DE NUMERIS AMICABILIBUS

Leonhard Euler

Problemata, quae circa indolem ac proprietates numerorum versantur, hoc tempore, quo Analysis mathematica ad multo profundiores speculationes aditum aperuit, fere penitus a Geometris derelicta videntur ac plerique arbitrantur contemplationem numerorum nihil prorsus ad augmentum Analyseos conferre. Verum tamen certe investigatio proprietatum numerorum saepenumero multo maiorem sagacitatem requirit quam subtilissimae quaestiones geometricae atque ob hanc ipsam causam quaestiones arithmetica immerito istis postponi videntur. Ac summa quidem ingenia, quibus maxima Analyseos incrementa accepta sunt referenda, numerorum affectiones non indignas consuerunt, in quibus evolvendis plurimum operae et studii collocarent. CARTESIUM scilicet constat, etiamsi amplissimis cum universae Philosophiae tum Matheseos meditationibus esset occupatus, tamen non parum in eruendis numeris amicabilibus desudasse; quod negotium deinceps SCHOTENIUS maiori studio est persecutus. Vocantur autem numeri amicabiles duo eiusmodi numeri, quorum alter, si eius partes aliquotae omnes in unam summam colligantur, alterum producat; cuiusmodi numeri sunt 220 et 284; prioris enim 220 partes aliquotae seu divisores ipso minores

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110$$

summam praebent 284 atque huius numeri 284 partes aliquotae

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142$$

vicissim producunt 220. Nullum autem est dubium, quia praeter hos duos numeros plures alii atque adeo infiniti dentur, qui eadem proprietate sint praediti; neque tamen CARTESIUS et post eum SCHOTENIUS plura quam tria talium numerorum paria elicuerunt, etiamsi non parum studii ad plura eruenda impendisse videantur. Ac methodus quidem, qua uterque est usus, ita est comparata, ut eius ope vix plures numeri amicabiles inveniri queant; assumserunt enim huiusmodi numeros in his formulis $2^n xy$ et 2^n contineri, ubi x, y et z numeros primos denotent, quos ita comparatos esse oportet, ut sit primo $z = xy + x + y$, tum vero ut sit $2^n(x + y + z) = xy + x + y + 1$. Exponenti ergo n successive varios tribuerunt valores ac pro singulis eiusmodi indagaverunt numeros primos x et y, ut posteriori aequationi satisfieret; qui si simul tales fuerint, ut $xy + x + y$ praeberet numerum primum, formulae assumtae $2^n xy$ et $2^n z$ exhibebant numeros amicabiles. Facile autem intelligitur hoc modo ad maiores exponentes n procedendo mox ad tantos numeros $xy + x + y$ perveniri, qui utrum primi sint necne, discerni amplius nequeat, cum tabula numerorum primorum ultra 100000 nondum habeatur extensa.

Perspicuum autem est hanc quaestionem praeter necessitatem non leviter restringi, dum numeri amicabiles in his tantum formulis assumtis includi assumantur. Quod cum perpendissem, vocatis in subsidium nonnullis artificiis ex natura divisorum petitis plura alia numerorum amicabilium paria sum adeptus, quorum cum tribus iam notis triginta hic communicabo; eos autem, quo eorem origo et natura clarius perspiciatur, per factores expressos exhibebo.

Sunt igitur numeri amicabiles*:

$$\text{I.}\begin{cases}2^2\cdot 5\cdot 11\\ 2^2\cdot 71\end{cases}\qquad \text{XVI.}\begin{cases}2^5\cdot 37\cdot 12671\\ 2^5\cdot 227\cdot 2111\end{cases}$$

$$\text{II.}\begin{cases}2^4\cdot 23\cdot 47\\ 2^4\cdot 1151\end{cases}\qquad \text{XVII.}\begin{cases}2^5\cdot 53\cdot 10559\\ 2^5\cdot 79\cdot 7127\end{cases}$$

$$\text{III.}\begin{cases}2^7\cdot 191\cdot 383\\ 2^7\cdot 73727\end{cases}\qquad \text{XVIII.}\begin{cases}2^6\cdot 79\cdot 11087\\ 2^6\cdot 383\cdot 2309\end{cases}$$

$$\text{IV.}\begin{cases}2^8\cdot 23\cdot 5\cdot 137\\ 2^8\cdot 23\cdot 827\end{cases}\qquad \text{XIX.}\begin{cases}2^2\cdot 11\cdot 17\cdot 263\\ 2^2\cdot 11\cdot 43\cdot 107\end{cases}$$

$$\text{V.}\begin{cases}3^2\cdot 5\cdot 13\cdot 11\cdot 19\\ 3^2\cdot 5\cdot 13\cdot 239\end{cases}\qquad \text{XX.}\begin{cases}3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 71\\ 3^3\cdot 5\cdot 17\cdot 31\end{cases}$$

$$\text{VI.}\begin{cases}3^2\cdot 7\cdot 13\cdot 5\cdot 17\\ 3^2\cdot 7\cdot 13\cdot 107\end{cases}\qquad \text{XXI.}\begin{cases}3^2\cdot 5\cdot 13\cdot 29\cdot 79\\ 3^2\cdot 5\cdot 13\cdot 11\cdot 199\end{cases}$$

$$\text{VII.}\begin{cases}3^2\cdot 7^2\cdot 13\cdot 5\cdot 41\\ 3^2\cdot 7^2\cdot 13\cdot 251\end{cases}\qquad \text{XXII.}\begin{cases}3^2\cdot 5\cdot 13\cdot 19\cdot 47\\ 3^2\cdot 5\cdot 13\cdot 29\cdot 31\end{cases}$$

$$\text{VIII.}\begin{cases}2^2\cdot 5\cdot 131\\ 2^2\cdot 17\cdot 43\end{cases}\qquad \text{XXIII.}\begin{cases}3^2\cdot 5\cdot 13\cdot 19\cdot 37\cdot 1583\\ 3^2\cdot 5\cdot 13\cdot 19\cdot 227\cdot 263\end{cases}$$

$$\text{IX.}\begin{cases}2^2\cdot 5\cdot 251\\ 2^2\cdot 13\cdot 107\end{cases}\qquad \text{XXIV.}\begin{cases}3^3\cdot 5\cdot 31\cdot 89\\ 3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 29\end{cases}$$

$$\text{X.}\begin{cases}2^3\cdot 17\cdot 79\\ 2^3\cdot 23\cdot 59\end{cases}\qquad \text{XXV.}\begin{cases}2\cdot 5\cdot 7\cdot 60659\\ 2\cdot 5\cdot 23\cdot 29\cdot 673\end{cases}$$

$$\text{XI.}\begin{cases}2^4\cdot 23\cdot 1367\\ 2^4\cdot 53\cdot 607\end{cases}\qquad \text{XXVI.}\begin{cases}2^3\cdot 31\cdot 11807\\ 2^3\cdot 11\cdot 163\cdot 191\end{cases}$$

$$\text{XII.}\begin{cases}2^4\cdot 17\cdot 10303\\ 2^4\cdot 167\cdot 1103\end{cases}\qquad \text{XXVII.}\begin{cases}3^2\cdot 7\cdot 13\cdot 23\cdot 79\cdot 1103\\ 3^2\cdot 7\cdot 13\cdot 23\cdot 11\cdot 19\cdot 367\end{cases}$$

$$\text{XIII.}\begin{cases}2^4\cdot 19\cdot 8563\\ 2^4\cdot 83\cdot 2039\end{cases}\qquad \text{XXVIII.}\begin{cases}2^3\cdot 47\cdot 2609\\ 2^3\cdot 11\cdot 59\cdot 173\end{cases}$$

$$\text{XIV.}\begin{cases}2^4\cdot 17\cdot 5119\\ 2^4\cdot 239\cdot 383\end{cases}\qquad \text{XXIX.}\begin{cases}3^3\cdot 5\cdot 23\cdot 79\cdot 1103\\ 3^3\cdot 5\cdot 23\cdot 11\cdot 19\cdot 367\end{cases}$$

$$\text{XV.}\begin{cases}2^5\cdot 59\cdot 1103\\ 2^5\cdot 79\cdot 827\end{cases}\qquad \text{XXX.}\begin{cases}3^2\cdot 5^2\cdot 11\cdot 59\cdot 179\\ 3^2\cdot 5^2\cdot 17\cdot 19\cdot 359\end{cases}$$

*Euler made an error with XIII: $\sigma(2603152) = 5309680, \sigma(2707792) = 5312160$