

## Prefácio da Tradução

Isto é uma tradução para o Português do artigo escrito em Latim por Leonhard Euler no ano 1747 intitulado “*THEOREMATUM QUORUMDAM ARITHMETICORUM DEMONSTRATIONES*”, isto é em Português, “DEMONSTRAÇÕES DE ALGUNS TEOREMAS ARITMÉTICOS”, que foi publicado integrado no jornal científico chamado “*Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*”, ou seja, “Jornais da academia de ciências Petropolitana” (de São Petersburgo). É surpreendente que até agora, de acordo com a informação no sítio da Internet *Euler Archive*\*, donde adquiri uma digitalização do original, se não tenha feito nenhuma tradução integral deste artigo para qualquer língua afora o Alemão e possivelmente o Francês. (Visto porém que à tradução Alemã falta o corolário 6 do teorema 9 e a possível tradução Francesa seja escrita à mão, parece mesmo que esta é a primeira tradução integral em formato digital do artigo.)

O grande e preclaro matemático Leonhard Euler demonstrou com este artigo alguns teoremas celebérrimos de Teoria dos Números Algébrica que então ainda germinante consideravelmente desenvolveu.

É enlevante perscrutar como de modo fácil e surpreendente, ao estilo de Euler, partindo de o que até da perspectiva moderna pouco mais fosse do que nada, e usando ideias que de tão geniais pareçam à primeira vista corriqueiras, avançou com passos aparentemente irrisórios porém realmente grandiosos de gigante intelectual que era, para produzir não só elegantes demonstrações de dois dos teoremas de Fermat, o que é em si só um admirável feito, mas também generalizações surpreendentes de eles, e findou em fastígio com um teorema novo manifestante o poder das ideias aqui legadas e o do seu intelecto prodigioso.

Euler começou por provar pequenos lemas e deles os corolários para construir uma base teórica de sobre que pôde paulatinamente alcançar os resultados sucessivos. O primeiro lema deste artigo é um resultado elementar que é o único enunciado e não provado explicitamente, pois é uma proposição d’Os Elementos de Euclides. O facto de Euler ter registado este resultado (até em primeiro lugar) e mencionado a sua proveniência em vez duma demonstração evidencia o quão importante e valorizada ainda era a matemática da Grécia Antiga com que os matemáticos e deveras os pensadores coevos dele mantinham uma forte ligação que foi realmente fulcral na evolução da matemática no Ocidente e do pensamento do Homem.

---

\*<http://eulerarchive.maa.org/>

Este artigo tem um *Leitmotiv*, demonstrar ser algum binómio do quarto grau em duas variáveis (e eventualmente três e até quatro) sobre os números inteiros um quadrado perfeito só em casos triviais. (O termo hoje antiquado “biquadrado” é usado amplamente neste artigo significante “quarta potência” ou “monómio do quarto grau”.)

O primeiro teorema\* é uma generalização de um formulado por Fermat†, cuja demonstração é a primeira de sempre para este teorema puramente algébrica. Com os teoremas 2, 3, 4 e 8 prossegue provando resultados semelhantes sobre a soma e diferença de dois biquadrados e de um biquadrado e o dobro de outro. Além disso generalizou estes resultados com os teoremas 5, 6 e 9 e os seus corolários. O teorema 9 é notável por ser revelador de um caminho para ainda possivelmente maior generalização; o próprio Euler comentou que havia mais trabalho a fazer naquela direcção mas que preferira enveredar pela investigação de resultados acerca de cubos, o que efectivamente fez com o décimo e último teorema.

Esta obra tem dois clímaxes: a demonstração do teorema 7 (um dos de Fermat então ainda por demonstrar), a qual conseguiu recorrendo aos teoremas 3 e 4, e a demonstração do teorema 10, o qual foi, tanto quanto sei, a primeira de toda a história acerca de binómios do terceiro grau.

Tudo isto logrou Euler. Apoiando-se sempre nos resultados anteriores produziu as suas demonstrações mantendo claros e concisos os seus argumentos apesar da crescente complexidade da empresa a que se acometera.

Este trabalho é todavia meramente uma mais das inúmeras relíquias que chegaram felizmente a nós atestantes a magistralidade do seu autor, das quais muitas ainda estão infelizmente por traduzir. É para mim portanto um enorme orgulho ter realizado esta tradução.

Desejo sinceramente que o meu trabalho venha a ser útil a alguém, talvez a admiradores de Euler ou a estudantes de matemática ou da sua história ou quiçá a aprendizes de Latim... Para estes, observações e comentários sobre detalhes técnicos da tradução encontram-se no posfácio.

---

\*A soma de dois biquadrados como  $a^4 + b^4$  não pode ser um quadrado, se um ou outro biquadrado não esvaneça.

†A equação  $a^4 + b^4 = c^4$  em inteiros só ter soluções triviais. Este é o único caso do famoso “grande teorema de Fermat”, do qual se conhece uma demonstração deixada por Fermat.

# DEMONSTRAÇÕES DE ALGUNS TEOREMAS ARITMÉTICOS

**Autor:** L. EULER.

**Tradutor:** M. Marcelo da C. Cardoso.

Teoremas aritméticos, de cujo modo Fermat e muitos outros descobriram, de tanta maior atenção são dignos, quanto mais a veracidade deles é abscôndita, e difícil de demonstrar. Fermat deixou de facto cópia bastante grande de tais teoremas, porém nunca expôs demonstrações, até se asseverar firmemente, constar-se certissimamente da veracidade deles. É então máxime lamentável terem perecido tanto os escritos dele que até agora se ignorem todas as demonstrações. Similar também é o arrazoamento\* das proposições vulgarmente conhecidas, com que se assevera nem a soma nem a diferença de dois biquadrados poder constituir um quadrado; ainda que efectivamente da veracidade delas ninguém duvide, contudo não existe em lado algum demonstração, quanto me consta de facto, rígida, afora um certo libelo escrito em certa ocasião publicado por Frénicle, cujo Título é “*Traité des triangles rectangles en nombres*”. Demonstra porém este Autor, entre outros [resultados], em nenhum triângulo rectângulo, cujos lados se expressam em números racionais; poder a área ser um quadrado, donde facilmente se deduz a veracidade das proposições mencionadas sobre a soma e a diferença de dois biquadrados. Mas essa demonstração é tão envolta em propriedades de triângulos, que se não se atenha a suprema atenção, difficilmente pode compreender-se com transparência. Por causa disto, creio que valerá a pena†, que terei abstraído de triângulos rectângulos as demonstrações destas proposições, e as terei proposto analítica e claramente. Aliás, tanta maior utilidade demonstrará este meu plano, quantos mais ou-

---

\**ratio*, declinação de *ratio*, *onis*, significante “cálculo”, “rácio”, “razão”. Neste trecho a palavra foi usada com o sentido de “raciocínio subjacente”, mas concretamente o que o autor quis foi transmitir o conceito de “demonstração” sem repetir alguma declinação de *demonstratio*, *onis*.

†A tradução mais próxima gramaticalmente é “creio haver de valer a pena”.

tros teoremas muito mais difíceis podem obter-se [partindo] delas. Para aqui é evidentemente pertinente aquele Teorema célebre de Fermat, com que estatui, nenhum número triangular poder ser um biquadrado afora a unidade, cuja demonstração consegui\* formar [partindo] delas. Tão mais difícil porém parece essa demonstração, como† a proposição seja sujeita a uma excepção, e ainda concirna somente a números inteiros; [observe-se que] [usando] números fraccionários pode se fazer de infinitos modos, para que  $\frac{x(x+1)}{2}$  dê um biquadrado. Para este e uns outros teoremas a demonstrar será então necessário adiantar alguns lemas, sobre os quais as sequentes demonstrações se apoiam. antes porém convém ter lembrado desginarem perpetuamente todas as letras para mim números inteiros.

## Lema 1.

O produto de dois ou mais números entre si primos, nem um quadrado nem um cubo nem uma outra potência pode ser, se os factores não sejam individualmente quadrados ou cubos ou deste modo outras potências.

A demonstração deste lema é fácil e ainda por Euclides já foi deixada, assim que seria supérfluo expô-la aqui.

## Lema 2.

Se  $a^2 + b^2$  tenha sido um quadrado, e ainda  $a$  e  $b$  sejam números entre si primos. será  $a = pp - qq$ ; e  $b = 2pq$ , existentes  $p$  e  $q$ , números entre si primos, um par e outro ímpar.

## Demonstração.

Porque  $a^2 + b^2$  é um quadrado, defina-se a raiz deles  $= a + \frac{bq}{p}$ , onde defino a fracção  $\frac{q}{p}$  em termos mínimos assim expressa para que  $p$  e  $q$  sejam números entre si primos. Feita aliás a equação será  $a^2 + b^2 = a^2 + \frac{2abq}{p} + \frac{bbqq}{pp}$ . Donde seja  $a : b = pp - qq : 2pq$ . Porém, os números  $pp - qq$  e  $2pq$  entre si ou são primos, ou têm o divisor comum 2. Naquele caso então, em que  $pp - qq$  e  $2pq$  são números entre si primos, o que acontece, se dos números

---

\* *ex illis formare mihi contigit*, o que literalmente deve significar algo como “[partindo] delas tocou-me formar”.

† *cum*, neste contexto pode ler-se como “já que”.

$p$  e  $q$  um tenha sido par e outro ímpar, é necessário que seja  $a = pp - qq$  e  $b = 2pq$ : porque  $a$  e  $b$  são definidos números entre si primos. No caso porém em que os números  $pp - qq$  e  $2pq$  têm o divisor comum 2; o que será, se dos números  $p$  e  $q$  um e outro tenha sido ímpar; (efectivamente não é possível um e outro ser par, porque entre si são definidos primos), será  $a = \frac{pp-qq}{2}$  e  $b = qq^*$ . Defina-se porém  $p + q = 2r$  e  $p - q = 2s$ , serão  $r$  e  $s$  números entre si primos, e dos quais um par e outro ímpar. donde seja  $a = 2rs$  e  $b = rr - ss$ ; expressão que, porque é congruente com a anterior, indica se  $aa + bb$  tenha sido quadrado, e os números  $a$  e  $b$  sejam entre si primos, ser um deles a diferença de dois quadrados entre si primos, dos quais um é par e outro ímpar, [e] ser deveras o outro número igual ao producto duplicado das raízes desses quadrados. Isto é, ser  $a = pp - qq$  e  $b = 2pq^\dagger$ , existentes  $p$  e  $q$  números entre si primos um par e outro ímpar. Q. E. D.

**Corolário 1.** Se portanto a soma de dois quadrados entre si primos tenha sido um quadrado, é necessário [que] um quadrado seja par e outro deveras ímpar: de que se segue não poder a soma de dois quadrados ímpares ser um quadrado.

**Corolário 2.** Se portanto  $aa + bb$  é um quadrado, dos números  $a$  e  $b$  um, por exemplo  $a$ , será ímpar e outro,  $b$ , deveras par. Ímpar deveras  $a$  será  $= pp - qq$ , e par  $b = 2pq$ .

**Corolário 3.** Porque ademais dos números  $p$  e  $q$  um é par e outro ímpar, será  $b$  um número parmente par, ou seja, divisível por 4. Além disso, se nem  $p$  nem  $q$  tenha sido divisível por 3, é necessário que ou  $p - q$  ou  $p + q$  admita divisão por 3. Donde se segue ser um dos números  $a$  e  $b$ , de cujos quadrados a soma produz um quadrado, divisível por 3.

**Corolário 4.** Como seja  $a = pp - qq$  e  $b = 2pq$ , se  $aa + bb$  constitua um quadrado, facilmente se percebe serem os números  $p$  e  $q$  menores do que  $a$  e  $b$ . Visto que efectivamente é  $a = (p + q)(p - q)$ , será  $a > p + q$ , se  $p - q$  não seja  $= 1$ ; e ainda por [ser]  $b = 2pq$  será  $b$  maior, do que  $p$  ou  $q$ . Pelo mais forte arrazoamento portanto serão os números  $a$  e  $b$  maiores do que os números  $p$  e  $q$ . Sucederia de facto  $a = 0$  se fosse  $p = q$ , mas este caso não tem lugar, porque  $p$  e  $q$  são definidos números entre si primos, e deles um par e outro ímpar.

---

\* $b = pq$   
 $^\dagger b = 2pq$

## Nota.

Na demonstração deste lema segue-se da analogia  $a : b = pp - qq : 2pq$  por isso\* serem  $a = pp - qq$  e  $b = 2pq$ , porque  $a$  e  $b$  são números entre si primos, assim como os números  $pp - qq$  e  $2pq$ . Se efectivamente tenha sido  $a : b = c : d$ , e ainda tanto os números  $a$  e  $b$  quanto os números  $c$  e  $d$  sejam primos entre si, é necessário que seja  $a = c$  e  $b = d$ ; conforme facilmente consta da natureza das proporções†.

## Lema 3.

Se tenha sido  $aa - bb$  um quadrado, existentes  $a$  e  $b$  números entre si primos; será  $a = pp + qq$  e ou  $b = pp - qq$  ou  $b = 2pq$ , onde os números  $p$  e  $q$  são entre si primos, e dos quais um [é] par e outro ímpar.

## Demonstração.

Porque  $aa - bb$  é um quadrado, defina-se  $a^2 - b^2 = c^2$ , e será  $a^2 = b^2 + c^2$ , e ainda  $b$  e  $c$  números entre si primos. Então, pelo corolário 1 do lema precedente, como dos números  $b$  e  $c$  um seja par e outro ímpar, é necessário que  $a$  seja um número ímpar;  $b$  deveras será ou par, ou ímpar.

Seja primeiro  $b$  ímpar e  $c$  par; será pelo lema precedente  $b = pp - qq$  e  $c = 2pq$ , existentes  $p$  e  $q$  números entre si primos, um par e outro ímpar. Daqui porém seja  $a = pp + qq$ . Por outro lado, se  $b$  tenha sido par e  $c$  ímpar; será  $b = 2pq$  e  $c = pp - qq$ , donde de novo seja  $a = pp + qq$ , e ainda ou  $b = pp - qq$  ou  $b = 2pq$ . Q. E. D.

**Corolário 1.** Se portanto a diferença de dois quadrados é um número quadrado, o maior quadrado deve ser um número ímpar, se de facto aqueles quadrados tenham sido entre si números primos.

**Corolário 2.** Ademais de similar modo se percebe serem os números  $p$  e  $q$  menores do que os números  $a$  e  $b$ , como seja  $a = pp + qq$  e ainda  $b$  ou  $= pp - qq$  ou  $= 2pq$ .

---

\*Construção frásica que creio advir de interferência do Alemão, com “isso” é referida a oração subordinada causal precedente.

†É possível que isto seja uma referência à Teoria das Proporções de Eudoxo, a que Euler certamente teve acesso pelo menos através do livro V d’Os Elementos de Euclides.

**Corolário 3.** Se tenha sido  $aa - bb = cc$ , um dos números  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sempre existe divisível por 5. Pois como seja  $a = pp + qq$ ,  $b = pp - qq$  e  $c = 2pq$ ; ou um dos números  $p$  e  $q$  é divisível por 5 ou nenhum; naquele caso porém seja  $c$  divisível por 5. Neste caso deveras serão  $pp$  e  $qq$  números da forma  $5n + 1$  portanto ou  $pp - qq$  ou  $pp + qq$  será divisível por 5.

## Teorema 1.

A soma de dois biquadrados como  $a^4 + b^4$  não pode ser um quadrado, se um ou outro biquadrado não esvaneça\*.

## Demonstração.

Versar-me-ei assim neste teorema a demonstrar, mostrarei que se num caso tenha sido  $a^4 + b^4$  um quadrado, não importa quão grandes até tenham sido os números  $a$  e  $b$ , então poderem atribuir-se continuamente no lugar de  $a$  e  $b$  números menores, e até ter de se chegar eventualmente a números inteiros<sup>†</sup> mui pequenos. Porém, como tais  $[a$  e  $b]$  não haja em números mui pequenos, de cujos biquadrados a soma constituisse um quadrado, será para concluir nem existirem tais  $[a$  e  $b]$  entre números mui grandes. Definamos portanto ser  $a^4 + b^4$  um quadrado, e ainda  $a$  e  $b$  serem entre si números primos; se efectivamente não fossem primos  $[$ entre si $]$ , poderiam por divisão ser a primos  $[$ entre si $]$  reduzidos. Seja  $a$  um número ímpar,  $b$  deveras par, porque necessariamente deve ser um par e outro ímpar. Será portanto  $aa = pp - qq$  e  $bb = 2pq$ , e os números  $p$  e  $q$  entre si serão primos, e dos quais um par e outro ímpar. Porém como seja  $a = pp - qq$ , é necessário que  $p$  seja um número ímpar, porque senão  $pp - qq$  não pode ser um quadrado. Será portanto  $p$  um número ímpar e  $q$  um número par. Porque ademais  $2pq$  deve ser um quadrado, é necessário, que tanto  $p$  quanto  $2q$  seja um quadrado, porque  $p$  e  $2q$  são números entre si primos. Para que  $pp - qq$  deveras seja um quadrado, é necessário, que seja  $p = mm + nn$  e  $q = 2mn$ ; existentes novamente  $m$  e  $n$  números entre si primos e dos quais um par e outro ímpar. Mas visto que  $2q$  é um quadrado, será  $4mn$ , ou seja,  $mn$  um quadrado; donde tanto  $m$  quanto  $n$  serão quadrados. Definido portanto  $m = xx$  e  $n = yy$ , será  $p = m^2 + n^2 = x^4 + y^4$ . o que deveria ser igualmente um quadrado.

\* *evanescat*, conjugação do verbo *evanesco*, usado com o sentido de “ser igual a zero”.

<sup>†</sup> *integros*, declinação de *integer*, *a, um*, significante “inteiros”. Euler referiu-se obviamente a número naturais sempre que usou esta palavra no contexto de descidas infinitas.

Daqui portanto segue-se se  $a^4 + b^4$  fosse um quadrado, então também haver de ser  $x^4 + y^4$  um quadrado, porém é manifesto haverem de ser os números  $x$  e  $y$  de longe menores do que  $a$  e  $b$ . Então pela mesma via originam-se de novo [partindo] de  $x^4 + y^4$  menores biquadrados, cuja soma seria um quadrado, e ainda prosseguindo eventualmente se chegaria a biquadrados mui pequenos em inteiros. Como portanto não haja biquadrados mui pequenos, cuja soma perfizesse um quadrado, é claro nem tais haver em números mui grandes. Se porém num par de biquadrados um\* seja = 0, em todos os restantes pares um\* esvanecerá, assim que nenhuns casos novos se originam daqui. Q. E. D.

**Corolário 1.** Como então a soma de dois biquadrados não pode ser um quadrado, muito menos poderão dois biquadrados conjuntos† perfazer um biquadrado.

**Corolário 2.** Embora esta demonstração concirna somente a números inteiros, até por ela contudo se conclui, não poder de facto exhibir-se dois biquadrados em fracções, cuja soma seria um quadrado. Pois se  $\frac{a^4}{m^4} + \frac{b^4}{n^4}$  fosse um quadrado, então também em inteiros seria  $a^4n^4 + b^4m^4$  um quadrado, o que não é possível acontecer, pela própria demonstração.

**Corolário 3.** Da mesma demonstração permite-se coligir‡, não haver números  $p$  e  $q$  de tal modo, que  $p$ ,  $2q$  e  $pp - qq$  sejam quadrados; se efectivamente tais existissem, então ter-se-iam valores para  $a$  e  $b$  que dariam um  $a^4 + b^4$  quadrado, pois seria  $a = \sqrt{pp - qq}$  e  $b = \sqrt{2pq}$ .

**Corolário 4.** Definidos portanto  $p = xx$  e  $2q = 4yy$  será  $pp - qq = x^4 - 4y^4$ . Não pode portanto de todo suceder, que  $x^4 - 4y^4$  seja um quadrado. Nem poderá então  $4x^4 - y^4$  ser um quadrado, [pois] efectivamente seria  $16x^4 - 4y^4$  um quadrado, caso que por  $16x^4$  [ser] um biquadrado recai§ ao [caso] prévio.

**Corolário 5.** Segue-se até daqui nunca poder ser  $ab(a^2 + b^2)$  um quadrado. Por efectivamente os factores  $a$ ,  $b$ ,  $a^2 + b^2$  [serem] entre si primos, teriam de ser individualmente quadrados, o que não pode suceder.

\* *alterum*, declinação de *alter*, *a*, *um*, que significa “um outro”. Creio que o autor usou esta palavra em vez de *unum* para não repetir uma declinação de *unus*, *a*, *um* que usou com a função de artigo indefinido.

† Ou “somados”.

‡ *colligere*, conjugação de *colligo*. Aqui e em diante, usei este verbo com o sentido incomum todavia correcto de “deduzir” ou “inferir”.

§ Hoje diz-se usualmente “reduz-se”, todavia *recidit*, conjugação do verbo *recido*, significa literalmente isto, “recai”.



**Corolário 6.** Similarmente não haverá até tais números  $a$  e  $b$  entre si primos, que produziriam um  $2ab(aa-bb)$  quadrado. Segue-se isto do corolário 3. onde foi mostrado não haver números  $p$ , e  $q$ , [tais] que fossem  $p$ ,  $2q$ ,  $pp - qq$  quadrados. Isto tudo porém também vale\* para números entre si não-primos e ainda mesmo fracções, pelo corolário 2.

## Teorema 2.

A diferença de dois biquadrados como  $a^4 - b^4$  não pode ser um quadrado, se não seja ou  $b = 0$  ou  $b = a$ .

## Demonstração.

Demonstrarei este teorema de modo análogo ao precedente. Sejam então [ $a^4$  e  $b^4$ ] biquadrados já reduzidos a termos mui pequenos, e ainda definamos ser  $a^4 - b^4$  um quadrado :  $a$  será um número ímpar, [e]  $b$  será deveras ou par ou ímpar.

*Caso I.* Seja primeiro  $b$  um número par, será  $a^2 = pp + qq$  e  $b^2 = 2pq$ , existentes  $p$  e  $q$  entre si primos, e deles um  $p$  par e outro  $q$  ímpar. Por [ser]  $b^2 = 2pq$  deverão portanto  $2p$  e  $q$  ser quadrados. Porque ademais  $pp + qq$  seja igual ao próprio  $a^2$ , será  $q = mm - nn$  e  $p = 2mn$ , existentes  $m$  e  $n$  números entre si primos. Como porém  $2p$  seja um quadrado, será  $4mn$  isto é  $mn$  um quadrado; e mesmo  $m$  e  $n$  individualmente quadrados. Feitos portanto  $m = x^2$  e  $n = y^2$  sucederá  $q = x^4 - y^4$ , onde como dos números  $m$  e  $n$  um seja par e outro ímpar, será também dos números  $x$  e  $y$  um par e outro ímpar. Por outro lado, por  $q$  [ser] um quadrado, um quadrado será  $x^4 - y^4$ , onde  $x$  será um número ímpar,  $y$  deveras par. Pelo que, se  $a^4 - b^4$  tenha sido um quadrado, quadrado também será  $x^4 - y^4$ , existentes  $x$  e  $y$  de longe menores do que  $a$  e  $b$ . Como portanto em números mui pequenos não haja dois [tais] biquadrados, tendo a diferença quadrada, nem em [números] mui grandes haverá, pelo menos no caso em que o menor biquadrado é um número par. Q. E. Unum.†

*Caso II.* seja agora  $b$  um número ímpar, e será  $a^2 = pp + qq$  e  $bb = pp - qq$ ; existentes  $p$  e  $q$  números entre si primos, e dos quais um par e outro ímpar. Porque deveras  $pp - qq$  é um quadrado, será  $p$  um número ímpar, e por essa

---

\*Empreguei aqui e em diante com o sentido de “é válido”.

† *Quod Erat Unum*, “que era um”, em contraste com Q. E. D. (*Quod Erat Demonstrandum*), “que era para demonstrar”.

razão [será]  $q$  par. Multiplicados\* porém  $a^2$  e  $b^2$  um com o outro, provirá  $a^2b^2 = p^4 - q^4$ , expressão que pelo primeiro caso [não pode] ser um quadrado, e por isso ao próprio  $a^2b^2$  não pode ser igual. A diferença portanto de dois biquadrados de modo nenhum pode ser um quadrado, a não ser que ou ambos sejam iguais, ou o menor = 0. Q. E. Alterum. Dem.<sup>†</sup>

**Corolário 1.** Como seja  $a^2 = pp + qq$  e  $b^2 = 2pq$  e analogamente  $q = mm - nn$  e  $p = 2mn$ ; e ademais ainda  $m = x^2$  e  $n = y^2$ ; será  $a^2 = (x^4 + y^4)^2$  e  $b^2 = 4x^2y^2(x^4 - y^4)$ . Do qual se terá  $a = x^4 + y^4$  e  $b = 2xy\sqrt{x^4 - y^4}$ .

**Corolário 2.** Se portanto em números exíguos houvesse tais  $x$  e  $y$ , de cujos biquadrados a diferença constituísse um quadrado; então [partindo] destes poderiam encontrar-se imediatamente muito maiores números  $a$  e  $b$  gozantes a mesma propriedade.

**Corolário 3.** Daqui mais claramente se percebe, do caso em que os biquadrados ou são iguais, ou um deles = 0, não [se] apresentarem novos casos, [se] feito efectivamente ou  $x = y$  ou  $y = 0$ , [então] seja simultaneamente<sup>‡</sup>  $b = 0$ , donde o poder da demonstração tanto mais se percebe.

**Corolário 4.** Da demonstração segue-se ademais não haver números  $p$  e  $q$  de tal índole, que seriam  $2p$ ,  $q$ ,  $pp + qq$  quadrados. Definido portanto  $2p = 4xx$  e  $q = yy$ , não poderá ser um quadrado essa forma  $4x^4 + y^4$ .

**Corolário 5.** De estas fórmulas também se segue, nem  $ab(aa - bb)$  nem  $2ab(aa + bb)$  alguma vez poder suceder [serem] quadrados, o que não só vale, se  $a$  e  $b$  sejam números entre si primos, mas até se compostos e ainda mesmo fraccionários. Facilmente se reduzem deste modo fracções efectivamente a inteiros, e ainda inteiros a números entre si primos.

---

\* *Ductis*, declinação de *ductus*, *a*, *um*, que significa “liderado(a)s”. Pelo contexto percebe-se que o autor queria transmitir “multiplicados”.

† *Quod Erat Alterum Demonstrandum*, “que era o outro para demonstrar”, é o seguimento da expressão de cima, Q. E. Unum.

‡ *simul*, que neste caso claramente é usado com o sentido de “em ambos os casos”.

**Corolário 6.** *Nestas duas proposições então alcançou-se [o seguinte facto], nunca poder suceder as seguintes nove expressões [serem] quadrados*

I.	$a^4 + b^4$		VI.	$a^4 - b^4$
II.	$a^4 - 4b^4$		VII.	$4a^4 + b^4$
III.	$4a^4 - b^4$		VIII.	$ab(aa - bb)$
IV.	$ab(aa + bb)$		IX.	$2ab(aa + bb)$
V.	$2ab(aa - bb)$		X.	$2a^4 \pm 2b^4$

*ajuntei a décima expressão por isso, porque a veracidade dela em breve será demonstrada.*

### Teorema 3.

A soma de dois biquadrados duplamente somados, como  $2a^4 + 2b^4$ , não é possível ser um quadrado, se não seja  $a = b$ .

### Demonstração.

Defino primeiro serem  $a$  e  $b$  números entre si primos, pois se tais não fossem [números entre si primos], a fórmula por divisão a isto poderia ser reduzida. Facilmente porém se percebe, deverem ser ímpares um e outro número  $a$  e  $b$ . se efectivamente um fosse par, então sucederia [ser]  $2a^4 + 2b^4$  um número imparmente par\*, que não é possível ser um quadrado. Ademais esta forma é congruente com essa  $(aa + bb)^2 + (aa - bb)^2$ , que por isso tem de se demonstrar não poder ser um quadrado, se não seja  $a = b$ . Por outro lado, por  $a$  e  $b$  [serem] números ímpares, serão  $a^2 + b^2$  e  $a^2 - b^2$  números pares, aquele de facto imparmente [par], este deveras parmente par. Chegou-se portanto† a esta forma  $(\frac{aa+bb}{2})^2 + (\frac{aa-bb}{2})^2$ , em que  $\frac{aa+bb}{2}$  e  $\frac{aa-bb}{2}$  são números entre si primos, aquele ímpar, esse deveras par; por qual razão se a forma proposta fosse um quadrado, seria  $\frac{aa+bb}{2} = pp - qq$  e  $\frac{aa-bb}{2} = 2pq$ , donde se repara [ser]  $a^2 = pp + 2pq - qq$  e  $b^2 = p^2 - 2pq - qq$ . expressões das quais a diferença é  $4pq = aa - bb$ ; e por isso será  $a + b = \frac{2mp}{n}$  e  $a - b = \frac{2nq}{m}$ ; donde  $a = \frac{mp}{n} + \frac{nq}{m}$  e  $b = \frac{mp}{n} - \frac{nq}{m}$ . Feitas porém estas substituições será  $\frac{mm}{nn}pp + \frac{nn}{mm}qq = pp - qq$  e ainda  $\frac{pp}{qq} = \frac{nn(mm+nn)}{mm(nn-mm)} = \frac{nn(n^4-m^4)}{mm(nn-mm)^2}$ . Tem portanto  $n^4 - m^4$  de ser um quadrado, o que pelo teorema precedente não é possível suceder. Q. E. D.

\*Ou “par mas não múltiplo de 4”.

† *Perventum ergo est*, creio não ser um uso estranho do supino, mas sim uma conjugação na voz passiva de *pervenio* errada.

**Corolário 1.** Se portanto  $a$  e  $b$  tenham sido números ímpares, não é possível até  $2ab(aa + bb)$  ser um quadrado; [caso contrário] deveriam efectivamente  $a$ ,  $b$  e  $2aa + 2bb$  ser quadrados, o que por este teorema não é possível suceder.

**Corolário 2.** A demonstração portanto teria efectivamente podido ser formada [partindo] da nona fórmula  $2ab(aa + bb)$ , mas aí dos números  $a$  e  $b$  um era definido par e outro ímpar\*, o que até se nada impedisse, contudo prestava† para dar uma demonstração peculiar‡.

**Corolário 3.** Então por esta demonstração é mais confirmada a veracidade da própria nona fórmula, como daqui já conste  $2ab(aa + bb)$  não poder ser um quadrado, até se ambos os números  $a$  e  $b$  sejam ímpares.

**Corolário 4.** Mais brevemente deveras até pode a veracidade deste teorema ser mostrada, [partindo] da forma  $(a^2 + b^2)^2 + (a^2 - b^2)^2$ ; a qual por isso não pode ser um quadrado, porque  $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$  é um quadrado. Não é possível aliás suceder, que a soma de dois quadrados seja um quadrado, se dos mesmos quadrados a diferença tenha sido um quadrado. Efectivamente, se tanto  $pp + qq$ , quanto  $pp - qq$  fosse um quadrado, um quadrado seria  $p^4 - q^4$ , o que [pelo teorema 2] não é possível suceder.

**Corolário 5.** De modo similar não é possível  $a^4 - 6aabb - b^4$  ser um quadrado. É efectivamente  $a^4 - 6aabb + b^4 = (aa - bb)^2 - 4aabb$ , que é deste modo a diferença de quadrados, cuja soma perfaz um quadrado.

**Corolário 6.** E ainda de modo análogo  $a^4 + 6a^2b^2 + b^4$  não é possível ser um quadrado, porque é  $(a^2 + b^2)^2 + 4aabb$ , de cujos quadrados  $[(a^2 + b^2)^2$  e  $4aabb]$  a soma não é possível ser um quadrado, porque a diferença dos mesmos  $(a^2 + b^2)^2 - 4aabb$  é um quadrado.

---

\*Uma referência às definições originais de  $a$  e  $b$  do corolário 1 do teorema 2.

†Com o sentido de “servia” ou “era útil para”.

‡*peculiarem*, declinação de *peculiaris*, *e*, com o sentido de “particular” ou “especial”.

## Teorema 4.

O dobro da diferença de dois biquadrados, como  $2a^4 - 2b^4$ , não é possível ser um quadrado, se não seja  $a = b$ .

## Demonstração.

Definamos  $a$  e  $b$  números entre si primos e  $2a^4 - 2b^4$  ser um quadrado, serão  $a$  e  $b$  números ímpares. Seria portanto  $2(a - b)(a + b)(aa + bb)$  um quadrado, e por isso até a sua décima-sexta parte, ou seja,  $(\frac{a-b}{2})(\frac{a+b}{2})(\frac{aa+bb}{2})$ ; que, como os factores sejam entre si primos, individualmente deveriam ser quadrados. Seja portanto  $\frac{a-b}{2} = pp$  e  $\frac{a+b}{2} = qq$ , será  $a = pp + qq$  e  $b = qq - pp$ . donde seja  $\frac{aa+bb}{2} = p^4 + q^4$ . como então  $q^4 + q^{4*}$  não seja possível serem<sup>†</sup> um quadrado, até  $\frac{aa+bb}{2}$ , por isso não é possível  $2a^4 - 2b^4$  ser um quadrado. Q. E. D.

## Teorema 5.

Nem  $ma^4 - m^3b^4$ , nem  $2ma^4 - 2m^3b^4$  pode ser um quadrado.

## Demonstração.

Definamos serem  $a$  e  $b$  números entre si primos, e ainda ser  $m$  um número nem quadrado, nem divisível por quadrados: se efectivamente  $m$  fosse divisível por um quadrado, então poderia o factor quadrado ser removido por divisão. Defina-se ademais ser  $m$  um número primo tanto com  $a$  quanto com  $b$ , serão por  $ma^4 - m^3b^4 = m(aa - mbb)(aa + mbb)$  todos os factores entre si primos, e por isso deveriam ser individualmente quadrados. Feito portanto  $m = pp$ , deveria  $(aa - ppbb)(aa + ppbb)$  ser um quadrado, o que não é possível suceder. De modo similar, por  $2ma^4 - 2m^3b^4 = 2m(aa - mbb)(aa + mbb)$ , e ainda os factores entre si ou [serem] primos ou terem o binário por medida comum<sup>‡</sup>, será ou  $2m$  ou  $m$  um quadrado: no primeiro caso deveras feito

---

\* $p^4 + q^4$

†*nequeant* foi conjugado erradamente no plural apesar do sujeito ser singular.

‡Leia-se “terem máximo divisor comum igual a 2”. O conceito de medida comum (um segmento de recta divisor de alguns outros dois) é obviamente geométrico. Que Euler tenha pensado naqueles termos advém de novo certamente do seu conhecimento d’Os Elementos de Euclides.

$2m = 4pp$ , teria de ser  $a^4 - 4p^4b^4$  um quadrado, o que analogamente não é possível suceder. Porém, se  $m = pp$ , então seria  $2a^4 - 2p^4b^4$  um quadrado, o que pelo teorema precedente não é possível suceder. Por outro lado, se  $m$  não tenha sido primo com respeito ao próprio  $a$ ; definamos  $m = rs$  e ainda  $a = rc$ , onde é evidente serem  $r$  e  $s$  números entre si primos, porque  $m$  foi definido ter nenhum factor quadrado. Quadrados portanto deveriam ser essas formas  $r^5sc^4 - r^3s^3b^4$  e  $2r^5sc^4 - 2r^3s^3b^4$ , ou seja,  $r^3sc^4 - rs^3b^4$  e  $2r^3sc^4 - 2rs^3b^4$ .

Porém, por os factores destas fórmulas [serem] entre si primos ou  $rs$  ou  $2rs$  deveriam ser quadrados, e mesmo  $r$  e  $s$  ou  $2s$  individualmente, donde fórmulas se originam, que já foi mostrado não poderem ser quadrados. Q. E. D.

**Corolário 1.** Deste modo então as formas  $mn(m^2a^4 - n^2b^4)$  e  $2mn(m^2a^4 - n^2b^4)$  não podem ser quadrados, [para] quaisquer números [que] se compreendam no lugar de  $m$ ,  $n$ ,  $a$  e  $b$ .

**Corolário 2.** Se  $maa + nbb$  tenha então sido um quadrado, nem  $m^2naa - mn^2bb$  nem  $2m^2naa - 2mn^2bb$  poderão ser quadrados. E ainda se  $maa - bb$  tenha sido um quadrado, nem  $m^2naa + mn^2bb$  nem  $2m^2naa + 2mn^2bb$  poderão ser quadrados.

**Corolário 3.** Definamos  $maa + nbb = cc$ ; será  $m = \frac{cc-nbb}{aa}$ , portanto nem  $n(cc-nbb)(cc-2nbb)$ , nem  $2n(cc-nbb)(cc-2nbb)$  poderá ser um quadrado. E ainda se tenha sido  $m = \frac{cc+nbb}{aa}$ ; então nenhuma dessas fórmulas  $n(cc+nbb)(cc+2nbb)$  e  $2n(cc+nbb)(cc+2nbb)$  poderá ser um quadrado.

**Corolário 4.** Se se defina  $c = \pm pp + nqq$  e  $b = 2pq$ , serão obtidas as seguintes fórmulas  $n(p^6 \pm 6nppqq + n^2q^4)$  e  $2n(p^6 \pm 6nppqq + n^2q^4)$ , que de nenhum modo poderão perfazer quadrados.

## Teorema 6.

Nem  $ma^4 + m^3b^4$ , nem  $2ma^4 + 2m^3b^4$  pode ser um quadrado.

## Demonstração.

Digo primeiro, se tenha sido  $mp^2 \mp mq^{2*}$  um quadrado, então nem  $mp^2 + mq^2$ , nem  $2mp^2 + 2mq^2$  de nenhum modo poder ser um quadrado: sucederia

---

\* $mp^2 - mq^2$ . Este erro deve-se provavelmente a uma possível intenção do autor de juntar os teoremas 5 e 6 num só.

efectivamente [ser] ou  $m^2(p^4 - q^4)$ , ou  $2m^2(p^4 - q^4)$  um quadrado contra o [que] já [foi] demonstrado. Façamos porém  $mp^2 - mq^2$  um quadrado definindo a raiz dele =  $\frac{(p-q)a}{b}$ , será  $mp + mq = \frac{a^2p - a^2q}{bb}$ , donde se repara [que]  $q = \frac{p(aa - mbb)}{a^2 + mbb}$ . Seja então  $p = a^2 + mb^2$ , será  $q = aa - mb^2$ , e mesmo  $p^2 + q^2 = 2a^2 + 2m^2b^4$ . Um quadrado portanto não poderá ser primeiro  $mp^2 + mq^2 = 2ma^4 + 2m^3b^4$ ; além disso,  $2mp^2 + 2mq^2 = 4ma^4 + 4m^3b^4$ . Destes colija-se nem  $ma^4 + m^3b^4$  nem  $2ma^4 + 2m^3b^4$  poder ser um quadrado. Q. E. D.

**Corolário.** Nestes dois teoremas foi alcançado, nenhuns números nessas formas  $ma^4 \pm m^3b^4$  e  $2ma^4 \pm 2m^3b^4$  poderem ser quadrados. Nestas fórmulas aliás todas as precedentes são contidas.

## Teorema 7. de FERMAT

Nenhum número triangular em inteiros pode ser um biquadrado afora a unidade.

### Demonstração.

Todos os números triangulares são contidos nesta forma  $\frac{x(x+1)}{2}$ . [É] portanto para demonstrar nunca poder ser esta fórmula  $\frac{x(x+1)}{2}$  um biquadrado: se de facto no lugar de  $x$  se substituíam números inteiros, excepto caso  $x = 1$ . É evidente porém ou  $x$  ser um número par ou ímpar; no caso anterior então  $\frac{x}{2}(x + 1)$ , no posterior deveras  $x(\frac{x+1}{2})$  dever ser um biquadrado; em cujos factores um e outro dos dois factores são entre si primos, e por isso um e outro deveria ser um biquadrado. Seja então no caso anterior  $\frac{x}{2} = m^4$ , ou seja,  $x = 2m^4$ , e deverá  $x + 1 = 2m^4 + 1$  ser um biquadrado. No caso posterior deveras seja  $\frac{x+1}{2} = m^4$ , para que seja  $x = 2m^4 - 1$ , o que outrossim tem de ser um biquadrado. Por esta razão, um biquadrado deveria ser  $2m^4 \pm 1$ . Defina-se  $2m^4 \pm 1 = n^4$ , será  $4m^4 = 2n^4 \mp 2$ , deveria portanto  $2n^4 \mp 2$  ser  $4m^4$ , isto é um quadrado. Em cima porém é demonstrado nunca poderem  $2a^4 \pm 2b^4$ , e por conseguinte também\*  $2n^4 \pm 2$  ser quadrados afora o caso  $n = 1$ . Definido porém  $n = 1$ , seja  $m$  ou  $= 0$  ou  $= 1$ ,

---

\**adeoque etiam* traduziu-se como “por conseguinte também” e não como “e mesmo até” o que seria consistente com o resto da tradução mas não teria sentido algum.

e ainda  $x$  ou  $= 0$  ou  $= 1$ . Nenhum número inteiro então há, que substituído no lugar de  $x$  daria um  $\frac{x(x+1)}{2}$  biquadrado, afora o caso [em que]  $x = 0$  e [o caso em que]  $x = 1$ . Por qual razão, em inteiros nenhum número triangular existe, que seria um biquadrado afora a unidade e a cifra\*. Q. E. D.

**Corolário 1.** Se se defina  $\frac{xx+x}{2} = y^4$ , será  $4xx+4x+1 = 8y^4+1 = (2x+1)^2$ . Do qual se segue, substituindo<sup>†</sup> números inteiros no lugar de  $y$ , nunca poder esta forma  $8y^4+1$  ser um quadrado, afora o casos [em que]  $y = 0$  e [o caso em que]  $y = 1$ .

**Corolário 2.** Se se defina  $8y^4+1 = z^2$ , sucederá [ser]  $16y^4 = 2z^2 - 2$ . Pelo que  $2z^2 - 2$  nunca pode ser um biquadrado; [para] qualquer número inteiro [que] se substitua no lugar de  $z$ , afora o caso [em que]  $z = 1$  e [o caso em que]  $z = 3$ .

## Teorema 8.

A soma de três biquadrados, dos quais dois são iguais entre si, ou seja, desse modo a forma  $a^4 + 2b^4$  não é possível ser um quadrado, se não seja  $b = 0$ .

## Demonstração.

Definamos ser  $a^4 + 2b^4$  um quadrado, e a raiz dele  $a^2 + \frac{m}{n}b^2$ ; onde tanto  $a$  e  $b$  quanto  $m$  e  $n$  serão números entre si primos. Feita porém a equação será  $2n^2b^2 = 2mna^2 + m^2b^2$ , e ainda  $\frac{b^2}{a^2} = \frac{2mn}{2n^2-m^2}$ <sup>‡</sup>; fracção que ou já tem a [forma] mais simples, ou através de divisão por 2 será reduzível<sup>§</sup> à [forma] mais simples. Definamos primeiro serem  $2mn$  e  $2n^2 - m^2$  números entre

---

\**cyphram*, supostamente a declinação de *cyphra* no acusativo singular, talvez seja uma ortografia alternativa de *cifra*, *ae*, que em Latim Medieval significava zero. Creio subjazer a esta escolha de ortografia a ideia errónea de ser esta palavra uma Latinização de uma palavra Grega. Na verdade os antigos Gregos não dominavam o conceito do número zero e portanto nem uma palavra para isto tiveram. Esta palavra proveio na Idade Média da palavra Árábica para o zero, *صفر*, que se pode transliterar como *cifr*.

<sup>†</sup>*substituendis*, declinação de *substituendus*, *a*, *um*, é um uso curioso de um gerundivo com o sentido moderno de gerúndio.

<sup>‡</sup> $\frac{b^2}{a^2} = \frac{2mn}{2n^2-m^2}$ , erro talvez devido à exiguidade dos tipos usados para esta fracção.

<sup>§</sup>Esta é uma forma possível de “reduzível” presente nos dicionários de Português mais próxima da palavra aqui usada, *reducibilis*.



si primos, o que advém, se  $m$  seja um número ímpar; e será  $b^2 = 2mn$  e  $a^2 = 2n^2 - m^2$ ; estes dois casos são para desenvolver, dos quais um é se  $n$  é um número ímpar e outro se  $n$  é par; naquele caso, em que  $n$  é ímpar, é manifesto até por  $m$  [ser] ímpar não poder suceder [ser]  $2mn$  um quadrado. neste caso deveras, em que  $n$  é um número par, não é possível suceder  $a^2 = 2n^2 - m^2$ , ou seja,  $a^2 + m^2 = 2n^2$ , por  $a$  e  $m$  [serem] números ímpares, e  $2n^2$  um número parmente par. Tenham então  $2mn$  e  $2n^2 - m^2$  o divisor comum 2, o que acontece se  $m$  seja um número par, por exemplo  $m = 2k$ , e será  $n$  um número ímpar; ter-se-á portanto  $\frac{b^2}{a^2} = \frac{4kn}{2nn-4kk} = \frac{2kn}{nn-2kk}$ , onde  $2kn$  e  $nn - 2kk$  serão números entre si primos. Daqui então por  $b^2$  e  $a^2$  analogamente [serem] entre si primos será  $b^2 = 2kn$  e  $a^2 = n^2 - 2kk$ . Por outro lado, aqui não é possível suceder [ser]  $2kn$  um quadrado, se não seja  $k$  um número par. Seja portanto  $k$  um número par, e ainda tanto  $n$  quanto  $2k$  deverão ser quadrados; Suceda então [ser]  $n = cc$  e  $2k = 4dd$ , onde será  $c$  um número ímpar, e isto feito ter-se-á  $a^2 = c^4 - 8d^4$ . Investiguemos então se  $c^4 - 8d^4$  possa ser um quadrado, definamos ser a raiz dele  $c^2 - \frac{2p}{q}dd$ . e será  $2q^2d^2 = pqc^2 - ppd^2$ ; ou seja,  $\frac{dd}{cc} = \frac{pq}{pp+2qq}$ ; onde novamente tanto  $c$  e  $d$  quanto  $p$  e  $d$  são números entre si primos. Aqui de novo dois casos são evidentes, quer  $p$  seja um número ímpar, quer par. Portanto, seja primeiro  $p$  um número ímpar; ter-se-á por  $pq$  e  $pp+2qq$  [serem] números entre si primos,  $dd = pq$  e  $cc = pp + 2qq$ ; Necessário portanto é que tanto  $p$  quanto  $q$  seja um quadrado. por qual razão, defino  $p = x^2$  e  $q = y^2$ , e provirá  $cc = x^4 + 2y^4$ ; pelo qual se  $a^4 + 2b^4$  fosse um quadrado, então também seria  $x^4 + 2y^4$  um quadrado, e os números  $x$  e  $y$  serão veementemente menores, do que  $a$  e  $b$ ; e [partindo] de novo de isto menores [números] poderiam encontrar-se, o que em inteiros não é possível suceder. Para o segundo caso, em que  $p$  é um número par, definamos  $p = 2r$ , e será  $\frac{dd}{cc} = \frac{2qr}{2rr+2qq} = \frac{qr}{2rr+qq}$ \*; e por  $q$  [ser] ímpar serão  $qr$  e  $2rr + qq$  números entre si primos. Será portanto  $dd = qr$  e  $cc = 2rr + qq$ , pelo qual dos números  $q$  e  $r$  um e outro deve ser um quadrado; e assim definidos  $q = xx$  e  $r = yy$ , sucederá  $cc = 2y^4 + x^4$ ; donde é patente, se  $a^4 + 2b^4$  fosse um quadrado, então também em números de longe menores haver de ser a forma similar  $x^4 + 2y^4$  um quadrado. Pelo que  $a^4 + 2b^4$  não pode ser um quadrado, se não seja  $b = 0$ . Q. E. D.

---

\*  $\frac{dd}{cc} = \frac{2qr}{4rr+2qq} = \frac{qr}{2rr+qq}$

**Corolário 1.** Visto que descobrimos [ser]  $\frac{b^2}{a^2} = \frac{2mn}{2n^2-m^2}$ , definido  $a^4 + 2b^4$  um quadrado, segue-se não poder  $2mn(2n^2 - m^2)$  ser um quadrado; quaisquer números até [que] no lugar de  $m$  e  $n$  se substituam.

**Corolário 2.** Feitos portanto  $m = x^2$  e  $n = y^2$ , um quadrado não será esta forma  $4y^4 - 2x^4$ . De modo similar definido  $2m = 4x^2$  e  $n = yy$ , um quadrado não será esta forma  $2y^4 - x^4$ . E ainda feito  $m = x^2$  e  $2n = 4y^4$ , esta fórmula  $8y^4 - x^4$  não é possível ser um quadrado.

**Corolário 3.** Se em geral suceda [ser]  $m = \alpha x^2$ , e  $n = \zeta y^2$ , provirá esta fórmula  $2\alpha\zeta(2\zeta^2 y^4 - \alpha^2 x^4)$ , ou seja,  $4\alpha\zeta^3 y^4 - 2\alpha^3 \zeta x^4$ , que de nenhum modo poderá ser um quadrado.

## Teorema 9.

Se esta forma  $a^4 + kb^4$  não pode ser um quadrado, então até esta forma  $2k\alpha\zeta^3 y^4 - 2\alpha^3 \zeta x^4$  por nenhum pacto\* poderá perfazer um quadrado.

## Demonstração.

Definamos ser a forma proposta  $a^4 + kb^4$  um quadrado, e a raiz dela  $= a^2 + \frac{m}{n}b^2$  será  $kn^2b^2 = 2mna^2 + m^2b^2$  e ainda  $\frac{b^2}{a^2} = \frac{2mn}{kn^2-m^2}$ . Porque portanto  $a^4 + kb^4$  não é possível ser um quadrado, então até  $\frac{2mn}{kn^2-m^2}$ , ou seja,  $2mn(kn^2 - m^2)$  não poderá ser um quadrado. [Se] suceda [ser]  $m = \alpha x^2$  e  $n = \zeta y^2$ , provirá  $2\alpha\zeta(k\zeta^2 y^4 - \alpha^2 x^4)$ , ou seja,  $2k\alpha\zeta^3 y^4 - 2\alpha^3 \zeta x^4$ . fórmula que, por causa disso, não pode ser um quadrado; [para] quaisquer números quer positivos quer negativos [que] no lugar de  $\alpha$  e  $\zeta$  se substituam. Q. E. D.

**Corolário 1.** Suceda [ser] quer  $\alpha$ , quer  $\zeta$  negativo tal que, provenha esta forma  $2\alpha^3 \zeta x^4 - 2\alpha\zeta^3 y^4$ , e defina-se ainda  $2\alpha^3 \zeta = p^2$ , será  $\zeta = \frac{p^2}{2\alpha^2}$ †, donde aquela forma transita nesta  $p^2 x^4 - \frac{kp^6}{4\alpha^8} y^4$ . Um quadrado portanto não é possível ser esta fórmula  $x^4 - 4ky^{4\ddagger}$ , definido  $4y^4$  em vez de  $\frac{p^4}{4\alpha^8} y^4$ §. De esta última fórmula portanto segue-se não poder suceder esta expressão  $2\alpha^3 \zeta x^4 + 8K\alpha\zeta^3 y^4$  [ser] um quadrado.

\*A palavra *pacto* é estranhamente usada em vez da que aparece em todas as outras frases deste tipo, *modo*. Leia-se “de nenhum modo”.

†  $\zeta = \frac{p^2}{2\alpha^2}$

‡ Isto admitindo a suposição do teorema.

§ Leia-se, “substituindo  $\frac{p^4}{4\alpha^8} y^4$  por  $4y^4$ ”, o que é possível, pois basta  $p$  ser par para que a fracção  $\frac{p^4}{4\alpha^8}$  seja o quádruplo de um biquadrado.

**Corolário 2.** Defina-se na fórmula encontrada  $2k\alpha\zeta^3y^4 - 2\alpha^3\zeta x^4$ ,  $2k\alpha\zeta^3 = pp$ , para que seja  $\alpha = \frac{pp}{2k\zeta^3}$ , transitará aquela [fórmula] nesta  $p^2y^4 - \frac{p^6}{4k^3\zeta^8}x^4$ , da qual se segue não poder  $a^4 - 4kb^4$  ser um quadrado; donde como antes  $2\alpha^3\zeta x^4 + 8k\alpha\zeta^3y^4$  não poderá ser um quadrado.

**Corolário 3.** Se portanto  $a^4 + kb^4$  não é possível ser um quadrado, então nem esta fórmula  $2k\alpha\zeta^3y^4 - 2\alpha^3\zeta x^4$  nem esta  $\alpha^3\zeta x^4 + k\alpha\zeta^3y^4$  poderá ser um quadrado: a posterior segue-se do corolário precedente escrevendo\*  $2\alpha$  no lugar de  $\alpha$ .

**Corolário 4.** Como então  $a^4 + b^4$  não possa ser um quadrado, as seguintes duas fórmulas  $\alpha^3\zeta x^4 + \alpha\zeta^3y^4$  e  $2\alpha\zeta^3y^4 - 2\alpha^3\zeta x^4$  não poderão de todo ser quadrados.

**Corolário 5.** E ainda porque  $a^4 - b^4$  não pode ser um quadrado, originar-se-ão estas duas novas fórmulas  $\alpha^3\zeta x^4 - \alpha\zeta^3y^4$  e  $2\alpha^3\zeta x^4 + 2\alpha\zeta^3y^4$ , que de nenhum modo poderão dar quadrados.

**Corolário 6.** Visto finalmente que  $a^4 + 2b^4$  não é possível ser um quadrado, também essas fórmulas  $\alpha^3\zeta x^4 + 2ab^3y^4$ † e  $4\alpha\zeta^3y^4 - 2\alpha^3\zeta x^4$  não poderão perfazer quadrados.

## Nota.

[Partindo] daquilo, que até agora demonstrei, provieram então as seguintes seis fórmulas mais gerais, que de nenhum modo podem transmutar-se em quadrados.

$$\begin{array}{ll}
 \text{I.} & \alpha^3\zeta x^4 + \alpha\zeta^3y^4 \\
 \text{II.} & \alpha^3\zeta x^4 - \alpha\zeta^3y^4 \\
 \text{III.} & \alpha^3\zeta x^4 + 2\alpha\zeta^3y^4
 \end{array}
 \quad \parallel \quad
 \begin{array}{ll}
 \text{IV.} & 2\alpha^3\zeta x^4 - 2\alpha\zeta^3y^4 \\
 \text{V.} & 2\alpha^3\zeta x^4 + 2\alpha\zeta^3y^4 \\
 \text{VI.} & 2\alpha^3\zeta x^4 - 4\alpha\zeta^3y^4
 \end{array}$$

E ainda nestas seis fórmulas são contidas todas, que nas fórmulas precedentes tratámos. [Partindo] porém destas fórmulas, como já antes fiz, poderiam sacar-se‡ fórmulas trinomiaes, que igualmente certo seria, poderem de maneira nenhuma dar quadrados; mas abstenho-me de as exhibir, a alguns

\* *scribendo*, declinação de *scribendus*, *a, um*, é mais uma vez um uso de um gerundivo com o sentido moderno de gerúndio.

†  $\alpha^3\zeta x^4 + 2\alpha\zeta^3y^4$

‡ *elici*, infinitivo passivo presente de *elicio*.

outros teoremas havemos de progredir\*, que sobre cubos se versam, e ainda [partindo] dessas fórmulas não é possível granjearem-se.

## Teorema 10.

Nenhum Cubo, de facto nem os números fraccionários exceptuados, pode perfazer um quadrado acrescido uma unidade, afora o único caso, em que o cubo é 8.

## Demonstração.

A proposição portanto a isto se reduz†, que  $\frac{a^3}{b^3} + 1$  nunca possa ser um quadrado, afora o caso em que  $\frac{a}{b} = 2$ . Pelo que será para demonstrar, nunca poder suceder esta fórmula  $a^3b + b^4$  [ser] um quadrado, se não seja  $a = 2b$ .

Esta expressão porém resolve-se nesses três factores  $b(a + b)(aa - ab + bb)$  que primeiro podem constituir um quadrado se pudesse ser  $b(a + b) = a^2 - ab + bb$ , donde resulta  $a = 2b$ , que será o caso, que excluimos. Defino porém, para prosseguir adiante,  $a + b = c$ , ou seja,  $a = c - b$ , feita a qual substituição ter-se-á  $bc(cc - 3bc + 3bb)$ , que é para demonstrar não poder ser um quadrado, se não seja  $c = 3b$ ; são porém  $b$  e  $c$  números entre si primos. Aqui porém ocorrem dois casos a considerar conforme  $c$  ou é múltiplo de três ou não: naquele caso efectivamente os factores  $c$  e  $cc - 3bc + 3bb$  terão o divisor comum 3, neste [caso] deveras todos os três [factores] serão entre si primos. Seja primeiro  $c$  não-divisível por 3, será necessário, que aqueles três factores individualmente sejam quadrados, nomeadamente,  $b$ , e  $c$ , e  $cc - 3bc + 3bb$  separadamente‡. Sucederá portanto [ser]  $cc - 3bc + 3bb = (\frac{m}{n}b - c)^2$ , será  $\frac{b}{c} = \frac{3nn - 2mn}{3nn - mm}$  ou  $\frac{b}{c} = \frac{2mn - 3nn}{mm - 3nn}$ §, cujos termos da fracção serão primos entre si, se não seja  $m$  múltiplo de três; seja portanto  $m$  por 3 não-divisível, será ou  $c = 3nn - mm$  ou  $c = mm - 3nn$ ; e ou  $b = 3nn - 2mn$ , ou  $b = 2mn - 3nn$ . Por outro lado, como não seja possível  $3nn - mm$  ser um quadrado, defina-se  $c = mm - 3nn$ , que suceda [ser] o quadrado da raiz  $m - \frac{p}{q}n$ . e daqui origina-se  $\frac{m}{n} = \frac{3qq + pp}{2pq}$ , e

---

\*Curiosamente a palavra usada pelo autor é *progressurus*, participio futuro activo do verbo depoente *progredior*, significante “progredir”, “avançar”. Deduzi que o verbo *sum* fora omitido da conjugação perifrástica, *progressurus sumus*.

†*redit*, conjugação de *redeo*.

‡*seorsim*, creio todavia ser uma escrita errada de *seorsum*.

§  $\frac{b}{c} = \frac{2mn - 3nn}{mm - 3nn}$

ainda  $\frac{b}{nn} = \frac{2m}{n} - 3 = \frac{3qq-3pq+pp}{pq}$ . Um quadrado portanto seria esta fórmula  $pq(3qq-3pq+pp)$ , que de todo similar é à [fórmula] proposta  $bc(3bb-3bc+cc)$  e consta de muito menores números. Por outro lado, seja  $m$  um múltiplo de três, por exemplo  $m = 3k$ , será  $\frac{b}{c} = \frac{nn-2kn}{nn-3kk}$ ; donde será ou  $c = nn - 3kk$  ou  $c = 3kk - nn$ ; porque porém  $3kk - nn$  não é possível ser um quadrado, defina-se  $c = nn - 3kk$ , e a raiz dele  $n - \frac{p}{q}k$ , donde sucederá  $\frac{n}{k} = \frac{3qq+pp}{2pq}$ ; ou seja,  $\frac{k}{n} = \frac{2pq}{3qq+pp}$ \*; e ainda  $\frac{b}{nn} = 1 - \frac{2k}{nn} = \frac{pp+3qq-4pq}{3qq+pp}$ . Um quadrado portanto deveria ser  $(pp+3qq)(p-q)(p-3q)$ . ponha-se  $p-q = t$  e  $p-3q = u$ , será  $q = \frac{t-u}{2}$  e  $p = \frac{3t-u}{2}$ , e aquela fórmula devém† nesta  $tu(3tt-3tu+uu)$  que novamente é similar à anterior  $bc(3bb-3bc+cc)$ . Resta portanto o caso posterior, em que  $c$  é um múltiplo de três, por exemplo  $c = 3d$ ; e ainda um quadrado deve ser  $bd(bb-3bd+3dd)$ , que como novamente seja similar à anterior, num e noutro caso é manifesto não poder acontecer, que a fórmula proposta seja um quadrado. Por qual razão, afora o cubo 8, de facto não há outros [cubos] em fracções, que [somados] com uma unidade façam um quadrado. Q. E. D.

**Corolário 1.** De modo similar pode demonstrar-se nenhum cubo diminuído uma unidade poder ser um quadrado; e isto de facto nem em fracções.

**Corolário 2.** Daqui se segue nem  $x^6 + y^6$ , nem  $x^6 - y^6$  poderem ser quadrados: e ainda nenhum número triangular ser um cubo afora a unidade.

---

\*  $\frac{k}{n} = \frac{2pq}{3qq+pp}$

† *abit*, conjugação de *abeo*, usado aqui com o sentido de “transforma-se”. Porque é conjugado na voz activa resolvi traduzir pela conjugação equivalente do verbo *devir*, o qual apesar de hoje ser inusitado, encontro ser uma tradução correcta.

## Posfácio da Tradução

Uma das causas de se não ter feito ainda uma tradução integral deste artigo para outras línguas importantes do meio científico como o Inglês ou o Russo, penso eu, é a sua dificuldade. É claro que não foi esta de todo a causa maior, todos os intelectuais do século XVIII sabiam ler e escrever fluentemente Latim, porquanto a necessidade de uma tradução só surgiu com o declínio do conhecimento da Língua Latina, o que gradualmente levou um século a acontecer, por qual altura já a matemática evoluíra para um nível em que o conteúdo deste e numerosos outros trabalhos de Euler e de outros pensadores contemporâneos deixara de ser vanguardista e surpreendente para ser curioso e mais histórica do que cientificamente relevante.

Ao traduzir tive de tomar muitas decisões, das quais quase todas procederam da eterna questão do tradutor: Qual é a melhor tradução, a literal ou a interpretativa? É claro que a resposta deve estar algures entre os dois extremos, mas eu optei por fazer uma tradução mais literal do que interpretativa. Penso que quem ler este artigo quererá não só saber a matemática que nele se encontra como também a linguagem de Euler. E em boa verdade, não me sinto capaz de glosar nem Euler nem para matemáticos.

Eu quis fazer transparecer a riqueza vocabular do Latim, que o autor bem explorou, e também as idiossincrasias da linguagem de Euler, o que pelo menos para mim é mui interessante pois caracterizam uma das melhores mentes de sempre. Para este fim, usei por vezes de expressões, vocábulos e gramática “com sabor a antigo” que enriqueceram importantemente o meu “arsenal” de tradução. A final de contas, o artigo foi escrito em Latim, a língua antiga que é o grande átavo do Português, porquanto encontrei ser deveras através de atavismo a melhor via para a melhor tradução.

Às technicalidades. Determinei uma tradução fixa para algumas palavras que transmitisse o melhor possível o seu conteúdo; porém quando tal não foi possível, quando alguma palavra tenha sido usada com diversos sentidos que não se pudessem capturar em poucas expressões do Português, como as preposições *ut* e *ex*, absteve-me de o fazer. Mantive também todas as minúsculas e maiúsculas e a pontuação o mais fielmente possível, mas adicionei alguma como auxílio de entendimento.

Quando me deparei com sinónimos recorrentes no corpo do artigo, investiguei a sua etimologia e a das potenciais traduções em Português para alinhavar cada sinónimo Latino com o sinónimo Português mais semelhante etimologicamente.

A tabela em baixo exhibe nas colunas ímpares verbos Latinos que foram mui usados pelo autor e a que decidi designar traduções Portuguesas rígidas, as quais integram as colunas pares.

<i>do</i> <sup>†</sup>	haver	<i>oporteo</i>	ter de ser
<i>fio</i>	suceder	<i>perspico</i>	perceber
<i>fore</i> <sup>‡</sup>	haver de ser	<i>pono</i>	definir
<i>intelligo</i>	compreender	<i>prodeo</i>	provir
<i>nequeo</i>	não ser possível	<i>reddo</i>	dar <sup>§</sup>

Pelo corpo do artigo podem encontrar-se muitas partículas modais\* e outros advérbios, o que pode parecer estranho e exagerado ao leitor. Porém creio haver uma causa para o seu extenso emprego: no Alemão falado (pelo menos no hodierno, do setecentista não sei muito) usam-se muito mais frequentemente do que em Português advérbios e partículas, porquanto julgo advir isto, como outras peculiaridades do estilo linguístico de Euler patentes nesta obra, de influência da sua língua materna.

Na tabela seguinte registaram-se algumas preposições, conjunções, advérbios de modo e partículas modais que se repetem sistematicamente ao longo do texto e, embora o Latim permita para quase todas várias interpretações entre si mui díspares da perspectiva do Português, foram deveras usadas com o sentido discriminado na tabela de modo bastante homogêneo.

---

<sup>†</sup>Aparece muito o verbo *do* na passiva com o significado de existir. Penso que isto é outro exemplo de interferência do Alemão, porquanto em Português “há” com o sentido de existir traduz-se em Alemão *es gibt* que significa literalmente “dá”.

<sup>‡</sup>Infinitivo futuro do verbo *sum*, “ser”.

<sup>§</sup>Com o sentido de “resultar em”, como na frase “um mais dois dá três”. Penso subjazer a este emprego peculiar do verbo *reddo* interferência do verbo Alemão *ergeben*, com o mesmo significado e cuja etimologia advém do prevérbio Alemão *er-* (parecido com o Latino *re-*) e do verbo *geben*, “dar”.

\*Advérbios deste tipo, cuja designação em Português desconheço, nomeio assim porque em Alemão, língua materna de Euler, se lhes dá este nome, *Modalpartikeln*. Exemplos destes advérbios em Português são: “mesmo”, “até” e “lá”. Estes assistem o interlocutor em exprimir as suas emoções em relação ao que comunique no momento em que as empregue, por exemplo: “Ela é boa até.”, “Faz-me lá isso!” e “Consegues mesmo correr assim tanto?”.

<i>adeo</i>	mesmo, por conseguinte*	<i>porro</i>	ademais
<i>alias</i>	senão	<i>praeter</i>	afora
<i>an</i>	se <sup>†</sup>	<i>propterea</i>	por causa disso
<i>at</i>	por outro lado	<i>prout</i>	conforme
<i>atque</i>	e ainda	<i>puta</i>	por exemplo <sup>‡</sup>
<i>autem</i>	porém, aliás	<i>quamobrem</i>	por qual razão
<i>deinde</i>	além disso	<i>quamquam</i>	embora
<i>denuo</i>	de novo	<i>quare</i>	pelo qual
<i>enim</i>	efectivamente	<i>quia</i>	porque
<i>ergo</i>	portanto	<i>quicumque</i>	qualquer/quaisquer
<i>etiam</i>	até, também*	<i>quidem</i>	de facto
<i>hactenus</i>	até aqui	<i>quo circa</i>	pelo que <sup>§</sup>
<i>hinc</i>	daqui	<i>quoniam</i>	visto que
<i>ideo</i>	por isso	<i>quoque</i>	também
<i>igitur</i>	então	<i>saltem</i>	pelo menos
<i>ita</i>	assim	<i>sed</i>	mas
<i>itemque</i>	analogamente	<i>seu</i>	ou seja
<i>iterum</i>	novamente	<i>sive</i>	quer <sup>¶</sup>
<i>longe</i>	de longe	<i>tamen</i>	contudo
<i>nam</i>	pois	<i>tandem</i>	eventualmente
<i>nunc</i>	agora	<i>tantum</i>	somente
<i>ob</i>	por	<i>tum</i>	então
<i>omnino</i>	de todo	<i>uterque</i>	um e outro
<i>pariter</i> <sup>  </sup>	parmente, igualmente	<i>vero</i>	deveras

\*Só usados em conjunto uma vez (*adeoque etiam*) na demonstração do teorema 7.

†Como em: “Não sei se devo ir”. Equivalente ao Inglês *whether* e ao Alemão *ob*.

‡Deveria porém ser um imperativo de *puto*, o que não faria deveras sentido nenhum... Não sei como justificar esta tradução que sei pelo contexto estar correcta.

§ *Quo circa* significa literalmente “ao redor de que”, a menos de *quo* ser declinado no ablativo em vez de o ser correctamente no acusativo, o que porém de facto não encaixa no contexto. Mas a tradução à letra para o Alemão, que é *darum*, significa também “portanto”, “por qual razão”, que é indubitavelmente o que se quis transmitir aqui.

¶Como em “Quer um, quer outro são bons”.

|| Este advérbio de modo é usado muitas vezes pelo corpo do artigo tanto com o seu sentido comum, “analogamente” ou “do mesmo modo”, quanto também com o sentido de “parmente” ou “de modo par” (“par” com o sentido de “divisível por 2”), conforme é implicitamente aliás explicado na demonstração do corolário 3 do lema 2 inicial, onde foi pela primeira vez utilizado. O advérbio *impariter* é também usado significante “de modo ímpar”, mas apenas na demonstração do teorema 3.



Para facilitar o entendimento do texto pelo leitor, introduzi entre parêntesis rectos, trechos de frase que percebi serem omissos no original mas necessários, ou pelo menos úteis, em clarificar o texto. Muito do que introduzi foram conjugações do verbo ser que em Latim se omitiam muito, mas que em Português não se omitem de todo.

Em textos escritos em Latim a oração infinitiva é ubíqua. Embora cada vez menos usado em Português, este estilo de construção frásica permanece correcto, pelo que o mantive na tradução. Tive porém de fazer alguma “ginástica sintáctica” para facilitar a leitura, por exemplo, para evidenciar quando de complementos directos se tratassem, construí as orações infinitivas subordinadas de forma a iniciarem tendencialmente com o verbo. Tomei esta opção porque realmente acerca dos números e dos outros entes matemáticos e mesmo da própria matemática não há tempo, nem, creio eu, nenhum conceito possível de tal. É mesmo a sua intemporalidade algo que os torna tão fascinantes e por que persistimos, gastando tempo e energia preciosos para nós entes finitos, em descobri-los, estudá-los e fazer traduções de artigos sobre eles. Face a isto, sentia que estaria a violar a sua essência, outrossim incidentalmente a do Latim, se tivesse forçado tempo a orações que tão apropriadamente eram infinitivas. Assim deveras com gosto afirmo ter mantido todos as conjugações verbais como Euler as escreveu\*.

Em Português usam-se frases como “Levarei comigo o guarda-chuva, caso chova.” e “Feito o trabalho de casa, posso brincar.” que são claramente resquícios do ablativo Latino. Um exemplo das muitas tais frases no texto são trechos como o da demonstração do teorema 1: “Definido portanto  $m = xx$  e  $n = yy...$ ”, oração esta que poderia ser lida como “Como foram definidos...” ou “Porque foram definidos...”, mas, como é perceptível, verdadeiramente em Português a tradução mais fiel ao sentido original com toda a sua latitude inerente é a literal, portanto assim a registei.

Ainda hoje se encontram textos em Português com participípios presentes aplicados com a sua verdadeira função, embora raramente, que é a de verbo. E de facto existe na gramática de línguas modernas, como o Alemão, este participípio. O exemplo disto mais recorrente no texto é *existentibus*, usado, por exemplo, no trecho do caso 1 da demonstração do teorema 2 assim traduzido: “Porque (...) será  $q = mm - nn$  e  $p = 2mn$ , existentes  $m$  e  $n$  números entre si primos.”. A palavra “existentes” aqui (que é também mais um exemplo de um ablativo traduzido à letra) pode ser lido nos con-

---

\*É claro que para isto tive de recorrer a conjugações perifrásticas e compostas, algo que não existia em Latim, para colmatar lacunas do Português face à rica língua Latina.

textos em que aparece como “porque existam” ou “como existam”. O autor porém não exprime a relação exacta da oração subordinada cujo predicado é *existentibus* com a oração principal, pois não usa quaisquer preposições. A subjectividade desta relação portanto não pode ser correctamente transmitida, se uma preposição ou uma conjunção se lhe apusesse na tradução. Ademais porque conjugar o verbo implicaria inexoravelmente tal aposição, a melhor tradução é com certeza a literal.

Devo asseverar que o atavismo do estilo com que registei esta tradução não foi desenfrenado, senão regido pelo critério que tenho vindo a explicar e cujos aspectos em que poderia ter sido mais atavista, mas tomei a decisão de não ser, prossigo explicando. De facto, as conjunções comparativas traduzi por “do que”, muito embora *quam* sugira à primeira vista que a tradução mais correcta seja “que”. Penso porém, após reflectir cuidadosamente, que isto não seja assim. Creio pois que a facultatividade do “do”, que é algo recente, apareceu por influência de línguas como o Castelhana e o Inglês.

Senti-me mui tentado em manter o gerundivo, ou seja, traduzir palavras como *demonstrandum* (estante na demonstração do teorema 7) por “demonstrando”. Embora se perceberia a tradução se eu assim a tivesse feito, contudo senti que isto seria esticar a proverbial corda demais. Ademais devo notar que há um exemplo usado com alguma frequência no corpo do texto de um gerundivo cuja tradução correcta não seja a convencional, logo nem poderia portanto ser aquela a que me senti tentado a fazer: O gerundivo *notandum* é usado não com o sentido de “notando”, nem tão-pouco sequer com o de “notável”, senão indubitavelmente com o sentido de “evidente”.