De solutione problematum Diophantaeorum per integros numeros*

Leonhard Euler

[175] §1. Qvoties in problematis Diophantaeis soluendis peruenitur ad formulam, in qua plus vna indeterminata non inest, maxime requiruntur numeri integri, qui loco indeterminatae positi quaesito satisfaciant. Hoc vero quando fieri non potest, numeris fractis acquiscere oportet. Obseruatum autem est, si in illa formula indeterminatae maxima dimensio fuerit quadratum et ipsa formula debeat esse numerus quadratus, plerumque infinitos numeros integros problema soluere, qui inter se certa lege cohaereant, et seriem quandam constituant. Sed si formula vel debeat esse cubus aliane altior potentia, vel si indeterminata plures duabus habeat dimensiones, plus effici non potest, quam vt saltem numeri fracti eruantur.

§2. In autem huiusmodi problematum omnium ratio est comparata, vt vnum numerum satisfacientem diuinatione inueniri oporteat, ex quo deinceps infiniti alii reperiri queant. Neque enim ad primum detegendum regula potest tradi, cum casu possint occurrere, [176] qui omnino nullam solutionem admittunt, cuiusmodi est $3x^2 + 2$, quae formula nunquam fieri potest quadratum. Quamobrem in sequentibus semper ponemus, vnicum tantum casum esse cognitum, quo conditioni problematis satisfiat, atque regulam dabimus, qua ex illo innumerabiles alii elici possint.

§3. Proposita igitur sit haec formula $ax^2 + bx + c$, quae debeat esse numerus quadratus. Sintque a, b et c numeri integri, et requirantur quoque numeri integri loco x substituendi. Datus autem sit numerus n, qui loco x positus reddat formulam $ax^2 + bx + c$ quadratum. Erit ergo $an^2 + bn + c$ numerus quadratus, cuius radix sit m. Iam ad alium numerum satisfacientem ex hoc dato n inueniendum, pono eum esse $\alpha n+\beta+\gamma\sqrt{an^2+bn+c}$, huncque valorem loco x substitutum reddere ax^2+bx+c quadratum, cuius radix sit $\delta n+\epsilon+\zeta\sqrt{an^2+bn+c}$. Perspicuum enim est illum numerum loco x substituendum fore rationalem ob an^2+bn+c quadratum, numeros autem integros hoc modo reperiri si modo sit n numerus integer, mox apparebit.

§4. Substituatur igitur $\alpha n + \beta + \gamma\sqrt{an^2 + bn + c}$ loco x in $ax^2 + bx + c$, hocque facto prodibit

$$\begin{array}{llll} a\alpha^2n^2 & +2a\alpha\beta n & +a\beta^2 & +2a\alpha\gamma n \\ \alpha^2\gamma^2n^2 & +ab\gamma^2 n & +ac\gamma^2 & +2a\beta\gamma \\ & +b\alpha n & +b\beta & +b\gamma \\ & & +c & \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\}\sqrt{an^2+bn+c}$$

[177] Sed quia huius radicem quadricem ponimus $\delta n+\epsilon+\zeta\sqrt{an^2+bn+c}$, erit hinc etiam ax^2+bx+c aequalis sequenti quantitati.

$$\begin{array}{llll} \delta^2n^2 & +2\delta\epsilon n & +\epsilon^2 & +2\delta\zeta n \\ a\zeta^2n^2 & +b\zeta^2 n & +c\zeta^2 & +2\epsilon\zeta \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\end{array}}\right\}\sqrt{an^2+bn+c}$$

* *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* **6**, 1738, pp. 175-188. [E29]

His duabis formis inter se aequatis, habebuntur sequentes aequationes.

$$\begin{aligned}
a\alpha^2 + a^2\gamma^2 &= \delta^2 + a\zeta^2,\\
2a\alpha\beta + ab\gamma^2 + b\alpha &= 2\delta\epsilon + b\zeta^2,\\
a\beta^2 + ac\gamma^2 + b\beta + c &= \epsilon^2 + c\zeta^2,\\
2a\alpha\gamma &= 2\delta\zeta,\\
2a\beta\gamma + b\gamma &= 2\epsilon\zeta.
\end{aligned}$$

Ex quibus elicitur $\delta = \frac{c\alpha+\gamma}{\zeta}$ et $\epsilon = \frac{2a\beta\gamma+b\gamma}{2\zeta}$, et valor ipsius δ in prima aequatione substituts dat, $a^2\zeta^2 + a\gamma^2\zeta^2 = a\alpha^2\gamma^2 + \zeta^4$, quae in duas resoluitur $\zeta^2 = \alpha^2$, et $\zeta^2 = a\gamma^2$. Harum autem posterior, nisi sit a quadratum, locum habere nequit. Habebimus ergo $\zeta = \alpha$, et secunda aequatio factis substitutionibus hisce similter in has resoluetur $a\gamma^2 = \alpha^2$, et $\beta = \frac{b(\alpha-1)}{2a}$, quarum iterum posterior tantum locum habet. His inuentis tertia tandem aequatio dabit $\alpha = \sqrt{a\gamma^2+1}$: inueniri igitur debet valor pro γ, quo $a\gamma^2 + 1$ fiat quadratum.

§5. Sit p iste numerus, qui loco γ substituts reddat $a\gamma^2 + 1$ quadratum, et huius radix ponatur q; ita vt sit $q = \sqrt{ap^2+1}$, erit $\alpha = q, \gamma = p, \beta = \frac{b(q-1)}{2a}, \delta = ap, \epsilon = \frac{bp}{2}$ et $\zeta = q$. Ex his colligitur sequens Theorema:

Si $ax^2 + bx + c$ est quadratum casu quo $x = n$, erit quoque quadratum casu, quo $x = qn + \frac{bq-b}{2a} + p\sqrt{an^2+bn+c}$; eiusque quadrati radix erit $apn + \frac{bp}{2} + q\sqrt{an^2+bn+c}$.

[178] Si ergo modo bp per 2 diuidi potest, radix quadrati erit numerus integer, et propterea quoque valor ipsius x erit integer, seu $bq - b$ diuidi poterit per $2a$.

§6. Quemadmodum autem ex n valore ipsius x dato inuentus est alius $qn + \frac{bq-b}{2a} + pm$ posito m loco $\sqrt{an^2+bn+c}$; ita hac quantitate tanquam n tractata, quo casu loco m sumi debebit $apn + \frac{bp}{2} + qm$, eruetur denuo alius valor, qui loco x substituts quaesito satisfacit, scilicet hic: $2ap^2n + bp^2 + 2pqm \quad (+n)$, quadrati vero hinc orti radix erit $2apq + bpq + 2ap^2m \quad (+m)$. Consideretur iam illa quantitas vt n et haec vt m habebitur quartus valor ipsius x satisfaciens hic: $4ap^2qn + 2bp^2q + 4ap^3m + qn + \frac{b(q-1)}{2a} + 3pm$. Et radix quadrati respondentis erit, $4a^2p^3n + 2bp^3 + 4ap^2qm + 3qpn + \frac{3pb}{2} + qm$.

§7. Valores ipsius x satisfacientes, vna cum ra[di]cibus quadratorum respondentium ergo ita se habebunt vt sequitur: [179]

	Valores ipsius x	Valores $\sqrt{ax^2+bx+c}$
I.	n	m
II.	$qn+pm+\frac{b(q-1)}{2a}$	$apn+qm+\frac{bp}{2}$
III.	$2q^2+2pqm+\frac{b(q^2-1)}{a}-n$	$2apqn+2q^2m+bpq-m$
IV.	$4q^3+4pq^2m+\frac{b(4q^3-3q-1)}{2a}-3qn-pm$	$4apq^2n+4q^3m+2bpq^2-apn-3qm-\frac{bp}{2}$
V.	$8q^4+8pq^3m+\frac{4bq^2(q^2-1)}{a}-8q^2n-4pqm+n$	$8apq^3n+8q^4m+4bpq^3-4apqn-8q^2m-2bpq+m$
	etc. etc.	etc.
	Huius progressionis haec est lex.	Huius progressionis haec est lex.
	term. quicunque A	E
	hunc sequens B	F
	$2qB-A+\frac{b(q-1)}{a}$	$2qF-E$

Hae igitur progressiones, quousque libuerit exiguo labore continuantur.

§8. Perspicitur ex his formis alternos adminimum terminos efficere ax^2+bx+c numerum quadratum integrum; atque omnia omnino quadrata fieri numeros integros si fuerit bp numerus par. Omnes autem ipsius x valores erunt numeri integri, si $b(q-1)$ diuidi poterit per $2a$; sin vero hoc non fuerit, saltem alterni ipsius x valores erunt numeri integri, nam $qq-1$ i.e. ap^2 semper diuidi poterit per a, si quidem, vt ponimus p et q sint numeri integri. [180] Praetera notandum est in terminis istis etiam m negatiue accipi posse, qua ratione numerus solutionum quandoque duplicatur.

§9. Intelligitur etiam, si a sit numerus quadratus, solutionem in numeris integris exhiberi non posse, nisi forte ax^2+bx+c vel ipsum est quadratum vel numero quadrato fieri potest aequale. Hanc ob rem exclusimus supra eos causa, quibus a erat quadratum, quia hic tantum de numeris integris problema soluentibus praecepta tradere instituimus. Nam si a est quadratum; nullus numerus integer potest exhiberi, qui loco p positus efficiat ap^2+1 quadratum, praeter 0. Hoc vero casu omnes valores ipsius x manent n, nullusque ergo alius, nisi is qui diuinatione est inuentus, eruitur.

§10. Quoties autem a non est numerus quadratus, semper numerus integer potest assignari, qui loco p positus efficiat ap^2+1 quadratum. Quamobrem his casibus, si unicum casum elicuerimus, quo ax^2+bx+c sit quadratum; simul quoque casus infinitos exhibere poterimus, qui ax^2+bx+c in quadratum transmutent. Proposita igitur formula ax^2+bx+c hoc erit agendum: primo coniectura detegi debebit valor ipsius x in integris, qui reddat ax^2+bx+c quadratum. Deinde etiam quaeri debet valor ipsius p, quo ap^2+1 etiam fiat quadratum. Hisque inuentis ope progressionum inuentarum casus infiniti innotescent.

[181] §11. Si c est quadratum, nempe $=dd$; statim apparet casus, quo ax^2+bx+d^2 est quadratum, is enim est si $x=0$. Ponamus ergo $n=0$, eritque $m=d$, et valores ipsius x satisfacientes constituent hanc seriem: $0, dp+\frac{b(q-1)}{2a}, 2dpq+\frac{b(q^2-1)}{a}, ----A, B, 2qB-A+\frac{b(q-1)}{a}$. Quadratorum autem, quae hinc generantur, radices erunt: $d, dq+\frac{bp}{2}, d(2q^2-1)+bpq, ----E, F, 2qF-E$. Harum serierum lex, vt et priorum (§7.) perspicua est, sunt enim omnes recurrentes, seu quiuis terminus ex duabus praecedentibus est compositus.

§12. Si $b=0$ et $d=1$, ut habeatur haec forma ax^2+1, ad quam, vt ex praecedentibus apparet, generalis ax^2+bx+c maximam partem reducitur. Huius ergo valores ipsius x respondentes in hac serie progrediuntur: $0, p, 2pq, 4pq^2 - p, ---- A, B, 2qB - A$. Radices vero quadratorum productorum erunt sequentes: $1, q, 2q^2 - 1, 4q^3 - 3q, ---- E, F, 2qF - E$. Si ergo vnicus casus p, quo $ap^2 + 1$ sit quadratum constat, huiusmodi numeri infiniti habebuntur, qui in tractatione generalis formulae $ax^2 + bx + c$ loco p et q collocari possunt.

§13. Quo autem haec methodus ad quosuis casus possit accomodari, videamus primo, quos numeros pro quolibet ipsius a valore literis p et q tribui oporteat. Debet autem p talis esse numerus qui $ap^2 + 1$ reddat quadratum, huiusque radix erit q. Perspicuum [182] quidem est, si vnicus pro p habeatur valor idoneus, simul quoque infinitos haberi: attamen hic vnicum duntaxat eumque minimum praeter 0 adhiberi conuenit. Nam reliqui sequentes, qui sunt $2pq, 4pq^2 - p$, etc. solutionum numerum non multiplicant, cum valores tantum sequentes ipsius x in §7. praebeant. Minimus autem ipsius p valor dabit omnes numeros ipsius x; satisfacientes, quod maiores non faciunt.

§14. Intelligatur igitur, quod si fuerit $a = e^2 - 1$, minimum ipsius p valorem fore 1, ipsiusque q, e. Deinde si fuerit $a = e^2 + 1$, tum esse $p = 2e$, et $q = 2e^2 + 1$. Atque si sit $a = e^2 \pm 2$, erit $p = e$, et $q = e^2 \pm 1$. Huiusmodi casus infiniti alii possunt definiri, quorum ingens numerus hoc continetur theoremate: si sit $a = \alpha^2 e^{2b} \pm 2\alpha e^{b-1}$, erit $p = e$, et $q = \alpha e^{b+1} \pm 1$ vbi pro α etiam numeri fracti accipi possunt, dummodo illi per e^{b-1} multiplicati in integros transmutentur. Simili modi etiam si sit $a = (\alpha e^b + \beta e^\mu)^2 + 2\alpha e^{b-1} + 2\beta e^{\mu-1}$, erit $p = e$, et $q = \alpha e^{b+1} + \beta e^{\mu+1} + 1$. Atque etiam si sit $a = \frac{1}{4}\alpha^2 k^2 e^{2b} \pm \alpha e^{b-1}$, erit $p = ke$, et $q = \frac{1}{2}\alpha k^2 e^{b+1} \pm 1$.

§15. Quoties igitur a est numerus, qui in istis formulis contineatur, statim apparet valor ipsius p et q. At si a huiusmodi fuerit numerus, qui nullo modo ad illas formulas potest reduci, peculiaris ad inuenienda p et q adhibenda est methodus, qua olim iam vsi sunt *Pellius* et *Fermatius*. Haecque methodus est vniversalis, et aeque succedit, quemcunque numerum denotet a. Praeterea etiam ideo hic [183] potissimum est commendanda, quod minimum ipsius p valorem, qui loco requiritur, exhibeat.

§16. Methodus haec extat descripta in operibus *Wallisii*, et hanc ob rem eam hic susius non expono. Operandi tamen modum in vnico exemplo ostedisse iuuabit, cuius inspecto ad quaeque alia solvenda perducet. Oporteat nimirum determinari minimum ipsius p valorem, quo$31p^2 + 1$ sit quadratum. Ad hoc efficiendum sequens instituitur calculus. $\sqrt{31p^2 + 1} = q$. Ergo $q > 5p$, ponatur itaque $q = 5p + a$,

$$
\begin{array}{rll}
6p^2 + 1 = 10ap + a^2, & p = \frac{5a + \sqrt{31a^2 - 6}}{6}, & p = a + b \\
5a^2 = 2ab + 6b^2 + 1, & a = \frac{b + \sqrt{31b^2 + 5}}{5}, & a = b + c \\
3b^2 = 8bc + 5c^2 - 1, & b = \frac{4c + \sqrt{31c^2 - 3}}{3}, & b = 3c + d \\
2c^2 = 10cd + 3d^2 + 1, & c = \frac{5d + \sqrt{31d^2 + 2}}{2}, & c = 5d + e \\
3d^2 = 10de + 2e^2 - 1, & d = \frac{5e + \sqrt{31e^2 - 3}}{3}, & d = 3e + f \\
5e^2 = 8ef + 3f^2 + 1, & e = \frac{4f + \sqrt{31f^2 + 5}}{5}, & e = 2f - g \\
f^2 = 12fg - 5g^2 + 1, & f = 6g + \sqrt{31g^2 + 1}. &
\end{array}
$$

Tamdiu scilicet hae operationes continuantur, quoad in media columna perueniatur ad $\sqrt{31g^2 + 1}$ eiusdem formae, quam habuit proposita $\sqrt{31p^2 + 1}$. Perspicuum iam est si ponatur $g = 0$ fore

$f = 1$. Hincque retrogrediendo habebitur: $e = 2, d = 7, c = 37, b = 118, a = 155, p = 273$, atque $q = 1520$.

§17. Quo autem non tanto opus sit labore ad valores ipsarum p et q inueniendos pro dato numero a, sequentem tabulam annexere visum est, in qua pro singulis valoribus ipsius a exhibentur minimi numeri, qui loco p substituti reddant $ap^2 + 1$ quadratum.

[184]

a	p	q	a	p	q
2	2	3	37	12	73
3	1	2	38	6	37
5	4	9	39	4	25
6	2	5	40	3	19
7	3	8	41	320	2049
8	1	3	42	2	13
10	6	19	43	531	3482
11	3	10	44	30	199
12	2	7	45	24	161
13	180	649	46	3588	24335
14	4	15	47	7	48
15	1	4	48	1	7
17	8	33	50	14	99
18	4	17	51	7	50
19	39	170	52	90	649
20	2	9	53	9100	66249
21	12	55	54	66	485
22	42	197	55	12	89
23	5	24	56	2	15
24	1	5	57	20	151
26	10	51	58	2574	19603
27	5	26	59	69	530
28	24	127	60	4	31
29	1820	9801	61	226153980	1766319049
30	2	11	62	8	63
31	273	1520	63	1	8
32	3	17	65	16	129
33	4	23	66	8	65
34	6	35	67	5967	48842
35	1	6	68	4	33

[185] §18. Hic statim occurrit modus perfacilis extrahendi quam proxime radicem quadratam ex numero quocunque non quadrato a. Quia enim est $ap^2 + 1 = q^2$ erit $\sqrt{a} = \frac{\sqrt{q^2-1}}{p}$, et, si q sit numerus valde magnus, erit $\sqrt{a} = \frac{q}{p}$ quam proxime. Sed loco p possunt poni singuli termini seriei $0, p, 2pq, 4pq^2 - p, - - - - A, B, 2qB - A$, et loco q singuli termini respondentes seriei huius $1, q, 2q^2 - 1, 4q^3 - 3q, - - - - E, F, 2qF - E$ (§12). Sit huius seriei terminus indicis $i = Q$, et illius terminus,

cuius index etiam i est $= P$, erit $\sqrt{a} = \frac{Q}{P}$. Quia vero, quo magis continuantur hae series, maiores quoque fiunt termini Q; eo propior reperietur $\sqrt{a}$ sumendis terminis serierum a primo longius distantibus. Sit exempli gratia $a = 6$, erit $p = 2$ et $q = 5$, seriesque sibi inuicem subscribantur vt sequitur, posteriore loco superiore posita: $\frac{1,\ 5,\ 49,\ 485,\ 4801,\ 47525,\ 470449,\ 46569695,\ \text{etc.}}{0,\ 2,\ 20,\ 198,\ 1960,\ 19402,\ 192060,\ 1901198,\ \text{etc.}}$ Sumtis igitur vltimis terminis, erit $\frac{4656965}{1901198}$ ita propinquam radici quadrate ex 6, vt plus eam non excedat, quam hac fractione $\frac{1}{2(1901198)^2\sqrt{6}}$. Simili modo patet radicem quadratam ex 61 fore proxime aequalem $\frac{1766319049}{226153980}$. Quae quidem radix vera aliquantulum maior est, sed excessus est minor quam $\frac{1}{2(226153980)^2\sqrt{61}}$.

§19. Quaerantur omnes numeri triangulares, qui sint simul quadrati; debebit $\frac{x^2+x}{2}$ esse quadratum. Quadratum igitur quoque erit $2x^2+2x$, ex quo sit, collatione cum formula ax^2+bx+d^2 (§11) instituta $a = 2, b = 2, d = 0$. Sed quia est $a = 2$, erit ex [186] tabula superiore $p = 2$ et $q = 3$. Vnde loco x substitui debebunt sequentes valores 0, 1, 8, 49, 288, 1681, 9800, etc. quo $\frac{x^2+x}{2}$ fiat quadratum. Quadratorum autem hinc ortorum radices tenebunt hanc seriem, 0, 1, 6, 35, 204, 1189, 6930, etc. Vel quadrata, quorum radices continentur in hac serie, erunt numeri triangulares. Seriei quidem huius posterioris termini fiunt duplo maiores, si formentur ex serie generali $d, dq + \frac{bp}{2}, d(2q^2-1)+bpq$ etc. sed quia hi termini sunt radices ex $2x^2+2x$, debeunt diuidi per 2, quo habeantur radices ex $\frac{x^2+x}{2}$.

§20. Numeri polygonales l laterum exprimuntur hac formula generali $\frac{(l-2)x^2-(l-4)x}{2}$, in qua x denotat radicem numeri polygonalis. Quo ergo huiusmodi numerus polygonalis sit quadratum, oportet $2(l-2)x^3 - 2(l-4)x$ esse quadratum. Statim autem vnus casus apparet, quo quaesito satisfit, scilicet si $x = 0$; sit enim ipsa formula $= 0$. Quamobrem habebimus $n = 0$ et $m = 0$, et formula cum generali $ax^2 + bx + c$ comparata prodit $a = 2(l-2)$ et $b = -2(l-4)$, atque $c = 0$. Fiat igitur $2(l-2)p^2 + 1 = q^2$, erunt ipsius x valores, quibus $2(l-2)x^2 - 2(l-4)x$ seu huius pars quarta $\frac{(l-2)x^2-(l-4)x}{2}$, i.e. ipse numerus polygonalis sit quadratum, sequentes, $0, \frac{-(l-4)}{2(l-2)}(q-1), \frac{-(l-4)}{(l-2)}(q^2-1), ---- A, B, 2qB - A - \frac{(l-4)}{l-2}(q-1)$. Qui quidem numeri omnes, si $l > 4$, sunt negatiui, attamen affirmatiui habebuntur valores ipsius x sumto q negatiuo, tum enim alterni termini erunt affirmativi. Deinde [187] etiam si inuentus sit numerus negatiuus pro x, qui sit $-k$, poterit numerus affirmatiuus dari, qui eundem numerum polygonalem producat, erit nempe $x = k + \frac{l-4}{l-2}$, sed nisi sit $\frac{l-4}{l-2}$ numerus integer, hi numeri affirmativi fiunt fracti, quos hic excludimus. Hanc ob rem alternis terminis superioris seriei posito $-q$ loco q contenti esse debemus. Radices vero quadratorum $2(l-2)x^2-2(l-4)x$ his casibus resultantium tenebunt hanc progressionem, $0, (l-4)p, 2(l-4)pq, ---- E, F, 2qF - E$.

§21. Quo autem non alii numeri, nisi affirmatiui et integri reperiantur, alium casum, quo $2(l-2)x^2- 2(l-4)x$ fit quadratum, erui oportet, qui erit, si $x = 1$; prodibit enim 4. Hanc ob rem ponatur $n = 1$ et $m = 2$, quo facto habebuntur pro x valores sequentes: $1, q + 2p - \frac{(l-4)}{2(l-2)}(q-1), 2q^2 - 1 + 4pq - \frac{(l-4)}{l-2}(q^2-1), ---- A, B, 2qB - A - \frac{(l-4)}{l-2}(q-1)$. Radices autem quadratae ex $\frac{(l-2)x^2-(l-4)x}{2}$ progredientur in hac serie, $1, \frac{lp}{2} + q, lpq + 2q^2 - 1, ---- E, F, 2qF - E$. Quo autem omnes ipsius x valores sint numeri integri, non quidem loco q minimum valorem, sed eum, qui reddat $\frac{l-4}{2(l-2)}(q-1)$ numerum integrum seligi conuenit, id quod semper fieri poterit. Vt si quaerantur numeri pentagonales quadrati, erit $l = 5$, et $a = 6$, atque q erit numerus ex hac serie 1, 5, 49, etc. et ipsius p valores respondentes erunt 0, 2, 20, etc. Quo igitur $\frac{(l-4)}{2(l-2)}(q-1) = \frac{1}{6}(q-1)$ sit numerus integer, sumi debet $q = 49$, et $p = 20$. Radices ergo numerorum [188] pentagonalium, qui sunt quadrati, erunt, $1, 81, 7921, ---- A, B, 98B - A - 16$, qui numeri etiam in superiore serie (§20) continentur, si accipiatur $q = -5$, erunt enim termini alterni affirmatiui. Horum autem numerorum pentagonlaium radices quadratae erunt $1, 99, 9701, ----E, F, 98F - E$.

§22. Quia est $2(l-2)p^2 + 1 = q^2$, manifestum est ex praecedentibus, si fuerit $2l - 4$ quadratum, nullum numerum integrum loco p substitui posse. Hanc ob rem vel omnes numeri polygonales erunt quadrati, vel tantum nonnulli. Prius euenit, si $l = 4$; nam omnes numeri tetragonales sunt simul quadrati. Posterius vero si sit $2l - 4 = 16$ seu 36, seu 64 etc. his enim casibus alii non erunt quadrati, nisi 0 et 1. Si $2l - 4 = 16$, erit $l = 10$, ideoque numeri polygonales erunt decagonales, quorum forma est $4x^2 - 3x$. Nullusque numerus decagonalis est quadratus praeter 0 et 1 in integris.