Der Briefwechsel zwischen Leonhard Euler und Johann I Bernoulli.

Von G. Eneström in Stockholm.

II. 1736—1738.

In der Einleitung zum vorigen Abschnitte habe ich erwähnt,[1]) daß nach dem Jahre 1731 der Briefwechsel zwischen Euler und Bernoulli für längere Zeit aufgehört zu haben scheint, und daß wir von den folgenden Briefen keinen besitzen, der älter als 1737 ist. Der erste dieser Briefe wurde am 2. April 1737 von Bernoulli an Euler geschrieben; indessen geht daraus hervor, daß Euler etwa ein Jahr früher ein jetzt verlorenes Schreiben an Bernoulli gesandt hatte.

Auf das Schreiben vom 2. April 1737 antwortete Euler am 27. August; Bernoullis nächster Brief ist vom 6. November datiert. Weitere Briefe von Euler sind vom 10. Dezember 1737, 26. April, 30. Juli und 20. Dezember 1738 datiert und alle diese wurden von Bernoulli beantwortet, aber die drei ersten Antworten sind vollständig verloren, und die vierte, die vom Jahre 1739 ist, gehört zum folgenden Abschnitte dieses Artikels. Hier werden also zusammen 7 Briefe zum Abdruck gelangen, nämlich 5 von Euler und 2 von Bernoulli.

Daß drei Briefe von Bernoulli verloren sind, und daß auch nicht die Konzepte derselben aufbewahrt wurden, hängt vielleicht damit zusammen, daß in den noch vorhandenen Briefen von Euler viele Streichungen vorkommen, die so sorgfältig ausgeführt wurden, daß die betreffenden Stellen durchaus unleserlich sind. Auch in den Konzepten der Bernoullischen Briefe vom 2. April und 6. November 1737 sind Stellen unleserlich gemacht, und im Fussschen Abdruck[2]) des ersten Briefes fehlt ebenfalls das Überstrichene. Es scheint also, als ob Euler und Bernoulli über irgend eine Frage verhandelt hätten, die von sehr privater Natur

1) Siehe Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 345.

2) *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII^ème siècle publiée par* P. H. Fuss, T. II (St.-Pétersbourg 1843), S. 12—17.

war. Indessen muß ich hinzufügen, daß die Streichung im EULERschen Briefe vom 20. Dezember 1738 offenbar vom Briefschreiber selbst vor der Absendung gemacht wurde, wie aus seinem folgenden Briefe vom 5. Mai 1739 hervorgeht. Nach einer handschriftlichen Bemerkung von JOHANN III BERNOULLI rühren die übrigen Streichungen in den EULERschen Briefen wahrscheinlich von JOHANN II BERNOULLI her, und dieser hat wohl auch die Konzepte der BERNOULLIschen Briefe an den erwähnten Stellen unleserlich gemacht.

Die Fragen, mit denen sich die hier in Betracht kommenden Briefe beschäftigen, sind wesentlich andere, als die in den vorigen Briefen behandelten. Zur reinen Mathematik gehören drei Gegenstände, die BERNOULLI weit früher interessiert hatten, nämlich die Summation der reziproken Quadratzahlen, die algebraisch rektifizierbaren Kurven und die isoperimetrischen Probleme.

In betreff der Summe der reziproken Quadratzahlen schrieb JOHANN BERNOULLI schon 1691 an seinen Bruder JAKOB, daß er den Weg, worauf diese Summe ermittelt werden konnte, gefunden hatte,[1]) aber ohne Zweifel entdeckte er bald, daß er sich geirrt hatte, und erst 45 Jahre später gelang es ihm, eine Methode zur Summation der reziproken Quadratzahlen zu finden. Freilich hatte EULER damals das Problem schon gelöst und das Resultat der Lösung seinem alten Lehrer mitgeteilt.[2]) Auch einige andere verwandte Reihen werden nebenbei in den Briefen erwähnt und summiert.

Mit den algebraisch rektifizierbaren Kurven, oder richtiger ausgedrückt mit der verwandten Frage, die Kurven, deren Quadratur auf die Ermittelung der Länge einer algebraischen Kurve zurückgeführt werden kann, zu bestimmen, hatte sich JOHANN BERNOULLI 1724 ein wenig beschäftigt, aber auch auf diesem Gebiete war es EULER, dem ein wesentlicher Fortschritt zu verdanken ist. In den Briefen gibt dieser Auskunft über seine Lösungen zweier hierher gehörender Probleme, nämlich: 1. zwei algebraische Kurven zu finden, die zwar nicht algebraisch rektifizierbar sind, aber die Eigenschaft haben, daß die Summe ihrer zu ein und derselben Abscisse gehörenden Bogen eine algebraische Funktion der Abscisse ist; 2. Kurven zu finden, die algebraisch rektifizierbar sind, oder deren Rektifikation von einem gegebenen Integral abhängt.

---

1) „Je vois déjà la route de trouver la somme de
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\text{etc.}$$
ce que nous ne pouvions pas autrefois" (Brief vom 22. Mai 1691 in der herzoglichen Bibliothek in Gotha).

2) Vgl. ENESTRÖM, *Note historique sur la somme des valeurs inverses des nombres carrés;* Biblioth. Mathem. 1890, S. 22—24.

Über isoperimetrische Probleme handelt Euler ziemlich kurz in den zwei letzten hier unten veröffentlichten Briefen, zum Teil unter Bezugnahme auf eine von Daniel Bernoulli gestellte Frage, nämlich „unter allen isoperimetrischen Kurven diejenige zu finden, wo $\int \varrho^m ds$ (ϱ = Krümmungsradius, s = Bogenlänge) Maximum oder Minimum ist".

Die in den Briefen behandelten Fragen aus der angewandten Mathematik beziehen sich vorzugsweise auf die von Euler 1736—1739 veröffentlichten oder in Angriff genommenen Arbeiten. Anläßlich einer Stelle der Eulerschen *Mechanica* (1736) machte Bernoulli eine Ausstellung, gegen welche sich Euler ausführlich verteidigte, und im Zusammenhang hiermit beanstandete jener Sätze aus den Arbeiten von Newton und Hermann, während Euler wenigstens Newton in Schutz nahm. Auf der anderen Seite machte Euler selbst auf ein paar Stellen seiner *Mechanica* aufmerksam, wo ihm Verbesserungen angebracht schienen.

Besonders ausführlich beschäftigen sich die Briefschreiber mit einigen Gegenständen aus der Theorie des Gleichgewichtes und der Bewegung schwimmender Körper, die Euler später in seiner *Scientia navalis* behandelte. Bekanntlich erschien diese Arbeit 1749, aber aus den Briefen ersieht man, daß sie schon 1737 geplant, im Anfange von 1738 in Angriff genommen und vor dem Ende dieses Jahres fertig war. Es ist nicht ohne Interesse zu beobachten, wie schwierig es den Briefschreibern bisweilen war, sich über die eine oder die andere Frage zu verständigen.

Die Beendigung des Druckes des *Tentamen novae theoriae musicae* gab Euler Anlaß, den Bericht, den er schon am 25. Mai 1731 an Bernoulli gesandt hatte,[1]) ein wenig zu ergänzen. Auch die Arbeiten, die Bernoulli fertiggestellt oder begonnen hatte, werden in den Briefen berührt. Eine Abhandlung von ihm über die Bewegung von Körpern in veränderlichen und festen Bahnen regt Euler an, die darin enthaltenen Formeln mit den seinigen zu vergleichen und die Übereinstimmung derselben zu bestätigen. Die von Bernoulli in Angriff genommene hydraulische Abhandlung, die später in zwei Abteilungen in den Commentarii der Petersburger Akademie erschien, wird von Euler als sehr ersehnt bezeichnet.

Mehr im Vorübergehen werden viele andere mathematische oder literarische Gegenstände erwähnt. So z. B. veranlaßt die Summation der reziproken Quadratzahlen zu Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen den Wurzeln und den Koeffizienten einer Gleichung unendlich hohen Grades, und ganz beiläufig teilt Euler einen Satz über die elastische Kurve mit. Auch über die Formel der lebendigen Kraft, sowie über die

1) Siehe Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 383—386.

Theorie der Ebbe und Flut, des Schalles, des Lichtes, des Feuers und über exzentrisches Zusammenstoßen von Körpern wird in den Briefen verhandelt, zum Teil im Anschluß an Bemerkungen über Preisschriften von EULER oder den BERNOULLIS; über den Stand der Herausgabe der Commentarii der Petersburger Akademie gibt EULER ziemlich regelmäßig Auskunft.

11*.

Euler an Bernoulli Mai (?) 1736.

Verloren; zitiert von BERNOULLI in seinem Brief vom 2. April 1737 („annus propemodum est quod postremas Tuas litteras accepi").

12.

Bernoulli an Euler 2. April 1737.

Antwort auf EULERS verlorenen Brief von 1736. Original im Archiv der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg; Konzept in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. Veröffentlicht von FUSS, a. a. O. S. 12—17.

Inhalt. Die Preisschriften von JOHANN II BERNOULLI über die Fortpflanzung des Lichtes und von DANIEL BERNOULLI über die gegenseitige Neigung der Planetenbahnen, sowie von JOHANN I BERNOULLI selbst über diesen Gegenstand. — EULERS *Mechanica.* — Der Streit über den Begriff der lebendigen Kraft. — Summation der Reihe der reziproken Quadratzahlen und Reihen von anderen Potenzen der reziproken natürlichen Zahlen. — Über den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten und den Wurzeln einer Gleichung unendlich hohen Grades.

Viro[1]) clarissimo ac mathematico longe acutissimo LEONHARDO EULERO S. P. D. JOH. BERNOULLI.

Annus propemodum est, quod postremas Tuas litteras accepi; ne credas quaeso, diuturni silentii causam fuisse aliquam animi mei alienationem, nosti enim et fateris ipse, quot quantaque Tibi olim dederim benevolentiae testimonia, ut plane non sit, cur ullam in me erga Te suspiceris mutationem. Vera potius dilationis causa est partim locorum longinquitas, partim sumtus erogandi in litteras mittendas et accipiendas per cursorem publicum. Utor itaque hac occasione commoda, qua citra sumtus ad Te amandare possim dissertationem filii mei JOHANNIS de propagatione luminis, condecoratam praemio superioris anni ab academia regia Parisina[2]), de qua, postquam eam perlegeris, judicium Tuum (quod ferre soles ex animi sententia) praestolabimur.

Vidi quae perscripsisti filio meo DANIELI de utriusque nostrum dissertationibus super declinationibus orbitarum planetariarum[3]), id quod judicas

1) Bei dem folgenden Abdruck habe ich auch das Konzept verglichen.

2) Siehe die Abhandlung von JOHANN II BERNOULLI, *Recherches physiques et géométriques sur la question: Comment se fait la propagation de la lumière?;* Pièce qui a remporté le prix de l'académie royale des sciences, proposé pour l'année 1736 (Paris 1736). 66 S. 4⁰.

3) Siehe die Abhandlungen von DANIEL BERNOULLI, *Recherches physiques et astronomiques sur le problème: Quelle est la cause physique de l'inclinaison des plans des*

de DANIELIS opere, videri scilicet deproperatum fuisse summa cum festinatione, idem et mihi visum fuerat, quod etiam statim ipsi exprobraveram. Si dicere licet quod sentio, credo ipsum ad optatum finem non perventurum fuisse, nisi paucis mensibus ante praemiorum distributionem reditum suum ex Moscovia per Lutetiam sumsisset, ubi occasionem invenit prensandi quorundam benevolentiam aut aliquid aliud moliendi, sicuti Tu ipse festive jocaris, quando dicis, in dissertatione DANIELIS hoc unum praecipue laude dignum reperiri, quod praemium reportaverit. In solidiorem mihi vergit gloriam honorifica quam fers sententia de mea dissertatione, eam nempe elaboratam esse magna diligentia atque insigni ingenio; quod vero addis Te dubitare an ipse credam, quaestionem per theoriam meam plenarie solutam esse: ad hoc respondeo a nemine exigi posse, ut in rebus mere physicis promittat solutiones omni exceptione majores atque ad rigorem geometricum demonstrabiles; sufficit si secundum principia clara et semel stabilita ratiocinando recte procedat. Certe non puto, CARTESIUM vel NEWTONUM, vel alium quemvis ex philosophis, qui systema physicum condidit, ausum fuisse vitam aut animam suam oppignerare pro systematis sui exacta convenientia cum rerum existentia. [1])

Accepi a Filio, novam Mechanicam a Te parari ejusque tomum primum jamjam e prelo evasisse, id quod intelligere summo me gaudio afficit, spero namque me in hoc opere visurum multa singularia ex sagacissimi Tui ingenii promtuario depromta atque ab aliis Mechanicae scriptoribus intacta; a Tuo quippe mentis acumine, quod ad profundissima penetrat naturae mysteria, nihil non novi, nihil non limatissimi mihi promitto: facile sane provideo Te non haerere tantum in explicandis vulgaribus istis et trivialibus Staticae legibus atque machinarum viribus ab aliis dudum occupatis; dabis operam haud dubie, ut sublimior Mechanicae pars, quae est Dynamica, hactenus segniter admodum tractata, a Te in plena sua luce prodeat, ubi praesertim ansam habebis naturam virium vivarum ita penitus excutiendi, ut nullus vel pertinacissimis adversariis relinquatur locus, quo suis cavillationibus ex invidia an imperitia an ex utraque identidem nobis obtrusis veram earum virium aestimationem arrodere non desinunt, id quidem ego nunc obtinui meis demonstrationibus, in disser-

---

orbites des planètes; Pièces qui ont remporté le prix double de l'académie des sciences en 1734 (Paris 1735), S. 95—144, und von JOHANN I BERNOULLI, *Essai d'une nouvelle physique céleste, servant à expliquer les principaux phénomènes du ciel, et en particulier la cause physique de l'inclinaison des orbites des planètes par raport au plan de l'equateur du soleil;* Pièces etc., S. 1—91.

1) Hier sind 29 Zeilen des Konzeptes gestrichen (möglicherweise von JOHANN II BERNOULLI) und unleserlich. Diese Zeilen sind bei FUSS nicht abgedruckt.

tatione mea de motu[1]) tum et alibi expositis, ut nunc in Gallia passim veritas triumphet, sed Anglis usque adeo adhuc stomachum movet (ex livore credo contra LEIBNITIUM, primum virium vivarum assertorem) ut cum unum alterumve ad silentium redactum atque e medio sublatum esse putamus, statim duo tresve alii prorumpant vehementius declamantes, non secus ac esset in Anglia Hydra Lernaea ad quam domandam Te tanquam Hercule opus erit. JURINUS[2]) imprimis, ut in Act. Lips. legi, horribilem strepitum excitat contra virium vivarum Patronos, sed insulsis adeo atque jejunis argumentis utitur, ut commiserationem potius quam indignationem commoveat: lepidum fuit vidisse in Actis Lips. 1735 m. Majo recensionem quarundam dissertationum JURINI[3]) in quarum ultima inepte debacchatur contra virium vivarum defensores et nominatim quidem contra me, sed cui recensioni immediate subjecta est mea aliqua Dissertatio *De vera notione virium vivarum earumque usu in dynamicis*[4]), quasi eam dedita opera scripsissem in refutationem praecedentis dissertationis JURINianae, etiamsi re vera mihi nondum innotuerit a JURINO quicquam ea de re scriptum fuisse.

Percepi porro te invenisse[5]) modum summandi seriem fractionum

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.}$$

$$\text{h. e. } 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.},$$

cujus nempe denominatores procedunt ut quadrata numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, etc., id quod olim fratri meo JACOBO imperscrutabile fuit,

---

1) *Discours sur les loix de la communication du mouvement* (siehe Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 351).

2) JAMES JURIN, Arzt in London, geb. 1684, gest. 1750.

3) Eine Anzeige der *Dissertationes physico-mathematicae* (London 1732) von J. JURIN findet sich in den Acta Eruditorum 1735, S. 205—209.

4) Veröffentlicht von JOHANN BERNOULLI in den Acta Eruditorum 1735, S. 210—230, abgedruckt in seinen *Opera omnia*, T. III S. 239—260.

5) In meinem Aufsatze *Note historique sur la somme des valeurs inverses des nombres carrés* (Biblioth. Mathem. 1890, S. 22—24) habe ich angenommen, daß die Worte „Percepi porro" sich auf den verlorenen EULERschen Brief an JOHANN BERNOULLI vom Jahre 1736 beziehen. Beachtet man aber den früheren Passus: „Accepi a filio, novam Mechanicam a te parari", wird es wahrscheinlicher, daß die Worte „Percepi porro" auf ein Schreiben von EULER an DANIEL BERNOULLI hinweisen, und in der Tat weiß man, daß dieser vor dem 12. September 1736 einen Brief von EULER erhielt (vgl. FUSS, a. a. O. II, S. 435), wo die Formel

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

angegeben wurde. Wie dem auch sei, sicher ist, daß EULER schon im Jahre 1736 die Reihe der reziproken Quadratzahlen summiert hatte, und daß JOHANN BERNOULLI Kenntnis davon bekam.

sicuti ipse fatetur in tractatu suo *De seriebus infinitis* p. 254; invenisti namque summam illius seriei $= \frac{cc}{6}$, nominando scilicet diametrum circuli $= 1$, ejusque circumferentiam $= c$; volebat meus DANIEL fontem ejus indagare, sed irrito successu, quamquam in postremis Tuis litteris ad ipsum aliquid ni fallor de fundamento ei aperueris, cum primum vero mihi nominasset summam a Te inventam $\frac{cc}{6}$, praetereaque nihil, indeque ego intellexissem summam seriei reduci ad quadraturam circuli, curiosus unde petenda esset analysis, mox ipse proprio meo Marte totum detexi mysterium, in subsidium vocato elegantissimo aliquo theoremate NEWTONI, quod sine demonstratione extat in ejus Algebra p. 251 edit. Lond. an. 1707, cujus autem demonstrationem etiam ego inveni, ubi traditur modus, quo ex coefficientibus terminorum datae alicujus aequationis determinatur summa non tantum radicum, sed et ex radicibus summa quadratorum, cuborum, quadrato-quadratorum, etc. Ut itaque judicare possis an rem acu tetigerim, exprimam hic summas serierum ubi denominatores progrediuntur ut potentiae quartae, tum etiam ut potentiae sextae numerororum naturalium 2, 3, 4, 5, etc. Inveni enim (instituendo pro singulis novum calculum)

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.} = \frac{c^4}{90},$$

$$\text{item } 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{etc.[1]} = \frac{c^6}{940};$$

ex istis porro elicietur summa

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \text{etc.}$$

atque ita successive progredi licebit ad altiores dimensiones. Sed calculus gradatim fit operosior, extenditurque tantum ad exponentes dimensionum pares; quod si vero sint impares, fateor me quaesiti nondum esse compotem. Si quem possideas modum pro imparibus, ex. gr. pro hac serie summanda

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}$$

gratum erit a Te edoceri. Caeterum scrupulus aliquis subest in hoc negotio ex eo oriundus, quod pro hypothesi assumitur ex coefficientibus terminorum alicujus aequationis, etiam infinitae, dependere radicum determinationem, id quod quidem in genere verissimum est, sed saepissime

1) Die Summe der Reihe ist bekanntlich $\frac{\pi^6}{945}$, nicht $\frac{\pi^6}{940}$, wie JOHANN BERNOULLI hier durch einen Schreibfehler angibt; siehe die Bemerkung in EULERS Antwortschreiben (unten S. 257).

accidit ut in aequatione proposita lateant praeter radices utiles (quae problema solvunt) etiam inutiles seu peregrinae, imo quoque impossibiles seu imaginariae; adeoque in hac aequatione ad quam pervenitur

$$e - x + \frac{x^3}{2.3} - \frac{x^5}{2.3.4.5} + \frac{x^7}{2.3\ldots7} - \text{etc.} = 0,$$

ubi x denotat arcum circuli incognitum sinui dato e respondentem, demonstrandum esset nullam contineri radicem impossibilem, nullamque aliam, quam quae re vera alicui ex infinitis arcubus ad sinum e pertinentibus respondeat. Habeo quidem in hoc casu aliquam demonstrationis speciem quae mihi rem utcunque probabilem reddit: alias innumera possem afferre exempla, in quibus ita ratiocinando ad manifestam absurditatem delaberemur, ut si posito radio circuli $= 1$, arcu quodam dato a, tangente incognita $= t$, nosti utique hanc haberi aequationem

$$a = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \text{etc.},$$

adeoque

$$a - t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{7}t^7 - \text{etc.} = 0;$$

haec ergo aequatio infinitas radices t habet, ex illis tamen omnibus unica tantum satisfacere ipsique arcui a respondere potest.

Sed Te diutius detinere nolo. Vale, vir clarissime, et me quod facis amare perge.

Dabam Basileae a. d. 2. April 1737.

13.

Euler an Bernoulli 27. August 1737.

Antwort auf BERNOULLIS Brief vom 2. April 1737. Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. Einige Zeilen veröffentlicht von ENESTRÖM im Bihang till svenska vetenskapsakademiens handlingar 5, Nr. 21 (1880), S. 24 und in der Biblioth. Mathem. 1890, S. 23.

Inhalt. Über die Fortpflanzung des Lichtes und die Geschwindigkeit des Schalles. — Über die *Mechanica* des EULER. — Abhandlungen von JOHANN BERNOULLI für die Commentarii der Petersburger Akademie. — Die Pariser Preisschriften der jüngeren BERNOULLIS. Die Summe der Reihe

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \text{etc.}$$

für besondere Werte von n, sowie der Reihe

$$1 + \frac{1}{(-3)^n} + \frac{1}{(+5)^n} + \frac{1}{(-7)^n} + \frac{1}{(+9)^n} + \frac{1}{(-11)^n} + \text{etc.}$$

Über die Wurzeln der Gleichung

$$a - t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + \text{etc.} = 0.$$

Über die Reihe

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{26}+\text{etc.},$$

wo alle Nenner die Form $a^r - 1$ haben, sowie über die Reihe

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\text{etc.},$$

wo die Nenner lauter Primzahlen sind. — Über das unendliche Produkt

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\ \text{etc.}$$

Über unbestimmte Infinitesimalrechnung und das Problem zwei algebraische Kurven zu finden, die zwar nicht algebraisch rektifizierbar sind, aber die Eigenschaft haben, daß die Summe ihrer zu ein und derselben Abscisse gehörenden Bogen eine algebraische Funktion dieser Abscisse ist.

Viro Celeberrimo atque Excellentissimo Joanni Bernoulli S. P. D.

Leonhard Euler.

Litterae Tuae postremae d. 2. April. hujus anni, quas quidem magno desiderio expectaveram, eo mihi gratiores fuere, quod me de Tua ergo me benevolentia, quam non solum maximi facio sed etiam omni studio et opera mereri conabor, certiorem facere volueris.

Gratias igitur Tibi, Vir Celeberrime, ago maximas cum pro insignibus Tui erga me amoris testimoniis, tum pro mecum communicata Filii Tui Clarissimi Joannis dissertatione de Lumine praemio condecorata ab Acad. Reg. Parisina, in qua exquisitum Auctoris ingenium in hujusmodi rebus physicis vehementer sum admiratus. Imprimis autem mihi placuit explicatio diversitatis radiorum lucis, quam Newtonus tantum observavit, nemo autem adhuc ex physicis principiis explicare nequidem est conatus; quantum mihi quidem constat. Quod autem ad celeritatem luminis attinet, fateor me modum quo est usus ad eam a priori determinandam, non satis perspicere; in hoc vero eo magis haesito, quod calculus ad sonum accommodatus illam ipsam praebeat celeritatem, quam Newtonus assignavit, quae tamen cum experientia minus congruit. Mihi quidem magis consentanea videtur mea celeritatis soni determinatio quam in mea de sono dissertatione[1]) exhibui, et cum experimentis apprime convenire ostendi, quam etiam Tute, Vir Celeb., Tua probatione confirmare es dignatus.

Non dubito quin jam acceperis Tomos Comment. nostrorum, qui Tibi adhuc defuerant, una cum mea *Mechanica*,[2]) quos jam ante Tuas acceptas litteras ad Te transferri curavi; prout etiam in posterum opera, quae hic prodibunt, Tibi transmittentur, quae tanquam emolumenta promissa accipere velis.

1) Vgl. Biblioth. Mathem 4_3, 1903, S. 348 Anm. 4.

2) Die *Mechanica sive motus scientia analytice exposita* erschien bekanntlich im Jahre 1736.

Deinde Illustr. Praefectus noster mihi demandavit Academiæ nomine Tibi gratias agere maximas pro acutissimis Tuis dissertationibus nobiscum communicatis,[1]) Teque omni studio rogare, ut in posterum eximia inventa Tua nobis largiri velis atque Tibi etiam persuadeas, Academiam ea non solum maximi esse aestimaturam, sed etiam in Te Principem Mathematicorum summumque societatis nostrae decus agnoscere. Quamobrem noli suspicari quemquam apud nos esse, qui Te non omni quam ubique es consecutus, aestimatione veneretur.[2])

Ex postremis litteris Parisinis non sine ingenti gaudio cognovi ambos auctores anonymos, quibus hoc anno ab Acad. R. Paris. praemia sunt decreta, Tuos esse Filios,[3]) de quo tam Tibi, Vir Celeb., quam ipsis ex animo gratulor.

De *Mechanica* mea judicium Tuum integrum pariter ac Filiorum Tuorum summo desiderio expecto. Ex instituto autem, quod sum secutus, sine dubio jam intellexisti in his tomis locum nondum fuisse ad doctrinam de viribus vivis tractandam, erit autem in sequentibus tomis, ubi corporum finitae magnitudinis motus perpendentur.

Summatio serierum reciprocarum potestatum parium, quam scripsisti, apprime cum mea methodo congruit, quippe quae theorematis circa naturam coefficientium versantibus nititur; ibi lapsu calami evenisse arbitror, quod pro summa hujus seriei

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\text{etc.}$$

posuisti $\frac{c^6}{940}$, cum ea sit $\frac{c^6}{945}$. Pro sequentibus potestatibus paribus calculus fit non solum prolixior, sed ediam ipsae expressiones perquam fiunt complicata, ita

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}\text{ etc.}=\frac{c^8}{9450}$$

atque

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\text{etc.}=\frac{c^{10}}{93555},$$

qui denominatores etiamsi legem tenere quandam videantur, tamen numeratores per accidens hucusque fuerant 1, nam summa hujus

1) Die von EULER angedeuteten Artikel sind wohl die zwei Abteilungen der Abhandlung *De motu corporum se invicem percutientium* in dem 1740 herausgegebenen Band 7 („ad annos 1734 et 1735") der Comment. acad. sc. Petrop.

2) Hier sind 9 Zeilen gestrichen; wahrscheinlich rührt die Streichung von JOHANN II BERNOULLI her.

3) Siehe JOHANN II BERNOULLI, *Discours sur les ancres* (Pièces qui ont remporté les prix de l'académie des sciences en 1737, Paris 1737, S. 1—32) und DANIEL BERNOULLI, *Réflexions sur la meilleure figure à donner aux ancres et la meilleure manière de les essayer* (Pièces etc. S. 47—84).

$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \text{etc.}$$

in numeratore habet 691.

Potestates impares summare nequeo, nec opinor earum summam a circuli quadratura pendere, omnes autem series, quarum summationem hoc modo inveni, continentur in hac generali

$$1 + \frac{1}{(-3)^n} + \frac{1}{(+5)^n} + \frac{1}{(-7)^n} + \frac{1}{(+9)^n} + \frac{1}{(-11)^n} + \text{etc.},$$

si quidem n denotet numerum integrum affirmativum sive parem sive imparem[1]).

Dubium quod circa hanc methodum affers, utique magni est momenti, neque tam facile demonstratu arbitror aequationem illam nullas radices imaginarias continere. Interim tamen regula Newtoni nullas radices imaginarias indicat, unde forte plenaria certitudo derivari posset. At cum haec ipsa methodus seriem Leibnitianam

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \text{etc.}$$

suppeditet, atque reliquarum serierum summae, cum iis, quas jam diu ante per approximationem erui, apprime conveniant, hoc ipsum instar confirmationis methodi haberi poterit.

Praeterea vero alia methodo longe diversa eandem inveni summam hujus seriei

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.},$$

quae methodus est sequens.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}\right)^2.$$

At $\int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$ exprimit arcum cujus sinus est x, atque posito post integrationem $x = 1$, denotabit $\int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$ quartam peripheriae partem, posito radio $= 1$, vel Tua designandi modo erit $\int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{c}{2}$.

Quamobrem posito $x = 1$ erit

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{c^2}{8}.$$

1) Siehe die Bemerkung von Euler S. 129—130 der Abhandlung *De summis serierum reciprocarum;* Comment. acad. sc. Petrop. 7, 1734/1735 (gedruckt 1740), sowie seine *Dissertatio altera de summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum;* Miscell. Berolin. 7, 1743, S. 172—192.

Est vero, ut constat,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}} = x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^7 \text{ etc.},$$

quo valore substituto fiet

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}} = 1 \int \frac{xdx}{\sqrt{1-xx}} + \frac{1}{2.3}\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-xx}} + \frac{1.3}{2.4.5}\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-xx}} + \text{etc.},$$

qui singuli termini sunt integrabiles, si vero post integrationem peractam ponatur $x = 1$, habebitur ista series

$$1 + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.5} + \frac{1}{7.7} + \frac{1}{9.9} + \text{etc.},$$

cujus adeo summa erit $\frac{c^2}{8}$; unde hujus

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.}$$

summa erit $\frac{c^2}{6}$, prout altera methodo inveni, neque dubito quin etiam simili analysi reliquae summae elici queant, etiamsi ego nondum eo pertingere potuerim.

Denique non video, cur ista methodus in hac serie

$$a - t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + \text{etc.} = 0$$

ad absurditatem deducat. Quamvis enim unica radix t sit realis, tamen nil impedit, quin summa omnium radicum ipsius $\frac{1}{t}$ sit $\frac{1}{a}$; atque ita porro.

Magis curiosae quamvis minus utiles videntur summationes serierum, quarum lex progressionis ad terminum generalem revocari nequit, cujusmodi est haec

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \text{etc.},$$

cujus denominatores unitate aucti dant omnes numeros qui sunt potestates, hujus autem summam esse $= 1$ demonstravit Cel. GOLDBACH noster.[1]) Ita ego etiam demonstravi[2]) summam serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \text{etc.},$$

1) Vgl. die Bemerkung von EULER S. 97 der Abhandlung *Methodus generalis summandi progressiones;* Comment. acad. sc. Petrop. **6**, 1732/1733 (gedruckt 1738), sowie seine *Variae observationes circa series infinitas*; Comment. acad. sc. Petrop. **9**, 1737 (gedruckt 1744), S. 160—188.

2) Siehe die soeben zitierte Abhandlung *Variae observationes* etc., wo der Satz S. 187—188 aufgestellt und bewiesen ist.

cujus denominatores sunt omnes numeri primi, non solum esse infinitam sed etiam exprimere logarithmum hujus

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{etc.}$$

Pari modo ostendi[1]) esse

$$2 = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \text{etc.},$$

quae fractiones in se mutuo multiplicatae ita sunt comparatae, ut numeratores sint numeri pares, denominatores vero impares unitate vel majores vel minores numeratoribus, deinde ut aggregata numeratorum et denominatorum fractionum singularum sint numeri primi 3, 5, 7, etc.

Sed missis hisce circa series speculationibus novam analyseos infinitorum partem detexi,[2]) cujus Tu, Vir Celeb., primus specimen dedisti[3]) in investigandis curvis algebraicis, quarum rectificatio a data quadratura pendeat. Vocari convenit hanc partem analysin infinitorum indeterminatam, similique modo differt haec analyseos species a jam cognita, quo methodus Diophantoea ab algebra determinata. Hac autem nova analysi tales requiruntur formularum differentialium indeterminatarum determinationes, ut earum integratio vel algebraice succedat, vel a data quadratura pendeat; ita in problemate a te soluto posita abscissa x et applicata $\int p\,dx$, requiruntur valores pro p et x ut $\int p\,dx$ fiat quantitas algebraica, at $\int dx \sqrt{(1+pp)}$ a data quadratura pendeat. Hanc igitur analyseos partem jam certis legibus circumscripsi, atque in ordinem systematicum redegi, ita ut plurima problemata alias difficillima hac mea methodo facile resolvere potuerim; qualia specimina hic jam plura dedi. Pertinet huc problema, cujus jam ante aliquot annos ad Celeb. Filium Tuum[4]) mentionem feci, et quod ita se habet. Invenire (Fig. 1) duas curvas algebraicas AM et AN ad communem axem AP relatas quae non sint rectificabiles, sed quarum rectificatio a data pendeat quadratura; quae tamen hoc non obstante habeant summam arcuum $AM + AN$, qui eidem abscissae AP respondent,

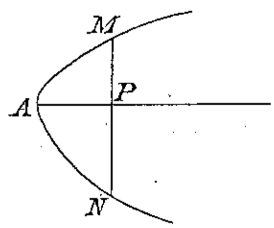

Fig. 1.

1) Siehe S. 180 der auf der vorigen Seite zitierten Abhandlung *Variae observationes* etc.

2) Vgl. die Abhandlung von Euler, *De curvis rectificabilibus algebraicis atque trajectoriis reciprocis algebraicis;* Comment. acad. sc. Petrop. 5, 1730/1731 (gedruckt 1738), S. 169—174.

3) Joh. Bernoulli, *Methodus commoda et naturalis reducendi quadraturas transcendentes cujusvis gradus ad longitudines curvarum algebraicarum;* Acta Eruditorum 1724, S. 356—366 (abgedruckt in den *Opera omnia*, T. II S. 582—592).

4) Der erwähnte Brief ist aus dem Jahre 1734 (Original in der herzogl. Bibliothek in Gotha).

rectificabilem. Hujus autem problematis sequentem methodo mea inveni solutionem.[1]) Sit q functio quaecunque ipsius p; et ponatur

$$\sqrt{(1+pp)} + \sqrt{(1+qq)} = N$$

et

$$\sqrt{(1+pp)} - \sqrt{(1+qq)} = M$$

brevitatis gratia; deinde involvat $\int P\,dp$ eam quadraturam, a qua utriusque curvae quaesitae rectificatio pendere debet, ita ut ergo q, N, M et P sint quantitates ex p et constantibus compositae, ex quibus formetur

$$t = \frac{P\,d\,p}{\text{diff.}\left(\dfrac{d\dfrac{d\frac{dM}{dp}}{d\frac{dq}{dp}}}{d\dfrac{d\frac{dN}{dp}}{d\frac{dq}{dp}}}\right)},$$

scilicet t aequatur fractioni, cujus numerator est $P\,dp$, denominator vero est differentiale fractionis, cujus numerator est $d\dfrac{d\frac{dM}{dp}}{d\frac{dq}{dp}}$ et denominator $d\dfrac{d\frac{dN}{dp}}{d\frac{dq}{dp}}$, prefixione nimirum signi d differentiale totius expressiones sequentis denotavi. Ex data hoc modo quantitate t fiat

$$s = \frac{dt}{d\left(\dfrac{d\frac{dN}{dp}}{d\frac{dq}{dp}}\right)}$$

atque porro

$$r = \frac{ds}{d\frac{dq}{dp}}.$$

Ex his denique si sumatur abscissa communis AP, $x = \frac{dr}{dp}$ erit applicata curvae AM, scilicet PM,

$$y = \frac{p\,dr}{dp} - r$$

atque alterius curvae AN applicata PN,

$$z = \frac{q\,dr}{dp} - \frac{r\,dq}{dp} + s.$$

Q. e. i. Si rectificatio utriusque curvae a quadratura hyperbolae pendere debeat, simplicissimas curvas satisfacientes fore reor has:

---

1) Vgl. die etwas einfachere Lösung in der Abhandlung von Euler *Investigatio binarum curvarum, quarum arcus eidem abscissae respondentes summam algebraicam constituunt;* Comment. acad. sc. Petrop. **8**, 1736 (gedruckt 1741), S. 23—29.

$$\text{I.} \qquad 64\,ay^3 = 27\,x^4$$

et

$$\text{II.} \quad (4\,az - 8\,xx)^3 = 729\,a^2 x^4.$$

Solutio autem, quam dedi pro isto problemate maxime universalis est, atque omnes possibiles solutiones sub se complectitur, pariter ac Tua, Vir Celeb., solutio problematis Hermanniani;[1]) dantur autem alia problemata ejusdem generis, quae hac methodo generaliter solvi non patiuntur, etiamsi innumerabiles solutiones particulares dari queant; tale est si requiratur curva algebraica cujus rectificatio a sua ipsius quadratura pendeat, qua scilicet proprietate circulus gaudet, hujusmodi curvas post circulum facile infinitas exhibere possum, quarum simplicissima mihi videtur, quae hac aequatione

$$y^2 = x^2 + \frac{5\,ax}{2} + \frac{125\,aa}{16}\,4\,x\sqrt{ax}$$

exprimitur. Generaliter autem hoc problema latissime patens resolvere possum: datis quotcunque formulis differentialibus $p\,dx$; $q\,dx$; $r\,dx$; $s\,dx$; etc. invenire quantitatem z, quae in singulas ducta, singulas reddat integrabiles.

Vale, Vir Celeberrime, meque favore Tuo constanter complectere.

Dabam Petropoli ad d. 27. Aug. 1737.

14.

Bernoulli an Euler 6. November 1737.

Antwort auf Eulers Brief vom 27. August 1737. Original verloren; Konzept in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. Veröffentlicht von Eneström im Bihang till svenska vetenskapsakademiens handlingar 5, Nr. 21 (1880), S. 15—20.

Inhalt. Die Preisschrift des Johann II Bernoulli über die Fortpflanzung des Lichtes. — Die Geschwindigkeit des Schalles. — Über den Titel der Eulerschen *Mechanica*, sowie eine Bemerkung in betreff des 89. Satzes des 1. Teiles dieser Arbeit. — Kritische Bemerkungen hinsichtlich der *Phoronomia* von J. Hermann, sowie der *Principia* von Newton. — Die Pariser Preisschriften der jüngeren Bernoullis. — Die Methoden um die Summe der reziproken Quadratzahlen zu finden. — Die Summe der Reihe

$$\frac{1}{1.2} + \frac{2}{1.3.4} + \frac{2.4}{1.3.5.6} + \frac{2.4.6}{1.3.5.7.8} + \frac{2.4.6.8}{1.3.5.7.9.10} + \text{etc.}$$

— Über die Arkustangens- und die Sinus-Reihe. — Über die unbestimmte Infinitesimalrechnung.

---

1) Die von Joh. Bernoulli gelöste Aufgabe wurde von Jacob Hermann in den Acta Eruditorum 1719 gestellt; Hermann gab auch daselbst (*Solutio propria duorum problematum geometricorum in Actis erud. 1719 mense aug. a se propositorum*) 1723, S. 171—183, also vor Joh. Bernoulli, eine Lösung. — Vgl. hierüber P. Stäckel, *Beiträge zur Flächentheorie* VII; Berichte der sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig 1902, S. 103, 105.

Viro Celeberrimo atque eximio LEONHARDO EULERO Mathematico longe acutissimo S. P. D. JOHANNES BERNOULLI.

Accepi litteras tuas novissimas 27 Aug. st. vet. datas, mihi gratissimas, et paulo ante Tomos quoque Commentariorum, qui mihi defuerant, cum opere tuo incomparabili *Mechanicam* tractante pro quibus omnibus ingentes gratias refero; de eo postmodum aliquid dicam, postquam respondero ad alia quae in litteris tuis habes. Ante omnia gratum fuit intelligere tibi non displicuisse filii mei JOANNIS dissertationem de lumine; difficultas quam invenis in ejus modo determinandi celeritatem tam luminis quam soni qui eandem pro sono dat celeritatem, quam NEUTONUS assignavit juste utique minorem, quam quae per experientiam deprehenditur, difficultas inquam ista jam diluitur in ipsa dissertatione, ubi origo ejus rejicitur in id quod fibra sonora consideratur ut linea recta, quae tamen tanquam coni acutissimi duplicis in vertice sibi oppositi figuram habens consideranda fuisset, sed quae studio non fuit adhibita, quia talis figurae consideratio deducit ad aequationem differentialem secundi gradus, quae ad differentias primas (ut fieri potest in suppositione lineae rectae) non potuit reduci in suppositione figurae conicae, sed simul monuit dissertationis auctor fibram, quae haberet figuram conicam re vera daturam esse vibrationes suas longitudinales promtiores quam dat fibra linearis, id quod per approximationem ope seriei convergentis reperiretur.

NEUTONUS, ad veram tarditatis causam non attendens, putavit eam consistere in extentione corpusculorum in aëre per intervalla natantium, quae concussiones impressas in instanti transmittant ab uno diametri suae extremo ad alterum oppositum, ita ut si cujusque corpusculi diameter ponatur $\frac{1}{8}$ vel $\frac{1}{10}$ unius intervalli, inde sequatur, majorem pro debito celeritatem (quae per experientiam observetur) prodituram; in dissertatione vero assumitur corpuscula solida infinities majus a se invicem distare quam sit longitudo unius diametri. Tua, vir celeberrime, *Dissertatio de sono* mihi non amplius ad manus est, neque omnino memini, quomodo se habeat tua methodus determinandi celeritatem soni.[1])

Opus tuum mechanicum quod nuper redditum mihi est a bibliopego nitidissime compactum, refertum utique est rebus sublimibus atque arduis, tuo ingenio ac sagacitate dignis; at nondum licuit, nisi perfunctorie tantum, illud perlustrare. Vidi te mei quoque aliquoties mentionem facere honorificam, id quod urbanitati tuae gratus attribuo.

Praefixisti tuo operi titulum *Mechanicae*, cujus rationem reddis in praefatione, sed nescio, annon aptius convenisset titulus *Dynamicae*; vox enim *Mechanicae* jam antiquitus recepta fuit pro indigitandis iis scientiis,

1) 59 Zeilen des Konzeptes sind hier gestrichen (möglicherweise von JOHANN II BERNOULLI) und unleserlich.

quae tractant de viribus mortuis, quarum scientiarum pars est quae vocatur Statica; mihi videtur non temere et citra necessitatem esse mutanda nomina atque ad alium sensum alliganda, quando praesertim suppetunt nomina notionem noviorem admodum bene significantia, quale est nomen *Dynamicae* quod Leibnitius indidit scientiae quae versatur circa ejusmodi vires, quae ipsae *vivae* vocantur. Sed hoc in transitu dictum esto.

Vidi te multum quoque esse in materia quam pertractaveram in Act. Lips. anni 1713.[1]) Non dubito, quin omnia bene enucleaveris, laudas mea pro sinceritate tua, laudas etiam quae Newtonus dedit in eadem materia, sed nihil dicis de ejus erroribus, quos ibi notaveram et demonstraveram, ipseque postea in nova editione *Princip. Philos.* ex mea admonitione partim correxit, nulla monitoris facta mentione, prolaudabili sc. Anglorum consuetudine; quosdam errores intactos reliquit aliosque de novo commisit. Perspicacia tua, vir cl., tibi detexit varios lapsus in Dynamicis eosque satis graves ab Hermanno commissos, neque tamen omnes notasti, quos ego etiam animadverti tam in Commentariis vestris, quam in ipsius *Phoronomia*, non dubitans, multo plures adhuc superesse, si tu et ego vellemus studio adhibito in illos inquirere. Bonus Hermannus plerumque fuit infelix quotiescunque ex connata sua aemulatione paria vel superiora voluit praestare iis, quae ab aliis ante ipsum inventa fuerunt; id imprimis curae cordique habuit, ne quid a me prodiret, quod ipsius vires superare videretur.

Permitte nunc, vir clarissime, ut moneam te amice de errore quodam qui tibi elapsus videtur ex mera inadvertentia; extat ille in solutione problematis quam tradis propositione 89 Tom. I pag. 300, ubi agitur de definienda vi centripeta P in orbita mobili, quam perperam invenis exprimi hac aequatione

$$P = 2aac\left(\frac{dp}{w^2p^3dy} + \frac{w^2-1}{w^2y^3} + \frac{q^2dw}{w^3y^2p^2dy}\right),$$

differt enim tam in forma quam in valore ab ea quam jam ante 6 circiter annos singulari modo calculandi inveni et quae haec est (retentis tuis symbolis et nominando ds elementum orbitae immobilis $(M)(m)$)

$$P = 2aac \times \left(\frac{w^2}{y^3} - \frac{1}{pds}d\left(\frac{q}{py}\right)\right),$$

ubi vides non ingredi dw ut in tua formula; curiosus itaque detegendi originem diversitatis examinavi attente totam tuam analysin deprehendique errorem latere in his verbis pag. 302 contentis:

1) Joh. Bernoulli, *De motu corporum gravium, pendulorum et projectilium in mediis non resistentibus et resistentibus, supposita gravitate uniformi et non uniformi atque ad quodvis datum punctum tendere, et de variis aliis huc spectantibus, demonstratio geometrica*; Acta Eruditorum 1713, S. 77—95, 115—132 (abgedruckt in den *Opera omnia*, T. I S. 515—558).

„Ex hoc vero perpendiculo cognoscitur vera corporis celeritas, erit enim

$$v = \frac{a^2 c v}{w^2 u p^2} \text{ (589).“}$$

Haec quippe propositio quam citas ex art. 589 hic non quadrat, quando nempe ratio celeritatis angularis in curva vera ad celeritatem angularem correspondentem in orbita immobili non est constans, hoc est quando w est variabile. Nosti utique veritatem Propos. art. 589 fluere ex notissima illa proprietate quod in orbitis immobilibus, per corpora ad centrum fixum attracta descriptis tempora sint proportionalia areis sectorum circumcentralium, sed statim et levi attentione hic patet elementa horum sectorum circa centrum C factorum in curva vera non posse esse proportionalia elementis tempusculorum si nimirum w non est constans, unde male concluditur, pro hoc casu esse celeritatem in curva vera reciproce proportionalem perpendiculari ductae ex centro virium C in tangentem MB: ut paucis dicam, in casu w variabilis, vis retrahens corpus a tangente MB directe non tendit ad centrum C, imo ad nullum centrum fixum tendit, sed habet, ut ita dicam, centrum lineare, hoc est centrum virium mutat locum pro quolibet novo elemento curvae verae, ut autem innotescat, quantum ex illa vi aliorsum tendente quam ad C redundet ad ipsum C centrum virium in orbita immobili, id obtinetur decomponendo more solito vim absolutam ita ut ejus pars debita dirigatur ad C, quod si rite instituatur et postea calculus dextre tractetur, prodibit mea formula

$$P = 2aac \times \left(\frac{w^2}{y^3} - \frac{1}{p\,ds} d\left(\frac{q}{py}\right)\right),$$

quae pro quocumque casu valet, sive w sit variabile sive constans, continens quoque ipsam vim centripetam pro orbita immobili, utpote ad quam extenditur supponendo tantum w esse $= 1$, sic enim evanescente motu angulari coincidit curva vera cum ipsa orbita immobili et formula mea generalis abit in hanc

$$P^1 = 2aac \times \left(\frac{1}{y^3} - \frac{1}{p\,ds} d\left(\frac{q}{py}\right)\right),$$

unde immediate elucet veritas propositionis NEWTONI *Princ. Philos.* 44 libri 1 pag. 122 Edit. secunda, quae ita sonat: *Differentia virium, quibus corpus in orbe quiescente, et corpus aliud in orbe eodem revolvente aequaliter moveri possunt, est in triplicata ratione communis altitudinis inverse* (supponit nempe rationem w ad 1 esse constantem). Nam si P^1 subtrahatur a P oritur statim

$$P - P^1 = 2aac \times \left(\frac{w^2 - 1}{y^3}\right),$$

hoc est, existente w invariabili in triplicata ratione communis altitudinis inverse. Res est clara ex formula mea, sed demonstrationem Newtonianam propter obscuritatem non satis bene intellexi. Hermannus qui idem suo modo demonstrare voluit in sua *Phoronomia* p. 97, turpem paralogismum commisit; praeterquam enim quod nullam attentionem faciat an w sit variabile an invariabile, reperiretur per ejus ratiocinium

$$P - P^1 = \left(\frac{ww - 2w + 1}{y^3}\right);$$

fons erroris et paralogismi in hoc consistit, quod admodum inepte et illicite decomponit ipsam celeritatem per bg (vid. ejus fig. 45) in duas celeritates collaterales per bm et mg, considerando hanc per mg tanquam circulum circa centrum C, quamvis aequo jure circa quodvis aliud centrum in recta bC sumtum circulatio considerari posset; praeterea quis unquam sanae mentis Geometra celeritati decompositae cum sit tantum imaginaria vel idealis attribuit tamen affectionem realem? Quid si curva vera $ANbg$ abiret omnino in lineam rectam, ita ut corpus in illa motum, nulla vi attractum moveretur celeritate aequabili, annon eodem argumento Hermanniano sequeretur circulantem celeritatem per mg circa centrum C producere vim centrifugam, quae tamen nulla esset vel in imaginatione tantum existens?

Sed in his nimius sum; hoc interim monere adhuc volui, annon corrigenda sint corollaria, quae tuae solutioni subjungis, saltem ea quae nituntur Propositione art. 589, male applicata ad casum ubi w est variabile; haec omnia examinare, cum mihi ob temporis penuriam non vacet examen instituendum tibi ipsi lubens relinquo.

Gratulationem tuam cum singulari gaudio, quod testaris, consumtam ob reportata a filiis meis praemia circa Anchoras proposita gratissimo animo accepi, tibi quoque ut omnia prospere et ex voto cedant quae suscipis, enixe apprecans.

Quae de seriebus disseris sunt omnino pulchra atque acutissimo tuo ingenio dignissima; mirifice placet altera tua methodus summandi seriem

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.},$$

quae in hoc consistit, ut statim ponas

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1}{2}\left(\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}\right)^2,$$

ex quo post operationes aliquot pervenitur ad hanc seriem

$$1 + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.5} + \frac{1}{7.7} + \text{etc.} = \frac{c^2}{8}$$

unde porro fluit

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \&c = \frac{cc}{6};$$

instituì ego calculum et successum habui asserto tuo prorsus conformem. Haec altera methodus est demonstrativa adeoque priori, quae procedit ex natura radicum in aequationibus, longe praeferenda. Ad imitationem hujus aliam quoque inveni seriem eidem $\frac{cc}{8}$ aequalem nempe hanc [1])

$$\frac{1}{1.2} + \frac{2}{1.3.4} + \frac{2.4}{1.3.5.6} + \frac{2.4.6}{1.3.5.7.8} + \frac{2.4.6.8}{1.3.5.7.9.10} + \text{etc.} = \frac{cc}{8}.$$

Potest esse factum, ut in praecedentibus meis litteris ex festinatione scripserim $\frac{c^6}{940}$ pro $\frac{c^6}{945}$, haec mihi nunc non sunt praesentia.

Quando dicis te non videre, cur ista methodus nempe prior in hac serie

$$a - t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^5 + \text{etc.} = 0$$

ad absurditatem deducat, ex eo colligo, te meam mentem non recte percepisse; volebam enim facere argumentum ad hominem contra eum, qui vellet concludere in serie sinuum ex arcubus cognoscendorum

$$x - \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1}{2.3.4.5}x^5 - \frac{1}{2.3\ldots.7}x^7 + \text{etc.}$$

contineri praecise et necessario omnes arcus possibiles eidem sinui respondentes, nullosque alios nec imaginarios nec peregrinos; quamvis re vera res ita se habeat adeoque nullam in ea aequatione esse radicem, quae non aliquem arcum quaesitum designet, hoc ergo si necessario ex istiusmodi seriebus concludi posset, simili utique modo in altera serie

$$a - t + \frac{1}{3}t^3 - \text{etc.} = 0$$

quaelibet radix t daret unam et ab aliis diversam tangentem eidem arcui a respondentem, quod certe absurdissimum foret, quia una tantum tangens uni arcui respondere potest, quando infiniti arcus communem sinum habere possunt.

Quae memoras ex nova, quam te detexisse dicis analyseos infinitorum parte, sapiunt sane profundissimam meditationem, dignam utique ut excolatur; gaudeo te agnoscere me primum ejus dedisse specimen, alludis haud dubie ad schediasma meum exhibitum in Act. Lips. 1724 m. Aug. ubi ad has tuas speculationes fundamentum posui. Tuo autem opus erat ingenio, tua sagacitate ut inde tam recondita mysteria eruerentur.

Vale, vir celeb., mihique favere perge. Bas. a. d. 6. Nov. 1737.

---

1) Vgl. Joh. Bernoulli, *Summatio seriei* $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.}$; *Opera omnia*, T. IV S. 20—25.