6.

Euler an Bernoulli 16. Mai 1729.

Antwort auf Bernoullis Brief vom 18. April 1729. Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. Einige Zeilen veröffentlicht von Eneström im Bihang till svenska vetenskapsakademiens handlingar 5, Nr. 21 (1880), S. 21, und in der Biblioth. Mathem. 1899, S. 23—24.

Inhalt. Die Logarithmen negativer Größen. — Drei Arten von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die integriert werden können. — Die kürzeste Linie auf einer Oberfläche; noch einmal ausführliche Behandlung des Falles, wo die Oberfläche konisch ist.

Viro Celeberrimo Joh. Bernoulli S. P. D.
Leonh. Euler.

Acceptis heri Festo Ascensionis Christi Tuis literis statim ad eas respondendum duxi, etsi magis deceret paulisper differe responsionem, propter literarum tuarum res tam arduas talesque ut tempore opus sit non parvo, debito modo ad eas respondendum. Tamen, cum animus sit crastina die hinc proficisci, et mensem circiter rure degere cum Cl. Filio Tuo aliisque amicis, nimis longum mihi videbatur differendae responsionis tempus. Quamobrem hoc quidem tempore respondeo quae iri promtu sunt; quae majore industria opus habent temporisque plus requirunt, rure reversus perscribam.

Quod primo scribis de logarithmis imaginariis, id mihi nondum satis est perspicuum, praecipue discrimen, quod ponis inter $l-(x)$ et $l(-x)$ nondum percipere possum, neque quo calculo ductum ad unum potius horum logarithmorum, quam ad alterum pervenire oporteat. Praeterea expressio sectoris circularis $\frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l\, \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}$ debita constante jam mihi videtur esse aucta, cum facto $x=0$ exhibeat sectorem evanescentem. Deinde si modo, nQ adjici deberet, id quod vero nondum perspicio, n mihi praeter multiplum quaternarii nihil aliud denotare posse videtur, cum demum post quatuor quadrantes percursos una revolutio absolvatur. Sin vero n, $\frac{1}{2}$ esse potest, poterit quoque $\frac{1}{4}$ et omnes numeros significare, unde superfluum est etiam $\frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l\, \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}$ adhibere, ad sectorem exprimendum, cum solum nQ sufficiat ad sectorem quemvis repraesentandum[1]). Quicquid autem sit, res ita mihi se habere videtur, ut neque Tu ex tuo conceptu, neque nos nostro hac in re in paralogismum incursuri simus.

1) Vgl. über diese Bemerkungen von Euler die Anmerkungen S. 360 und 361. Merkwürdigerweise hat Johann Bernoulli in seiner Antwort die kritischen Bemerkungen von Euler gar nicht beantwortet.

Aequationum differentio-differentialium utique tria genera ad differentiales primi gradus reducere possum quorum primum comprehendit omnes aequationes duobus terminis constantes, cujusmodi est

$$y^m ddy = x^n dx^p dy^{\,2-p},$$

quae est homogenea[1]).

Alterum genus est aequationum, in quibus alterutra indeterminata in singulis terminis eundem habet dimensionum numerum ut

$$ddx = Yx^m dx^{\,1-m} dy^{\,1+m} - \mathfrak{Y} x^n dx^{\,1-n} dy^{\,1+n} \text{ etc.}$$

quae itidem est homogenea, et in singulis terminis x unius habet dimensionis[2]). Sic se habet aequatio in schediasmate meo praelecto coram conventu, et quoniam id non amplius in manibus erat, cum postremas mandarem literas, fieri potuit ut in perscriptione harum aequationum falsus sim.

Tertium genus complectitur aequationes simili modo homogeneas, quo Tu aequationes differentiales 1^{mi} gradus tales vocare soles, ut[3])

$$ax^m y^n dx^p dy^q ddy + bx^r y^{\,m+n-r} dx^s dy^{\,p+q-s} ddy \text{ etc.}$$
$$= cx^t y^{\,m+n-1-t} dx^v dy^{\,p+q+2-v} \text{ etc.}$$

Has aequationes sic reduco, ut eas in alias transmutem, in quibus alterutra indeterminata finitae quantitatis nusquam reperitur, quae ergo facto $dy = pdx$, posito dx const., ad differentiales primi gradus reducuntur. Totum meum artificium unici casus reductione illustrasse sufficiat. Sit reducenda haec aequatio:

$$y^m ddy = x^n dx^p dy^{2-p},$$

ubi $ddx = 0$, pono

$$x = c^v \text{ et } y = c^{\frac{n+p}{m+p-1}v}\, t,$$

posito c numero cujus log. $= 1$, erit, posito brevitatis gr. $\frac{n+p}{m+p-1} = \alpha$,

$$dy = c^{\alpha v} dt + \alpha c^{\alpha v} t dv$$

et

$$dx = c^v dv$$

et

$$ddx = c^v ddv + c^v dv^2 = 0,$$

ergo

$$ddv = -dv^2,$$

1) Vgl. über diese Gleichung S. 128—130 der schon zitierten Abhandlung *Nova methodus innumerabiles aequationes differentiales secundi gradus reducendi ad aequationes differentiales primi gradus.*

2) Vgl. über diese Gleichung S. 134—136 der soeben zitierten Abhandlung, wo Euler $m - h$ statt n eingeführt hat.

3) Nur einen sehr speziellen Fall dieser Gleichung hat Euler in seiner Abhandlung (S. 130—134) behandelt.

ergo

$$ddy = c^{\alpha v}(ddt + 2\alpha dt dv + (\alpha\alpha - \alpha)\, t dv^2).$$

Quibus valoribus substitutis habebitur

$$c^{\overline{m+1}.\alpha v}(t^m ddt + 2\alpha t^m dt dv + (\alpha\alpha - \alpha)\, t^{m+1} dv^2)$$
$$= c^{(n+p+2\alpha - p\alpha)v} dv^p (dt + \alpha t dv)^{2-p}.$$

Quia vero est

$$\alpha = \frac{n+p}{m+p-1},$$

erit

$$\overline{m+1}\,.\,\alpha = n + p + 2\alpha - p\alpha.$$

Unde diviso per $c^{\overline{m+1}.\alpha v}$ restabit haec aequatio

$$t^m ddt + 2\alpha t^m dt dv - (\alpha\alpha - \alpha)\, t^{m+1} dv^2 = dv^p (dt + \alpha t dv)^{2-p}.$$

Fiat porro $dv = z dt$, erit

$$ddv = z ddt + dz dt = - dv^2 = - zz dt^2,$$

ergo

$$ddt = - z dt^2 - \frac{dz dt}{z}.$$

Ex quo fit

$$- t^m z\, dt^2 - \frac{t^m dz dt}{z} + 2\alpha t^m z dt^2 + (\alpha\alpha - \alpha)\, t^{m+1} zz dt^2$$
$$= z^p dt^2 (1 + \alpha t z)^{2-p}$$

seu

$$z^{p+1}(1 + \alpha t z)^{2-p} dt = (\alpha\alpha - \alpha) t^{m+1} z^3\, dt + (2\alpha - 1) t^m zz dt - t^m dz.$$

Quae aequatio, quia est differentialis primi gradus, si construi posset, etiam proposita

$$y^m ddy = x^n dx^p dy^{2-p}$$

construi posset. Hujus aequationis est casus specialis $yyddy = xdx^2$, quae reducta abit in hanc (ob $m = 2$, $n = 1$, $p = 2$ et inde $\alpha = 1$)

$$z^3 dt = ttzz\, dt - tt\, dz.$$ [1]

Ex hisce facile erit concludere, quomodo altera duo genera pertractem.

Aequatio Tua pro linea brevissima generalis egregie cum mea convenit, in eam enim transmutatur expressa litera T ex aequatione mea assumta

$$P dx = Q dy + R dt.$$

1) Hier hat Johann Bernoulli notiert: „Inventa relatione inter z et t, sumendum est $x = c^{\int z dt}$, et $y = c^{\int z dt} t$; caeterum ad hanc aequationem facilius pervenio methodo dudum mihi usitata ut in adjecta scheda apparet.“ Diese „scheda“ ist nicht aufbewahrt, wahrscheinlich ist ihr Inhalt für den Aufsatz in dem 4. Bande (S. 79—80) der *Opera omnia* von Johann Bernoulli benutzt worden.

Aequationem meam quidem ex natura minimi deduxi, sed aliis quibusdam modis ad eandem perveni aequationem. Problema, quod hac occasione proponis, nunc cogitationes meas occupabit, et si quid invenero proxime recensebo.

Aequationem

$$\frac{dxddx + dyddy}{dx^2 + dy^2} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$$

eodem, quo doces, modo, in dissertatione mea reduxi, sed cum viderem divisione per $dxddx + dyddy$ idem resultare, eam ob brevitatem adhibui. Ex aequatione

$$xdy - ydx = a\sqrt{dt^2 + dx^2 + dy^2}$$

non eo hanc

$$du = \frac{z\sqrt{dt^2 + dz^2}}{\sqrt{zz - aa}}$$

derivo, quo faciliorem constructu eam arbitror, sed ea commodius ad casus speciales accommodatur. Modus autem ejus eruendae ex illa, factis

$$xx + yy = zz$$

et

$$\sqrt{dt^2 + dx^2 + dy^2} = du,$$

hic est. Ob

$$xx + yy = zz,$$

est

$$xdx + ydy = zdz$$

ergo

$$xxdx^2 + 2\,yxdxdy + yydy^2 = zzdz^2.$$

Altera aequatio dat

$$du^2 - dt^2 = dx^2 + dy^2,$$

unde

$$zzdu^2 - zzdt^2 = xxdx^2 + yydx^2 + xxdy^2 + yydy^2,$$

a qua si illa auferatur restabit

$$\begin{aligned} xxdy^2 - 2yxdydx + yydx^2 &= zzdu^2 - zzdt^2 - zzdz^2 \\ &= (xdy - ydx)^2 = aadu^2, \end{aligned}$$

ergo

$$du = \frac{z\sqrt{dt^2 + dz^2}}{\sqrt{zz - aa}}.$$

Caeterum methodus mihi quoque est lineae brevissimae in superficiebus conoideis per quadraturas construendae. Aequatio mea canonica pro superficiebus conoideis haec est

$$xx + yy = T,$$

ubi T denotat functionem quamcunque ipsius t. Posito ergo

$$xx + yy = zz,$$

erit
$$T = zz,$$
ergo t aequalis erit functioni cuidam ipsius z, quam pono $\int Zdz$.

Sit jam (Fig. 1) BMC planum ad axem solidi perpendiculare et A vertex, sit porro BMC projectio lineae brevissimae in qua sit $AP = x$, $PM = y$, erit $AM = z$. Sit elementum curvae hujus

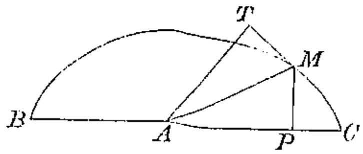

Fig. 1.

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = ds = \sqrt{du^2 - dt^2},$$
unde
$$du = \sqrt{dt^2 + ds^2} = \frac{z\sqrt{dt^2 + dz^2}}{\sqrt{zz - aa}},$$
seu $$(zz - aa)\, ds^2 = aadt^2 + zzdz^2 = aaZZdz^2 + zzdz^2,$$
ob $dt = Zdz$. Ergo
$$ds = dz\sqrt{\frac{aaZZ + zz}{zz - aa}}.$$

Demittatur ex A in tangentem MT perpendiculum $AT = p$, erit
$$ds = \frac{zdz}{\sqrt{zz - pp}} = \frac{dz\sqrt{aaZZ + zz}}{\sqrt{zz - aa}}.$$
Consequenter
$$aazzZZ - aappZZ = ppzz - aazz,$$
seu
$$p = az\sqrt{\frac{ZZ + 1}{aaZZ + zz}}.$$
Ex qua aequatione curva facile construitur.

Quod ad corpora conica attinet,[1] aequationes pro iis, sumto initio abscissarum in vertice, tales esse debent, ut variabiles t, x, y in singulis terminis eundem dimensionum numerum constituant, uti $tt = xx + yy$. De hoc dubium non est, de novo rem scrutatus sum. Inde ergo eruitur $t =$ functioni cuidam ex x et y compositae unius tantum dimensionis, erit igitur $t : x =$ functioni nullius dimensionis, ut $\frac{x}{y}$, $\frac{x}{\sqrt{xx+yy}}$, ubi in numeratore tot sunt dimensiones, quot in denominatore. Haec functio dicatur F, eritque
$$t : x = F,$$
unde
$$\frac{xdt - tdx}{xx} = dF;$$
ponatur
$$dF = Mdx + Ndy,$$

1) Das Folgende stimmt wesentlich mit dem Ende des Briefes vom 18. Februar 1729 überein (siehe oben S. 357—358).

cum F ex x et y componatur. Ex eo vero quod F sit functio nullius dimensionis, fluit esse

$$Mx + Ny = 0,$$

ergo

$$M = -Ny : x;$$

erit autem

$$xdt - tdx = Mxxdx + Nxxdy = Nxxdy - Nxydx,$$

ergo

$$(Nxy - t)dx = Nxxdy - xdt,$$

seu

$$\left(xy - \frac{t}{N}\right)dx = xxdy - \frac{xdt}{N}.$$

Erat autem canonica aequatio

$$Pdx = Qdy + Rdt,$$

quae huc traducta dabit

$$P = xy - \frac{t}{N} \text{ et } Q = xx;$$

est vero

$$N = \frac{xdt - tdx}{xxdy - xydx}.$$

His valoribus in generali aequatione pro linea brevissima, quae est

$$\frac{Qddx + Pddy}{Qdx + Pdy} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$$

substitutis, habetur[1])

$$\frac{ydtddy - tdyddy + xdtddx - tdxddx}{ydtdy - tdy^2 + xdtdx - tdx^2} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}.$$

Ponatur

$$tt + xx + yy = zz,$$

ut sit z distantia puncti cujusvis lineae brevissimae a vertice, et

$$\sqrt{dt^2 + dx^2 + dy^2} = ds$$

elementum lineae brevissimae. His substitutis, dat:

$$ds = \frac{zdsddz + dz^2ds - zdzdds}{ds^2},$$

quae integrata dat

$$\frac{zdz}{ds} = s,$$

et porro

$$ss = zz + C = tt + xx + yy + C.$$

Quae aequatio cum ea, quam alia methodo faciliori investigavi, con-

1) An der entsprechenden Stelle in der gedruckten Abhandlung von Euler ist die Gleichung auf Grund eines Versehens unrichtig. Dort ist nämlich (S. 120) das linke Glied:

$$\frac{yxdtddx - tydxddx - txdyddy + xydtddy}{yxdtdx - tydx^2 + txdy^2 - xydtdy}.$$

gruit, neque usquam paralogismum deprehendere potui. Hic ergo hanc epistolam finio, alio tempore uberius hac de re scripturus.

Vale itaque, Vir Celeberrime, mihique favere perge atque Tibi persuade me Tui esse observantissimum.

Petropoli die 16. Maj.
A. 1729.

7.

Euler an Bernoulli 21. Oktober 1729.

Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm.

Inhalt. Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung. — Tautochrone und isochrone Kurven. — Reihe, deren allgemeines Glied $1 . 2 . 3 \ldots . n$ ist, und das Glied dieser Reihe, das $n = \frac{1}{2}$ entspricht.

Vir Excellentissime Celeberrime.

In ultimis Tuis, quas ad Clar. Filium dedisti, literis mentionem fecisti methodi meae innumerabiles aequationes differentiales secundi ordinis ad primum reducendi, quibus Te quoque, Vir Celeberrime, earumdem reducendarum modo potiri significasti. Hoc ni fallor, exemplum attulisti

$$a x^m d x^p = y^n d y^{p-2} d d y,$$

cui semper aequatio quaedam parabolica satisfacere Tibi observata sit. Hic quidem casus est particularis, nam aequatio differentio-differentialis, ut Tute innuis, multo latius patet. Exponam hic universalem ejus reductionem, ut cum Tuis conferre possis[1]). Pono

$$x = c^{(n+p-1)\int z dt} \text{ et } y = c^{(m+p)\int z dt} t,$$

ubi c denotat numerum cujus logarithmus hyperbolicus est 1. His factis substitutionibus, exponentialia per divisionem tolli poterunt, et si dx ponitur constans, aequatio tantum differentialis emerget, haec

$$a(n+p-1)^p z^p t = t^n (1+(m+p)tz)^{p-2} [-\frac{dz}{z} + (2m-n+p+1) z dt + (m+p)(m-n+1) t z^2 dt].$$

Quae si construi poterit, etiam aequationis differentio-differentialis constructio in promptu erit. Simili modo reliquas, de quibus scripsi, aequationes reduco.

Habeo praeterea, Vir Celeb. quaedam, quae ad tautochronas spectant, Tibi explicare, quae haud displicitura spero. Incidi nuper in hanc ques-

1) Vgl. S. 128—130 der Eulerschen Abhandlung *Nova methodus innumerabiles aequationes differentiales secundi gradus reducendi ad aequationes primi gradus.*

tionem, quomodo data curva, in qua fit descensus corporis in vacuo tantum, aliam inveniri oporteat ei jungendam, in qua ascensus fiat ut omnes oscillationes absolvantur eodem tempore. Ut data (Fig. 2) curva BA, requiritur altera AC eiusmodi, ut corpus super BAC oscillans integras oscillationes perficiat eodem tempore, utut eae sint inaequales. Hic statim perspicuum est, si altera fuerit semicyclois, et alteram talem fore. Problema hoc Clar. Filio Tuo communicavi simulque cum eo in illo operam collocavi. Solutionem vero et ipse et ego

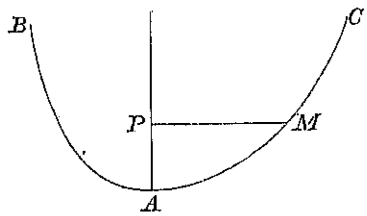

Fig. 2.

statim post adepti sumus, eamque coram societate proposuimus[1]). Mihi quoque haec meditanti ejus conditionis in mentem venit, ut inquirerem, quibus casibus hae duae curvae sint partes ejusdem curvae continuae. Non difficile quidem erat innumerabiles hujusmodi curvas invenire quae oscillationes reddant isochronas, sed algebraicas curvas eruere minus facile visum erat. Assecutus autem sum[2]) unicam algebraicam quae est quarti ordinis et dictis AP, x; PM, y, hac exprimitur aequatione

$$81\,y^4 \pm 54\,a y^3 - 216\,axyy - 256\,ax^3 + 9\,aayy - 72\,aaxy + 48a^2xx - 9\,a^3x = 0,$$

in qua $\frac{1}{2}\,a$ significat longitudinem penduli isochroni. Hujusmodi ergo curvae, quarum numerus est infinitus, aeque sunt tautochronae atque cyclois, cum oscillationes integrae omnes sint aequalis durationis. Sed hoc differt inter eas et cycloidem, quod in hac etiam dimidiae oscillationes a puncto infimo sumtae sint isochronae, quod ibi locum non habet. Ad usum vero pendulorum omnes debent esse aequaliter idoneae.

In hac questione tali usus sum methodo, quae omnes prorsus casus complectatur, quod non exigui hac in re momenti mihi esse videtur, cum inde simul demonstrationem sim assecutus, praeter cycloidem nullam aliam curvam hoc modo tautochronismum producere posse, id quod ante Cl. Filio Tuo non penitus certum visum est. Non alio autem usus sum principio nisi hoc ut tempus oscillationis debeat esse constans, sive ut in functionem

1) Vergl. die Abhandlungen von Euler: *De innumerabilibus curvis tautochronis in vacuo;* Comment. acad. sc. Petrop. 4, 1729 (gedruckt 1735), S. 49—66; *Quomodo, data quacumque curva, invenire oporteat aliam, quae cum data quodammodo juncta ad tautochronismum producendum sit idonea;* daselbst 5, 1730/1731 (gedruckt 1738), S. 143—159, und *Solutio singularis casus circa tautochronismum;* daselbst 6, 1732/1733 (gedruckt 1738), S. 28—36.

2) Vgl. S. 63 der soeben zitierten Abhandlung *De innumerabilibus curvis tautochronis in vacuo.*

tempus exprimentem, nulla quantitas quae ab arcu descripto pendet, ingrediatur. Ex quo deinde deduxi, quale debeat esse elementum temporis. Et sane haec methodus hoc utilitatis mihi praestitit, ut etiam tautochronam in medio secundum quadrata velocitatum resistente invenerim.[1])

Sit (Fig. 3) curva AMC talis, ut globus super ea descendens semper aequali tempore ad infimum punctum A perveniat. Hujus sequentem inveni aquationem:[2])

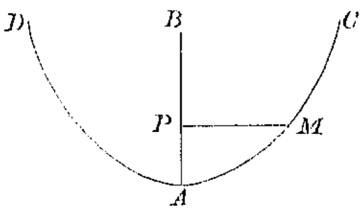

Fig. 3.

$$8m^2asds + 3(m-n)nfxds$$
$$= 8(m-n)mafdx,$$

in qua s denotat arcum quemvis AM, x respondentem abscissam AP, a diametrum globi oscillantis, f longitudinem penduli dimidias oscillationes aequali tempore absolventis, et m ad n rationem gravitatum specificarum globi et fluidi. Curva haec CMA ultra A continuatur in AD, quae hanc habet proprietatem, ut omnes ascensus super ea sint isochroni. Ex quo intelligitur omnes oscillationes super curva CAD esse isochronas, dum descensus super CA et ascensus super AD fiant. Hinc ejus quoque problematis, quod in vacuo proposui, solutionem sum nactus. Infinitos nimirum casus binarum curvarum jungendarum dare possum, super quibus oscillationes fiant isochronae. In aliis quidem medii resistentes hypothesibus methodo mea idem nondum assequi potui; cujus rei ratio est, quod ibi mobilis velocitas finite exprimi non possit, quemadmodum, si resistentia quadrato velocitatis proportionalis est, fieri potest.

Unicum adhuc, Vir Excellentissime, quod ad progressiones attinet nunciandum restat. Agitata est a Clar. GOLDBACHIO in literis ad Clar. Filium Tuum datis[3]) haec progressio

$$1,\ 1.2,\ 1.2.3,\ 1.2.3.4. \text{ etc. seu } 1,\ 2,\ 6,\ 24,\ 120 \text{ etc.},$$

cujus ut termini medii determinarentur, requirebat. Variis quidem modis et ipse et Filius Tuus iis proximos dederunt. Verum tautochronis

1) Siehe die Abhandlung von EULER, *Curva tautochrona in fluido resistentiam faciente secundum quadrata celeritatum;* Comment. acad. sc. Petrop. 4, 1729, S. 67—89.

2) Vgl. S. 77 der soeben zitierten Abhandlung *Curva tautochrona in fluido resistentiam faciente secundum quadrata celeritatum.*

3) Die Frage wurde zum ersten Mal gestellt in einem Briefe von CHR. GOLDBACH an DANIEL BERNOULLI vom 18. November 1728 (siehe FUSS, a. a. O. II, S. 273). Vgl. noch über diese Frage FUSS, a. a. O. II, S. 278, 283, 285, 325, 328.

quaerendis in modum incidi eosdem accurate inveniendi.[1]) Terminum enim ordine $\frac{1}{2}$ aequalem esse demonstrare possum lateri quadrati circulo aequalis cujus diameter $= 1$. Hujus sesquialterum dat terminum ordine $1\frac{1}{2}$, unde reliqui exponentium $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$ etc. invenientur.

Haec igitur sunt, Vir Celeberrime, quae hoc tempore judicio Tuo submittere volui, quae si placuerint accuratius sum expositurus.

Vale et favere perge, Vir Excellentissime Celeberrime,

Dabam Petropoli d. 21. Octobr.
A. C. 1729. Tibi Obstrictissimo Eulero.

Aufschrift:

A Monsieur
Monsieur Jean Bernoulli
Très Celebre Professeur des Mathematiques
à
Bâle.

8.

Bernoulli an Euler 17. Dezember 1729.

Antwort auf Eulers zwei Briefe vom 16. Mai und 21. Oktober 1729. Original verloren; Konzept in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. Veröffentlicht von Eneström im Bihang till svenska vetenskapsakademiens handlingar 5, Nr. 21 (1880), S. 10—15.

Inhalt. Integration zweier Differentialgleichungen zweiter Ordnung. — Bemerkung über eine dritte von Euler erwähnte Gleichung zweiter Ordnung. — Tautochrone und isochrone Kurven. — Über die Reihe, deren allgemeines Glied $1.2.3 \ldots n$ ist.

Viro Cel. Leonhardo Eulero S. P. D. Joh. Bernoulli.

Egregia sunt quae habuisti in binis litteris ad me postremo datis; cum autem novissimas ante paucos demum dies acceperim, brevis ero in mea responsione, atque communicabo vicissim quae ea occasione inveni, etsi breve admodum meditandi spatium concessum fuerit. Quod attinet ad reductionem hujus aequationis differentio-differentialis[2])

$$y^m ddy = q x^n dx^p dy^{2-p},$$

eam tum temporis cum acciperem anteriores tuas litteras, ita obtinui: Posui statim $y = tx^a$, ut et valores ex hac suppositione prodeuntes ipsarum dy et ddy (supposito $ddx = 0$) substitui in aequatione proposita. In aequatione transmutata posui porro $dx = xzdt$, ita ut inde emergat

1) Vgl. die Abhandlung von Euler, *De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt;* Comment. acad. sc. Petrop. 5, 1730/1731 (gedruckt 1738), S. 36—57.

2) Vgl. den Aufsatz von Johann Bernoulli „Reductio aequationis $y^m ddy = qx^n dx^p dy^{2-p}$ ad aequationem differentialem primi gradus, ubi supponitur $ddx = 0$" in seinen *Opera omnia* T. IV, S. 79—80.

aequatio continens nullum dx, sed quae constet tribus indeterminatis x, t & z, quare ut eliminetur x, ponendae sunt (te quoque ita observante) exponentes ejus dimensionum ubique aequales, & hoc modo invenitur conditio ipsius a, nempe

$$a = \frac{n+p}{m+p-1};$$

sequestratis itaque x ex singulis terminis, superest aequatio duabus tantum indeterminatis t et z constans, quae erit tantum primi gradus. Curva ergo ei conveniens, si qua arte construi potest, dabit coordinatas z et t, ex quibus habentur valores ipsarum x et y, nimirum

$$x = c^{\int z\,dt}, \text{ et } y = t c^{\frac{n+p}{m+p-1}\int z\,dt},$$

ubi etiam c est numerus cujus logarithmus $= 1$. Fortassis non absimili modo invenisti tuum x et y, quando sumere jubes

$$x = c^{(n+p-1)\int z\,dt}, \text{ et } y = c^{(m+p)\int z\,dt}\,t.$$

Vides tunc rem peractam per substitutiones mihi primo dudum usitatas. In casibus quibusdam particularibus possunt separari z et t, sed non sine aliqua dexteritate. Sic pro hoc exemplo, quod satis memorabile est[1])

$$xxddy = qydx^2,$$

invenio aequationem finitam hanc

$$y = bx^{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{q + \frac{1}{4}}\right)} + cx^{\left(\frac{1}{2} - \sqrt{q + \frac{1}{4}}\right)},$$

ubi b et c sunt coefficientes arbitrarii, quae omnino fit algebraica, si $\sqrt{q + \frac{1}{4}}$ est rationale. Caeterum aequatio parabolica quae semper satisfacit, haec est

$$(n - m + 1)\,y^{m+p-1} = (q(n+p)^{1-p} \times (m+p-1)^p)\,x^{n+p}.$$

Licet autem illa non omnes possibiles curvas complectatur, ideo tamen non est contemnenda, quia saltem solvit aequationem propositam et quidem semper per aequationem finitam[2]), etiam iis in casibus ubi in formula

---

1) Mit dieser Gleichung hatte sich Johann Bernoulli schon 1716 beschäftigt, wie aus seinem Briefe an Leibniz vom 20. Mai 1716 hervorgeht; eine weit allgemeinere Gleichung derselben Art hatte er nach eigener Angabe schon vor 1700 integriert (vgl. Biblioth. Mathem. 1898, S. 58—60). Es ist aber zu bemerken, daß für die im Texte angegebene Gleichung

$$n = -2,\ p = 2,\ m = -1,$$

so daß

$$\frac{n+p}{m+p-1} = \frac{0}{0};$$

die von Johann Bernoulli angegebene Methode ist also in diesem Falle nicht anwendbar. Vgl. hierüber Johann Bernoulli, *Opera omnia* T. IV, S. 81—83.

2) Auch hier ist zu bemerken, daß die fragliche Gleichung für den von Johann Bernoulli behandelten Spezialfall die Form $0 = 0$ annimmt.

generali indeterminatae t et z videntur inseparabiles, adeo ut pro constructione parum utilitatis allatum sit, rem reduxisse ad differentias primas.

Non satis intelligo in penultimis tuis literis, quam requirant conditionem duo altera genera aequationum, in quorum prioris generis aequationibus vis ut alterutra indeterminata in singulis terminis eundem habeat dimensionum numerum, cujus exemplum quod affers, hoc est

$$ddx = Yx^m dx^{1-m} dy^{1+m} + \mathfrak{Y} x^n dx^{1-n} dy^{1+n} \text{ \&c},$$

quam dicis *itidem esse homogeneam & in singulis terminis x unam habere dimensionem*, cum tamen utrobique x nec unam nec eandem habeat dimensionem; tertii generis exemplum, quod mentem tuam illustrare deberet, simili laborat obscuritate, praeterquam quod exponentes differentialium ita se habeant & reddant quantitates heterogeneas & ideo incomparabiles; oportet itaque ut te explices clarius, si ea de re judicare debeam.

Speculationes tuae de tautochronis mirifice quidem placent, sed illud quod proponis inveniendum, *data scilicet qualicumque curva, invenire aliam ei jungendam, per quam utramque oscillationes integrae sint isochronae in vacuo,* non admodum difficile est, nam statim ac legi e vestigio solvi adeoque non mirum est, si idem & Tu & filius meus solvistis. Tota res huc redit ut (Fig. 4) ad axem AG verticalem curvae datae ABH constituatur arcus cycloidalis AEF, verticem habens in A, et postmodum quaeritur alia curva ACL, ejus naturae, ut ducta quavis horizontali EC, secante curvas & axem in punctis E, B, C & P, arcus compositus BAC sit semper aequalis arcui cycloidico EA, ab eadem horizontali EC resecto vel sit ejusdem multiplex qualiscumque. Ducta enim proxima parallela ec, erit $Bb + Cc = Ee$ vel $n \times Ee$; concipiuntur jam duo mobilia cadere ex eodem horizonte FL, unum incipiens ab F, alterum ab H, habebunt illa in punctis E, B & C velocitatem aequalem, quae est $\sqrt{GP}$; erit igitur

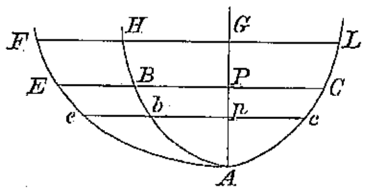

Fig. 4.

$$\frac{Bb + Cc}{\sqrt{GP}} = \frac{Ee}{\sqrt{GP}}, \text{ vel} = \frac{n \times Ee}{\sqrt{GP}},$$

unde tempuscula duo per Bb & per Cc simul sumta sunt = tempuscula per Ee vel hujus multiplo, ideoque tempus per arcum compositum BAC = tempori per arcum cycloid. EA vel = hujus temporis multiplo; quandoquidem igitur tempora per singulos arcus cycloidales EA sunt aequalia, erunt etiam tempora per singulos arcus combinatos BAC aequalia h. e. oscillationes integrae (descensu et ascensu simul peragendo) sunt isochronae etiamsi tempus per descensum sit inaequale tempori per ascensum. Quod nunc attinet ad modum id praestandi, ut duo arcus BA & AC faciant arcus unius ejusdemque curvae continuae BAC, & ut quaeratur talis BAC quae sit algebraica, de quo ita loqueris, quasi Tu solus id praestiteris, ita ut nesciam annon in solutione harum duarum posteriorum conditionum habueris etiam socium filium meum aeque ac in priori, cujus solutionem ipsi non minus quam Tibi adscribis. Etenim hisce quoque conditionibus satisfacere haud adeo difficile deprehendes, ubi ante omnia hoc dico, in inquisitione hujus non opus esse ea quam innuis cautela, *ut nimirum in functionem tempus exprimentem nulla quantitas, quae ab arcu descripto pendet, ingrediatur.* Quin imo ego contrarium facio, dum curvam BAC determinaturus, assumo pro longitudine arcus AB vel AC, aliquam functionem convenientem solius arcus cycloidalis AE, quae functio id praestet, ut arcus illi duo AB et AC inde mutuo continuentur ex suppositione arcus AE negative sumti; sic post superiorem meam solutionem tempus non amplius in considerationem venit; ecce ergo meam methodum. Sit arcus cycloidis $AE = s$, fiatque ad lubitum aliqua ejus functio $= S$, quae componatur ex meris potentiis ipsius s dimensionum parium. Quo facto ponatur arcus $AC = s + S$, erit utique idem ille continuatus in partem oppositam seu negative sumtus $AB = -s + S$, adeoquo arcus ipse absolute seu affirmative sumtus $AB = s - S$. Hinc $AC + AB$ seu curva tota continua $CAB = 2s = 2AE$. Ergo curva CAB vel BAC erit isochrona. Q. E. I.

Restat ut modum ostendam naturam curvae exprimendi per aequationem inter coordinatas AP & PC, seu inter x et y ex assumta functione S, quod non est arduum. Differentietur S, voceturque $dS = Tds$; sit diameter circuli generatoris cycloidis $AEF = \frac{1}{4}a$, erit arcus AE seu $s = 2\sqrt{\frac{1}{4}.ax} = \sqrt{ax}$, unde $ds = \frac{1}{2}dx\sqrt{\frac{a}{x}}$ & dS seu $Tds = \frac{1}{2}Tdx\sqrt{\frac{a}{x}}$, adeoque

$$Cc = ds + dS = \frac{1+T}{2}dx\sqrt{\frac{a}{x}},$$

a cujus quadrato

$$\frac{1+2T+TT}{4x}adx^2$$

auferatur quadratum Pp seu dx^2, erit radix quadrata reliqui

$$dx\sqrt{\frac{a+2aT+aTT-4x}{4x}} = dy,$$

id quod dat aequationem pro natura curvae AB, quae ut algebraica fiat, id quidem dependet ab electione quantitatis liberae S; sumamus ergo $S = ss:a$ utpote simplicissimam inter functiones ipsius s praescriptam conditionem habentes; eritque $dS = Tds = 2sds : a = dx$, et $T = 2s : a = 2\sqrt{\frac{x}{a}}$; quibus substitutis in aequatione generali

$$dx\sqrt{\frac{a + 2aT + aTT - 4x}{4x}} = dy,$$

abit illa in hanc

$$dx\sqrt{\frac{a + 4\sqrt{ax}}{4x}} = dy,$$

quae ut commode integrari possit, scribatur tantisper (quod quidem jam supra fieri potuisset) $\frac{ss}{a}$ pro x, $\frac{2sds}{a}$ pro dx, et s pro $\sqrt{ax}$, & tunc habebitur

$$ds\sqrt{\frac{a + 4s}{a}} = dy,$$

cujus integrale

$$\tfrac{1}{6}\,\overline{a + 4s}\,\sqrt{\frac{a + 4s}{a}} = y + \tfrac{1}{6}a,$$

seu

$$(a + 4s)^{\frac{3}{2}} = (6y + a) \times \sqrt{a};$$

resubstituto pro $4s$ ejus valore $4\sqrt{ax}$ prodibit aequatio algebraica inter coordinatas x & y, quae haec est

$$(a + 4\sqrt{ax})^{\frac{3}{2}} = (6y + a) \times a\sqrt{a}.$$

Haec autem sublata asymmetria producit accurate tuam aequationem

$$81y^4 + 54ay^3 - 216axyy - \&c = 0.$$

Coroll. Hinc patet quia diameter circuli generatoris cycloidis $= \frac{1}{4}a$, fore pendulum simplex longitudini $\frac{1}{2}a$ isochronum cum oscillatione integra per curvam BAC vel CAB. Quod ad tautochronas in medio secundum quadrata velocitatum resistente spectat, non vacavit per paucos hos dies de solutione hujus casus cogitare, verum ubi per otium licuerit, tentabo, neque de successu despero.[1]) Interim quando de tua inventa curva dicis, quod descensus per CA sibi invicem sint isochroni, pariterque etiam isochroni sint ascensus per AD, non addis, an etiam isochroni fiant regressus, h. e. descensus per DA & ascensus per AC, hoc enim omnino necessarium esset ad reciprocationem oscillationum.

Non habeo multum quod addam de progressione

$$1,\ 1.2,\ 1.2.3,\ 1.2.3.4,\ \&c.,$$

de qua dicis te habere modum accurate determinandi terminos medios, sed definiendum fuisset, quid per terminos medios intelligendum sit; idea

1) Vgl. die Abhandlung von Johann Bernoulli, *Méthode pour trouver les tautochrones dans les milieux résistans comme le quarré des vitesses* (Mém. Paris 1730, S. 78—101 = *Opera omnia* III, S. 173—197).

enim hujus rei nimis est vaga. WALLISIUS in sua *Arithmetica infinitorum* adhibet suas interpolationes pro simili negatio & ni fallor eandem hanc rem jam pertractavit.

Vale. Dabam Basil. a. d. XVII. Xbr. 1729.

9.

Euler an Bernoulli 11. Juli 1730.

Antwort auf BERNOULLIS Brief vom 17. Dezember 1729. Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. Einige Zeilen veröffentlicht von ENESTRÖM im Bihang till svenska vetenskapsakademiens handlingar 5, Nr. 21 (1880), S. 22—23.

Inhalt. JOHANN BERNOULLIS französische Preisschrift. — Drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung. — Tautochrone und isochrone Kurven. — Lösung zweier von JOHANN BERNOULLI gestellter Probleme, von denen das erste eine Verallgemeinerung der Aufgabe von der kürzesten Linie auf einer Oberfläche enthält, das andere sich auf die Bewegung eines Körpers bezieht, der sich auf einer in einer beweglichen Vertikalebene liegenden Kurve bewegt. — Eine Differentialgleichung erster Ordnung.

Vir Excellentissime Celeberrime.[1])

Iam pridem officium meum fuisset ad postremas literas Tuas respondere, idque maxime eo tempore, quod ad nos fama pervenit de praemio Parisino[2]) Tibi adjudicato. Sed variae occupationes me impediverunt, quominus ea, quae scribere statueram, perficere potuerim. Solam vero gratulationem mittere non volebam. Praecipuam enim causam hujusmodi gratulationum praestantiam ingenii esse existimo, ex qua orta est ea disquisitio, quae optima est pronunciata. Neque vero haec laus in Te, Vir Celeberrime, competit; sed in eos praesertim, qui ex ea famam de se divulgari quaerunt. Quicquid autem est, quo Te hoc judicio auctum esse sentis, de eo ex animo gratulor, atque ut idem Tibi adhuc saepenumero usu veniat, vehementer exopto.

Aequationem $xxddy = qydx^2$ sine methodo mea, qua hujusmodi aequationes omnes, si fieri potest, vel reduco vel integro, sequenti modo, nulla adhibita substitutione, statim integravi. Addo utrinque terminum $\alpha xdxdy$ et multiplico der x^n. Hoc facto quaero, qui numeri α et n esse debeant[3]) aequationis

1) Am oberen Rande der ersten Seite des Briefes finden sich die folgenden Worte von EULER: „Vorigen Posttag hat Herr Prof. BERNOULLI von hier auch geschrieben, welche er mich gebetten zu berichten".

2) Im Jahre 1730 hatte JOHANN BERNOULLI für die von der Pariser Akademie der Wissenschaften gestellte Frage über die Ursachen der elliptischen Gestalt der Bahnen der Planeten und der Veränderung der Aphelien den Preis bekommen. Die Abhandlung ist unter dem Titel: *Nouvelles pensées sur le système de M. DESCARTES et la manière d'en déduire les orbites et les aphélies des planètes* gedruckt.

3) Hier spielt also x^n die Rolle eines integrierenden Faktors. Vor 1730 hatte sich JOHANN BERNOULLI zweimal eines solchen bedient (vgl. CANTOR, *Vorles. über Gesch. d. Mathem.* 3^2, S. 227 und ENESTRÖM, Biblioth. Mathem. 1898, S. 58), aber davon hatte EULER wahrscheinlich keine Kenntnis.

$$\alpha x^{n+1} dx dy + x^{n+2} ddy = g x^n y dx^2 + \alpha x^{n+1} dx dy,$$

ut utrumque membrum integrari possit. Inveni autem

$$\alpha = \tfrac{1}{2} + \sqrt{g + \tfrac{1}{4}} \text{ et } n = -\tfrac{3}{2} + \sqrt{g + \tfrac{1}{4}},$$

et integratione facta prodit haec aequatio

$$\left(\tfrac{1}{2} + \sqrt{g + \tfrac{1}{4}}\right) x^{-\frac{1}{2} + \sqrt{g + \frac{1}{4}}} y dx = b dx + x^{\frac{1}{2} + \sqrt{g + \frac{1}{4}}} dy;$$

haec divisa per

$$x^{-\frac{1}{2} + \sqrt{g + \frac{1}{4}}}$$

dat

$$\left(\tfrac{1}{2} + \sqrt{g + \tfrac{1}{4}}\right) y dx - x dy = b x^{\frac{1}{2} - \sqrt{g + \frac{1}{4}}} dx.$$

Multiplicetur per

$$x^{-\frac{3}{2} - \sqrt{g + \frac{1}{4}}},$$

integrari poterit aequatio atque resultabit

$$c - x^{-\frac{1}{2} - \sqrt{g + \frac{1}{4}}} y = - b x^{-2\sqrt{g + \frac{1}{4}}}$$

(posui tantum b pro $\dfrac{b}{2\sqrt{g + \frac{1}{4}}}$), porroque haec

$$y = b x^{\frac{1}{2} - \sqrt{g + \frac{1}{4}}} + c x^{\frac{1}{2} + \sqrt{g + \frac{1}{4}}}.$$

Quando dico in aequatione

$$ddx = Y x^m dx^{1-m} dy^{1+m} + \mathfrak{Y} x^n dx^{1-n} dy^{1+n} + \text{ etc.}$$

indeterminatam x unicam dimensionem habere in singulis terminis, non tantum x sed etiam dx et dxx unam dimensionem ipsius x efficere intelligi volo. Sic in termino $Y x^m dx^{1-m} dy^{1+m}$ numerus dimensionum ipsius x non est m sed $m + 1 - m$ seu 1 ut in primo termino ddx.

Nescio quomodo factum est, ut aequatio tertii generis, quam perscripseram, sit absurda, puto me ita scripsisse

$$a x^m y^{-m-1} dx^p dy^{2-p} + b x^n y^{-n-1} dx^q dy^{2-q} + \text{etc.} = ddy,$$

in qua nullam heterogeneitatem deprehendere possum. Atque in ea x, y, dx, dy, ddy in singulis terminis eundem dimensionum numerum tenent nempe 1.

Quae de pluribus tautochronis novis in vacuo scripsi, utique facilia sunt, et propterea non tam methodum, quam rem ipsam aestimandam esse puto. Non dubito, quin Filius Tuus Clar. problematis casum, quo utraque curva est una continua, solverit statim, si de eo cogitasset; sed quia hujus casus ei in mentem non venit, factum est, ut de his novis tautochronis tanquam ad me solum pertinentibus loquutus sim. Casus vero hujus, quo utraque curva debet esse continua, solutio Tua, Vir Celeberrime, prorsus cum ea, qua usus sum, congruit. Quod ad tautochronam in medio secundum quadrata celeritatum resistente attinet, quam in postremis literis Tecum communicavi, ea tantum oscillationes versus eandem plagam euntes reddit isochronas, revertentes vero tales non sunt. Propterea igitur ad usum pendulorum more consueto accommodata non est idonea. Nihilo tamen minus augmentum quoddam ea re Analysi accesisse arbitror, propter peculiarem atque latissime patentem methodum, qua in ea invenienda sum usus. Si vero utilitas in praxi desideratur, eadem methodo curvam determinavi, in qua pendulum oscillans binas oscillationes ex itu penduli et reditu constantes semper absolvit aequalibus temporibus, quamvis neque soli itus neque reditus sint isochroni.

In ultimis ad Cl. Filium datis literis me admonere jussisti de problemate mihi in prioribus literis proposito, ut ejus solutionem, si quam invenire possum scriberem. Is vero simul mihi aliud elegans problema te auctore proposuit de definiendo motu corporis super plano inclinato mobili. Utriusque problematis solutionem hic appono.

Problema primum, cujus solutionem jam diu investigare debuissem, est hoc: In superficie cujuscunque solidi lineam ducere hujus naturae, ut planum, in quo sita sunt duo elementa contigua, cum plano tangente superficiem in eo loco angulum datum efficiat.[1]) Solutio mea haec est. Sit (Fig. 5) curva quaesita BM. Assumto plano quocunque APQ pro lubitu, in eoque recta AP tanquam axe, demittatur ex puncto quocunque curvae quaesitae M in planum APQ normalis MQ, et ex Q ad AP etiam normalis QP. Dicantur AP, x, PQ, y et QM, z. Exposita sit natura superficiei datae, in qua est curva BM, aequatione inter tres indeterminatas x, y, z, quae sit haec

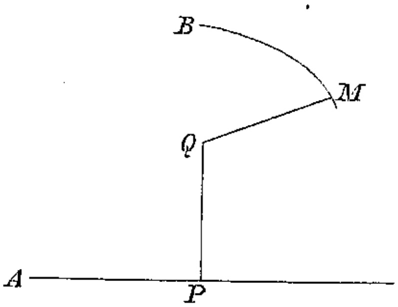

Fig. 5.

$$Pdx = Qdy + Rdz.$$

1) Vgl. über dies Problem Johann Bernoulli, *Opera omnia* T. IV, S. 113—114. Bernoulli gibt als Gleichung der gesuchten Kurve

$$(Tdx^2ddz - zds^2ddy + Tdydzddy)\sqrt{ds^2 + dz^2}$$
$$= nzds^2dxddz - nTdydxdzddz + nTdxddy(ds^2 + dz^2),$$
$$\text{wo } ds^2 = dx^2 + dy^2,\ T = -\frac{zR}{Q},\ n = \frac{1}{q}$$

und ds als konstant angenommen wird.

His positis inveni anguli plani curvae cum plano tangente in M cotangentem esse

$$= \frac{Pdyddz - Pdzddy + Qdxddz - Rdxddy}{(Qddy + Rddz)\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

posito sinu toto $= 1$. Si ergo requiratur, ut haec cotangens sit q, erit,

$$Pdyddz - Pdzddy + Qdxddz - Rdxddy$$
$$= (Qddy + Rddz)\, q\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2};$$

ex qua aequatione cum locali superficiei

$$Pdx = Qdy + Rdz$$

conjuncta determinabitur curva quaesita. Si requiratur, ut dictus angulus ubique sit rectus, erit $q = 0$ habebiturque aequatio

$$P(dyddz - dzddy) = Rdxddy - Qdxddz,$$

quae est ea ipsa, quam pridem pro linea brevissima inveni.

Alterum problema generalius quam mihi erat propositum solvi hoc sensu. Super plano horizontali (Fig. 6) BC sit perfecte mobilis curva $AMCB$. Super ejus parte convexa AMC descendat pondus quod ad pondus figurae $AMCB$ rationem habeat ut C ad Δ. His positis requiritur motus utriusque et ponderis descendentis et figurae horizontaliter progredientis.[1] Inveni autem corpus revera propter figuram cadentem moveri in curva AND cujus applicata PN ad respondentem PM habet rationem constantem; est nimirum $PN : MN = \Delta : C$. Tangentes ergo ex M et N ductae concurrent in T puncto axis AB producti. Est autem celeritas corporis A in N ad celeritatem figurae ABC ut NT ad MN. Sumta vero PO media proportionali inter PN et PM ductaque TO, erit celeritas corporis in N ad celeritatem, quam haberet, si ex altitudine AP libere cecidisset, ut NT ad OT.

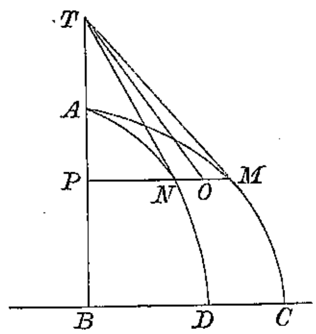

Fig. 6.

1) Das von Johann Bernoulli gestellte Problem war: Sit ACK triangulum materiale, rectangulum in K, quod super plano horizontali DH sine omni frictione moveri possit. Sit etiam corpus grave m, quod super hypothenusa AC positum sua gravitate descendat, pariter sine frictione; quo fiet ut, descendente corpore m, triangulum jugiter ab eo pressum retrocedere cogatur. Quaeritur tunc corporis, tum

Solutionem quidem hanc non ex principiis mechanicis et effectu sollicitationum gravitatis deduxi. Principia, quibus usus sum, sunt haec duo. I. Vim vivam, quae adest, si corpus est in N tam in corpore quam in figura, equivalere vi vivae, quam solum corpus haberet, si ex altitudine AP libere cecidisset. II. Hanc vim vivam ita distribui inter corpus et figuram ABC, ut corpus minimo tempore ad lineam horizontalem BC perveniat, vel ut corpus celerrime descendat. Hac vero solutione non contentus, quaero genuinam, eamque mox invenire spero.

Incidi nuper in hanc aequationem

$$ccdz - zzdz - xzdx = cdx\sqrt{xx + zz - cc},$$

quae est ad curvam quandam tautochronam. Eam construere possum, sed tamen nullo modo adhuc indeterminatas a se invicem separare potui. Ejusmodi praeterea innumerabiles dare possum, quarum omnium constructiones habeo, neque tamen vix eas separare spero.

Vale et favere perge

Vir Excellentissime Celeberrime

Petropoli d. 11. Julii 1730.

Tuo obstrictissimo

L. Eulero.

10.

Euler an Bernoulli 25. Mai 1731.

Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm.

Inhalt. Vorläufiger Bericht über eine mathematische Theorie der Musik.

Hochedelgebohrner Hochzuehrender Herr.

Dass ich so lange Zeit an Ew. Excellenz zu schreiben aufgeschoben und dabey derselben meines schuldigen Respects zu versicheren, ist die Ursach, weilen ich seit der Zeit nichts gearbeitet habe, welches derselben zu überschreiben würdig geschätzet hätte. Ich habe fast diese ganze Zeit angewendet zu Verfertigung eines Systematis Musici womit ich jetzund fast zu Ende gekommen.[1]) Was ich darinn vermeine gethan zu haben,

---

trianguli velocitas, tum etiam via AP, quam corpus ex motu composito describit, atque utriusque lex accelerationis. Vgl. über dies Problem die Abhandlungen von Johann Bernoulli in den Comment. acad. sc. Petrop. 5, 1730/1731 (gedruckt 1738), S. 11—25, und in seinen *Opera omnia* T. IV, S. 341—347.

1) Diese Arbeit erschien in St. Petersburg 1739 unter dem Titel: *Tentamen novae theoriae musicae, ex certissimis harmoniae principiis dilucide exposita.* Wie Poggendorff (*Biographisch-literarisches Handwörterbuch* I, Sp. 689) für diese Arbeit drei Druckjahre (1729, 1734, 1739) hat angeben können, verstehe ich nicht. Jedenfalls geht aus Eulers Brief hervor, daß sie im Mai 1731 noch nicht fertig war.

nehme ich hiemit die Freyheit Ew. Excellenz zu überschreiben, weilen ich vermuthe, dass dieselbe darauf curios seyn möchte, indeme ich neulich von dero Herrn Sohn vernommen, dass dieselbe von dem Herrn Hermann etwas davon gehöret. Mein Endzweck in diesem Werke war dieser, dass ich suchte die Musik als einen Theil der Mathematik auszuführen, und alles was eine Zusammenfügung und Vermischung der Thöne kann angenehm machen, aus richtigen Gründen ordentlich herzuleiten. Zu dieser ganzen Abhandlung habe ich einen metaphysischen Grundsatz nöthig gehabt, worinnen die Ursach enthalten, warum einer an einer Music ein Wohlgefallen haben könne und worinn der Grund zu setzen sey, dass uns eine Sach angenehm, eine andre aber unangenehm vorkomme. Mit den Thönen habe ich dargethan, dass es diese Bewandtniss habe, dass uns viel zusammengefügte Thöne gefallen, wenn wir die Verhältniss der Höhe und Tiefe derselben, nehmlich die rationem intervallorum pulsuum, welche die Saiten geben, einsehen. Und aus diesem habe ich die Reglen gezogen, wie die Thöne würden zusammen gefügt werden, dass sich derer ein verständiges Ohr belustigen könne. Es ist aber noch ein anderer Grund weswegen wir an einer Music eine Lust empfinden, welcher in der Daurung der Thöne bestehet, und kann uns deswegen auch eine Music bloss darum gefallen, weilen wir die Verhältniss der Daur der Thöne begreiffen. Nach dem ersten principio ist also die verschiedene Höhe und Tiefe der Thöne das was uns belustiget, nach dem andren aber die verschiedene Daur derselben. Bey einer vollkommenen Musick muss beydes beysammen seyn und uns gefallen, so wohl ratione acuminis et gravitatis als ratione durationis sonorum. Eine Music, die uns nur nach dem ersten gefällt, ist der Choral, worinnen es nur auf die Zusammenstimmung der Stimmen ankommt und auf die Daur nicht gesehen wird. Ein Exempel aber einer Music, welche nur nach dem andren Grundsatz ein Gefallen erwecken kann, ist das Trommelspiel, worinnen nur auf die Daur und nicht auf die Höhe der Thöne gesehen wird. Ich habe erstlich die Music nach dem ersten Principio allein abgehandlet, hernach nach dem andren und endlich werde ich noch beyde zusammen nehmen. Im ersten Theil, welcher ohne Zweifel der fürnehmste ist, sind folgende Stück abzuhandeln vorgekommen. Für das erste von den Accorten, worinnen ich gewiesen, wie 2 oder mehr Thöne müssen beschaffen seyn, dass sie, wenn sie zusammen klingen, eine angenehme Harmonie erwecken. Zum zweiten habe ich untersuchet wie 2 Accorte beschaffen seyn müssen, dass sie nacheinander geschlagen annehmlich klingen. Zum dritten habe ich eine ganze Suite von Accorten betrachtet, und was zur Annehmlichkeit derselben erfordert wird gewiesen. Die Schrambe, in welchen sich eine solche Suite befindet, machet die Modos aus, von welchen ich darauf gehandlet, und habe dabey auch gewiesen, was für Thöne man für einen jeden modum nöthig habe auf den Instrumenten, wobey ich das genus chromaticum mit 12 Thönen in einer Octav sehr schön heraus gebracht. Zu den folgenden Betrachtungen habe ich alles nach dem Systemate chromatico tractirt. Hernach habe ich was vorhergegangen specialer ausgeführet, und auf die Praxin mehr appliciert. Und da ich darinn eine perfectam enumerationem modorum gemacht, so kann man daraus sehen, wie viel weiter man annoch in der Music kommen könne, und dass von so vielen Modis jetzund nur 2 im Schwange sind. Dieses verstehet sich von der Musick, welche sich auf das Genus chromaticum gründet, denn wenn man über die 12 Thöne, so sich in eine Octav befinden, mehr oder an deren Statt andre gebrauchen wollte, so würde man unendlich viel verschiedene Arten Music haben können. Alles dieses habe ich aber aus dem ersten Principio allso heraus gebracht. Es seyen viel verschiedene Thöne, davon die zu gleicher Zeit absolvierte numeri pulsuum seyen wie diese ganze Zahlen a, b, c, d, etc. durch welche auch die Thöne selbsten exprimiret zu werden pflegen. Dieser Zahlen minimus communis dividuus sey A. Diese Zahl nenne ich den Exponentem derselben Thönen, weilen daraus die Anmuth erkennet wird, welche verursachet wird, wenn dieselben Thöne entweder zugleich oder nach einander klingen. Ich habe darauf gradus suavitatis festgesetzt, davon der erste die perfecteste Zusammenstimmung, nehmlich wenn alle Thöne einander gleich sind, begreifft. Die folgenden begreiffen die weniger vollkommenen nach ihrer Ordnung unter sich. Aus dem Exponente nun wird auf folgende Weise der Gradus suavitatis erkannt; ich solvire denselben in seine factores simplicissimos. Diese addire ich in eine Summ und subtrahire davon $n - 1$ (n bedeutet den numerum factorum), die Zahl alsdann, die heraus kommt, gibt den gradum. Zum exempel die Thöne seyen 1, 2, 3, 4, 6, so wird derselben exponens seyn 12. Dieses factores simplicissimi sind folgende 3: 2. 2. 3. Deren Summ weniger 2 ist 5, woraus erhellet, dass die harmonie dieser Thöne im 5:ten grad angenehm sey.

Auf diese Weise kann man den Exponentem eines ganzen Musicalischen Stücks finden, wenn man alle Thöne durch ganze Zahlen exprimirt und davon das minimum commune dividuum nimmt. Dieser exponens aber ist nicht anderes als der modus musicus desselben Stücks; zu einem Stück, da alle Thöne auf dem Clavier vorkommen, ist der Exponens $2^n. 3^3. 5^2$, wo n von der Anzahl der Octaven dependirt. Nach diesem müssen in eine Octav folgende 12 Thöne seyn

480, 512, 540, 576, 600, 620, 675, 720, 768, 800, 864, 900,

der 13te ist eine Octav höher als der Erste nehmlich 960.

Dieses ist was ich aus meiner Musica Theoretica Ew. Excellenz habe überschreiben wollen. Ich verbleibe also nebst Vermeldung meines schuldigen Respects an dieselbe und dero sämtliche Familie

Hochwohlgebohrner Hochzuehrender Herr

Petersburg, d. 25ten Maj. 1731.

dero gehorsamster und verbundenster Diener
Leonhard Euler.[1])

11.

Bernoulli an Euler 11. August 1731.

Antwort auf Eulers Brief vom 25. Mai 1731. Original im Archiv der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg. Veröffentlicht zuerst im Journal für Mathematik 23, 1842, S. 199—200 und dann abgedruckt von Fuss, a. a. O. S. 8—11.

Inhalt. Über die von Euler angekündigte mathematische Theorie der Musik. Kritische Bemerkungen zu den Auseinandersetzungen in Eulers vorangehendem Brief.

Clarissime et Doctissime Domine Professor,
Amice Carissime.

Dessen letzteres vom 25. Mai ist mir von Seinem Herrn Vatter zurecht überlieffert worden; Er hat nicht nöthig sich wegen Saumseligkeit im Schreiben zu excusiren, da ich selbsten eine Antwort schuldig wäre: hoffe aber Er werde mir zu gut halten, was ich diesorts an meiner Pflicht etwas lasse abgehen, in Betrachtung meiner vielfältigen Occupationen, sonderlich bei dem mir neulich aufgetragenen, oder vielmehr aufgedrungenen Decanat, welches mir in meinem angehenden hohen Alter sehr beschwerlich ist.

Es ist mir sehr lieb gewesen zu vernehmen, dass der Herr Prof. an Verfertigung eines Systematis Musici (welches fast zu Ende soll gekommen seyn) arbeitet; ich zweifle nicht, es werde ein schönes Werk zu Tage

1) Am Anfange der vierten Seite des Briefes finden sich folgende von Daniel Bernoulli geschriebene Zeilen: „Da mir der Hr. Prof. Euler gesagt, dass er diesen Brief an den Vatter ablassen wolle, so habe diese paar Zeilen hinzusetzen wollen, umb Ihnen und der Mutter meines Respects zu versichern und meine Geschwistern nebst allen guten Freunden zu grüssen, auch anbey meine Gott lob gute Gesundheit zu berichten. Sonsten berufe mich auf mein letzteres vom 1. Juni oder 8. (das ich mich nicht recht erinnere). Wenige Tage darauf habe ich von dem Johannes einen Brief empfangen, dero ich beantworten werde, wenn ich seine Antwort auf mein erstgedachtes Schreiben werde empfangen haben. Wir haben alhie vernommen, dass die Müller banquerotiret haben, ich fürchte der Vatter werde auch interessiret seyn und bedaure den guten H. Hermann als welcher vor 800 Rtl. sp. interessiret seyn solle. Sonsten recommendire noch einmahl mein voriges beachten wegen des Johannes Herkunft und verbleibe mit gebührenden Grüssen

M. M. T. C. E. T. H. B. V. T. H. E. T. O. F.

D. Bernoulli."

kommen, so des Auctors fürtreffliches ingenium sattsam zeigen wird. Ich kann mir leicht einbilden, dass dergleichen opus kaum wird gefunden werden, darin alles auss mathematischen Gründen hergeholet ist, da wenig Scriptores Musici oder wohl gar keine zu finden sind, welche mit so grosser und aussbündiger mathematischer Wissenschaft begabet sind, wie der Hr. Professor ist, desswegen mich sehr verlanget Sein Werk selbsten dermahleneins zu sehen. Ich könnte zwar nicht leicht errathen, worin derjenige Grundsatz bestehe, so metaphysisch seyn solle, wie Er sagt, dadurch die Ursach könnte gegeben werden, warum Einer an einer Music ein Wohlgefallen haben könne, und dass uns eine Sach angenehm, eine andere aber unangenehm vorkomme: Man hat zwar eine General-idée von der Harmonie, dass sie lieblich ist, wenn sie wohl eingerichtet und die Consonanzen wohl menagirt seind, denn, wie bekandt, so haben auch die Dissonanzen in der Music ihren Gebrauch, damit die Lieblichkeit der gleich darauf folgenden Consonanzen desto besser herauskomme, nach dem gemeinen Sprichwort: opposita juxta se posita magis elucescunt; also verhält sich es auch mit dem Schatten in der Malereykunst, welcher das Licht releviren muss. Es kommt, glaube ich, in musica practica meistens auf die Art und Modification an, daran man gewöhnet ist, und diese Art dependiret viel von dem Naturel und Temperament der Leute, deren einige dieses, andere ein anderes für süss und angenehm halten; also ist die Italienische Music-Art discrepant von der Französischen, und diese von der Englischen. Mit einem Wort, de gustibus non est disputandum. Wenn hiemit die Lieblichkeit eines Musicstückes in der Natur selbsten soll gegründet seyn, so muss man wohl definiren, was man durch Lieblichkeit verstehe und nicht sagen: dies oder jenes ist lieblich, weil es mir gefällt, denn eben dieses könnte einem anderen mißfallen, zum Exempel dem Midae hat des Pans Schnader-Music besser gefallen, als des Appollinis Harfenklang. Der Hr. Professor sagt, man könne urtheilen von dem Wohlgefallen oder Missfallen der viel zusammengefügten Töne, wenn man die Verhältniss der Höhe und Tiefe derselben, nämlich die rationem intervallorum pulsuum, welche die Saiten geben, einsiehet; daraus habe Er die Regel gezogen, wie die Töne müssen zusammengefügt werden, dass sie ein verständiges Ohr belustigen können. Dieses lasse ich gelten für einen Meister, der mehr auf die Accuratesse eines Musicstückes Achtung gibt, als auf den Effect, den es auf die Zuhörer thut; ein Solcher wird sich ohne Zweifel daran ergötzen und belustigen, wenn er es nur auf dem Papier geschrieben siehet und examiniret, und befindet dass es nach den Grundregeln wohl componirt ist; aber da ein Musicstück meistens gespielet wird vor unverständigen Ohren, welche die rationem intervallorum pulsuum der Saiten nicht einsehen, viel weniger zählen können, so wird, glaube ich, dergleichen

Ohren das Musicstück entweder gefallen oder missfallen, je nachdem sie an diese oder jene Gattung der Music gewöhnt sind. Im übrigen gefällt mir sein dessein ganz wohl, weilen aufs wenigste die Theoria musices dadurch perfectionniret und gewiesen wird, dass ein Mathematicus schier alle Wissenschaften auszuführen im Stande ist, dahingegen andere Meister, die nur Practici seind von ihrer eignen Kunst nicht anderst schreiben als wie ein Blinder von der Farb.

Wenn dieser Tractatus Musices zu End seyn wird, wird der Hr. Professor seine vorhabende Mechanicam[1]) (von deren mir ist geschrieben worden) ohne Zweifel mit Ernst für die Hand nehmen, von denen ich mir etwas Sonderbares promittiere, dazu ich denn beharrliche Gesundheit von Herzen anwünsche. Verbleibe indessen unter Empfehlung Göttl. Protection des hochgeehrten Hrn. Professors

bereitwilligster

J. Bernoulli Dr.

Basel, d. 11. August 1731.

---

1) Diese Arbeit erschien schon vor der *Theoria musicae* unter dem Titel: *Mechanica sive motus scientia analytice exposita* (St. Petersburg 1736).