Caput V.

De inventione ramorum in infinitum extensorum.

1. Si pars quaepiam lineae curvae in infinitum extenditur, ejus puncta a principio axis intervallo infinito distant, quaecunque etiam linea recta pro axe assumatur. Hinc si abscissae x, quibus rami infiniti respondent, vel evanescant, vel sint finitae magnitudinis, applicatae y necessario erunt infinite magnae; ac vicissim, si applicatae sint vel evanescentes vel infinitae, abscissae erunt infinite magnae. Saepenumero etiam evenit, ut tam abscissae quam applicatae in finitum abeant. Quare quacunque linea recta pro axe assumta, omnes curvae rami in infinitum excurrentes invenientur, si coordinatarum x et y vel altera vel utraque infinita ponatur. Sic in enumeratione situum regulae circa finem capitis praecedentis facta, sextus cum sequentibus omnibus ramos in infinitum extensos indicat.

2. Quanquam autem haec ramorum in infinitum extensorum inventio in capite praecedente jam exposita videtur, ubi per regulae applicationem ad parallelogrammum Newtonianum indolem eorum curvae ramorum, pro quibus vel alterutra coordinatarum vel utraque in infinitum abit, investigavimus, tamen saepenumero accuratiori investigatione opus est, cum ad veram tangentis positionem, tum ad naturam ipsam illius curvae portionis definiendam, uti jam supra innuimus. Quin etiam fieri potest, qui casus imprimis sunt notandi, ut per situm regulae ramus curvae in infinitum extensus indicetur, qui tamen si reliquorum aequationis terminorum ratio simul habeatur, fiant imaginarii. Denique usus parallelogrammi ante expositus tantum ad curvas algebraicas, quarum aequationes ad rationalitatem jam sint perductae, patet; unde si aequatio vel irrationalitate sit implicata, vel adeo transcendens, peculiari methodo opus erit ad hoc negotium expediendum.

3. Quoties curva est algebraica ejusque aequatio ad rationalitatem revocata, parallelogrammum Newtonianum summa cum utilitate adhiberi potest, non solum ad veram tangentis positionem et curvae naturam pro iis quoque casibus eruendam, quibus superior methodus insufficiens est visa, nisi axis curvae immutetur, sed etiam ejus ope eos casus dignoscere licebit, quibus rami infiniti, qui primo intuitu per situm regulae indicari videntur, fiunt imaginarii. Dari autem hujusmodi casus unico exemplo curvae hac aequatione expressae $(yy-ax)^2+aayy+a^4=0$ probasse sufficiat, pro qua ex parallelogrammo eliciuntur rami in infinitum extensi, quorum natura exprimatur aequatione $yy-ax=0$, cum tamen ex tota aequatione appareat nullam plane linearum curvarum ei respondere: reperitur enim $yy-ax=a\sqrt{-(aa+yy)}$, ita ut nulli plane applicatae y abscissa x realis respondeat.

4. Intelligitur ergo ad naturam curvae in infinitum expansae accuratius investigandam, eorum quoque aequationis terminorum, qui prae iis, quos regula trajicit, erant neglecti, rationem esse habendam; si quis enim horum terminorum, etiamsi pro infinite parvis haberi queant, imaginaria involvat, tota aequatio imaginaria erit censenda. Sic etsi posito x infinito, in hac aequatione $y=\frac{a}{x}+\frac{b}{xx}$ terminus $\frac{b}{xx}$ prae $\frac{a}{x}$ rejici queat, ita ut haec aequatio casu $x=\infty$ congruere existimari possit cum hac $y=\frac{a}{x}$, tamen si terminus rejectus seu ejus coëfficiens b sit imaginarius, tota aequatio fiet imaginaria, atque applicatae abscissis infinitis respondentes erunt imaginariae, neque ergo hoc casu aequatio $y=\frac{a}{x}$ ad curvae indolem investigandam adhiberi poterit. — — — — —