{1}{4 \pm n} + \frac{1}{9 \pm n} + \frac{1}{16 \pm n} + \dots$$

beschäftigt, aber der hier benutzten Methode hat er sich meines Wissens dabei nicht bedient. Freilich hat er in seiner Abhandlung *De seriebus quibusdam considerationes* (Comment. acad. sc. Petrop. 12, 1740 [gedruckt 1750], S. 53—96) ein paarmal (siehe S. 86, 89) π als veränderliche Größe betrachtet, aber für einen anderen Zweck.

quando quidem n significat numerum affirmativum. Si autem n sit numerus negativus; ut sit

$$s = \frac{1}{1-n} + \frac{1}{4-n} + \frac{1}{9-n} + \frac{1}{16-n} + \text{etc.}$$

habebitur ista aequatio

$$\frac{\pi^2 d\pi}{2} - \pi ds - sd\pi = -2nssd\pi,$$

quae pariter integrata suppeditat istam summae expressionem:

$$s = \frac{1}{2n} - \frac{\pi}{2\sqrt{n}} \cot \text{A.}\, \pi\sqrt{n},$$

in qua cot A. $\pi\sqrt{n}$ mihi denotat in circulo cujus radius $= 1$, cotangentem arcus, qui sit $= \pi\sqrt{n}$; in tali autem circulo π denotabit dimidiam peripheriam, seu arcum 180^0. Quoties igitur fuerit $\pi\sqrt{n}$ arcus vel 90^0, vel 270^0, vel 450^0, vel etc., hoc est vel $n = \frac{1}{4}$, vel $n = \frac{9}{4}$, vel $n = \frac{25}{4}$, vel etc., summa seriei ob cotangentem $= 0$, erit $= \frac{1}{2n}$. Utraque autem expressio, quae prodiit tam pro n affirmativo quam negativo, etiamsi π plus una dimensione nusquam habeat, tamen posito $n = 0$, praebet, $s = \frac{1}{6}\pi^2$; qui est singularis casus methodi Tuae, Vir Celeb., determinandi valores expressionum, quae certo quodam casu videantur fieri indefinitae. Istam meam summandi methodum rogo, ut cum Viro Excellentissimo NICHOLAO BERNOULLIO cum summi mei erga Ipsum officii testificatione communicare velis.

Inveni nuper singularem modum aequationes differentiales altiorum graduum una vice ita integrandi, ut statim ad aequationem finitam perveniatur. Patet autem haec methodus ad omnes aequationes, quae in hac generali forma continentur:

$$y + \frac{ady}{dx} + \frac{bddy}{dx^2} + \frac{cd^3y}{dx^3} + \frac{dd^4y}{dx^4} + \frac{ed^5y}{dx^5} + \text{etc.} = 0$$

posito dx constante. Ad hanc aequationem generatim integrandam considero aequationem hanc seu expressionem algebraicam:

$$1 - ap + bp^2 - cp^3 + dp^4 - ep^5 + \text{etc.} = 0.$$

Haec expressio si fieri potest in factores simplices reales hujus formae $1 - \alpha p$ resolvatur: si autem hoc fieri nequeat, resolvatur in factores duarum dimensionum hujus formae $1 - \alpha p + \beta pp$, quae resolutio realiter semper institui potest, hocque modo prodibit superior expressio sub forma producti ex factoribus vel simplicibus $1 - \alpha p$ vel duarum dimensionum $1 - \alpha p + \beta pp$, omnibus realibus. Facta autem hac resolutione, dico valorem ipsius y finitum per x et constantes expressum constare ex tot membris, quot factores habeantur expressionis illius algebraicae, singulosque factores praebere singula integralis membra. Nempe factor simplex $1 - \alpha p$ dabit integralis membrum

$$Ce^{-\frac{x}{\alpha}},$$

factor autem compositus $1 - \alpha p + \beta pp$ dabit integralis membrum hoc

$$e^{-\frac{\alpha x}{2\beta}}\left(C \sin A.\ \frac{x\sqrt{(4\beta - \alpha\alpha)}}{2\beta} + D \cos A.\ \frac{x\sqrt{(4\beta - \alpha\alpha)}}{2\beta}\right)$$

ubi sin A. et cos A. mihi denotant sinum vel cosinum arcus sequentis in circulo cujus radius $= 1$ sumti: notandum autem est, si expressio $1 - \alpha p + \beta pp$ in factores simplices reales resolvi nequeat uti pono, tum fore $4\beta > \alpha\alpha$ ideoque integrale reale. Proposita sit exempli gratia haec aequatio

$$y\,dx^4 = k^4 d^4 y, \text{ seu } y - \frac{k^4 d^4 y}{dx^4} = 0;$$

ex hac nascetur expressio algebraica haec $1 - k^4 p^4$, cujus factores reales sunt tres $1 - kp$, $1 + kp$ et $1 + k^2 p^2$; ex quibus oritur aequatio integralis haec:

$$y = Ce^{-\frac{x}{k}} + De^{\frac{x}{k}} + E \sin A.\ \frac{x}{k} + F \cos A.\ \frac{x}{k};$$

in qua expressione ob quadruplicem integrationem unica operatione peractam quatuor insunt novae constantes C, D, E et F, uti natura integrationis postulat. Alia vice, si tibi, Vir Excellentissime, placuerit, hujus methodi demonstrationem perscribam.

Vale interim, Vir Celeberrime, Tuaque ergo me benevolentiam atque amorem mihi conserva.

Dabam Petropoli ad 15 d. Sept. A. 1739.

22.

Bernoulli an Euler 9. Dezember 1739.

Antwort auf Eulers Brief vom 15. September 1739. Original verloren. Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. S. 26—32 nach einer von N. Fuss verfertigten Abschrift des Originals.

Inhalt. Über die Verzögerung der Fertigstellung der zweiten Abteilung von Johann Bernoullis *Dissertatio hydraulica.* — Über die Summe der Reihe

$$\frac{1}{1 \pm n} + \frac{1}{4 \pm n} + \frac{1}{9 \pm n} + \frac{1}{16 \pm n} + \cdots$$

besonders wenn n eine Quadratzahl ist. — Über die Integration der unvollständigen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. — Über die Schwingungen schwimmender Körper. — Zwei hierher gehörende hydrodynamische Probleme. — Eine meteorologische Beobachtung.