# Der Briefwechsel zwischen Leonhard Euler und Johann I Bernoulli.

Von G. Eneström in Stockholm.

## I. 1727—1731.

Vor sechs Jahren habe ich in dieser Zeitschrift[1]) ein Verzeichnis der in Stockholm aufbewahrten Briefe von Leonhard Euler an Johann I Bernoulli veröffentlicht und Aufschlüsse über deren Inhalt gegeben. Dabei wurde hervorgehoben, daß die Briefe zwar keine wesentlich neuen Beiträge zur Geschichte der Mathematik des 18. Jahrhunderts bringen, dennoch von historischem Gesichtspunkte aus von Interesse sind, besonders weil man dadurch instand gesetzt wird, den Zeitpunkt gewisser Entdeckungen von Euler näher zu präzisieren; als Belege hierfür können zwei Artikel von mir, nämlich über die Entdeckung der allgemeinen Lösung einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten[2]) und über die Entdeckung der Gleichung der kürzesten Linie auf einer Oberfläche[3]), dienen.

Anläßlich der oben genannten Aufschlüsse bin ich zuweilen von Fachgenossen um nähere Auskunft über den Inhalt gewisser Briefe ersucht worden, und dieser Umstand hat mich angeregt, die Briefe selbst der mathematisch-historischen Forschung zugänglich zu machen. Eigentlich genügt es, den Namen des Briefschreibers zu nennen, um eine Veröffentlichung der Briefe zu motivieren[4]). Ich beabsichtige darum dieselben nebst erläuternden Anmerkungen in der Bibliotheca Mathematica zum Abdruck zu bringen, und beginne jetzt mit den sieben ersten Briefen, die

1) Eneström, *Sur les lettres de Léonard Euler à Jean I Bernoulli;* Biblioth. Mathem. 1897, S. 51—56.

2) Eneström, *Sur la découverte de l'intégrale complète des équations différentielles linéaires à coefficients constants*; Biblioth. Mathem. 1897, S. 43—50.

3) Eneström, *Sur la découverte de l'équation générale des lignes géodésiques;* Biblioth. Mathem. 1899, S. 19—24.

4) Vgl. M. Cantor in der Allgemeinen deutschen Biographie 6, Leipzig 1877, S. 424 (Art. Euler).

1727—1731 geschrieben sind. Diese bilden gewissermaßen ein abgeschlossenes Ganzes, denn nach dem 11. August 1731 scheint der Briefwechsel zwischen EULER und BERNOULLI für längere Zeit aufzuhören, und von den späteren Briefen besitzen wir keinen, der älter als 1737 ist.

Die Briefe von BERNOULLI an EULER sind schon teils von FUSS[1]), teils von mir[2]) veröffentlicht, und es könnte also möglicherweise als überflüssig betrachtet werden, dieselben hier abzudrucken. Auf der anderen Seite bilden die nämlichen Briefe eine wichtige Ergänzung der EULERschen, und ich habe mich darum entschlossen auch jene hier einzuführen.

Der erste aufbewahrte Brief von EULER ist vom 5. November 1727, und sicherlich ist dieser auch der erste des ganzen Briefwechsels. Freilich antwortet EULER darin auf eine briefliche Anfrage von JOHANN BERNOULLI, und im Briefe kommt der Ausdruck „quemadmodum in novissimis literis significasti" vor, aber ohne Zweifel handelt es sich um ein Schreiben von JOHANN BERNOULLI an seinen Sohn DANIEL, nicht an EULER. Die folgenden fünf Briefe von EULER sind bezw. vom 10. Dezember 1728, 18. Februar 1729, 16. Mai 1729, 21. Oktober 1729 und 11. Juli 1730 datiert. EULER hatte also 1727—1730 sechs Briefe an BERNOULLI gesandt, bekam aber 1728—1729 nur drei Antworten, nämlich vom 9. Januar 1728, 18. April 1729 und 17. Dezember 1729, und der Brief von 1730 scheint nicht beantwortet worden zu sein. Alle bisher erwähnten Briefe sind lateinisch geschrieben, aber am 25. Mai 1731 richtete EULER an BERNOULLI einen Brief in deutscher Sprache und bekam darauf eine deutsche Antwort vom 11. August 1731. Damit dürfte, wie ich schon bemerkt habe, der Briefwechsel für längere Zeit aufgehört haben.

Unter den Fragen, die in den Briefen behandelt wurden, sind in erster Linie die folgenden drei zu nennen: 1) über die Logarithmen negativer Größen; 2) über Integration gewisser Differentialgleichungen zweiter Ordnung; 3) über die Gleichung der kürzesten Linie auf einer Oberfläche.

In betreff der ersten Frage nimmt BERNOULLI hauptsächlich denselben Standpunkt ein, wie etwa 16 Jahre früher in seinem Briefwechsel mit LEIBNIZ, während EULER die Schwierigkeiten hervorhebt, welche entstehen, wenn man $\log x = \log(-x)$ annimmt. Zu einer Verständigung gelangten

---

1) *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle publiée par* P. H. FUSS, T. II (St.-Pétersbourg 1843), S. 1—94. — Hierzu gehört noch die von mir in der Biblioth. Mathem. 1898, S. 58—60 veröffentlichte „scheda" des JOHANN BERNOULLI vom 16. April 1740.

2) *Trois lettres inédites de JEAN Ier BERNOULLI à LÉONARD EULER par* G. ENESTRÖM; Bihang till svenska vetenskapsakademiens handlingar 5, 1880, Nr. 21.

die Briefschreiber nicht, und erst ein paar Jahrzehnte später kam Euler dazu, die Frage näher zu untersuchen und damit endgiltig zu erledigen.

Die Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die behandelt werden, sind wesentlich dieselben, mit denen sich Euler im 3. Bande der Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae beschäftigt hat; besonders interessieren sich die Briefschreiber für die Gleichung

$$y^m \frac{d^2y}{dx^2} = ax^n \left(\frac{dy}{dx}\right)^r.$$

Die Frage der Gleichung der kürzesten Linie auf einer Oberfläche wurde von Bernoulli angeregt, und was sich hierüber in den Briefen findet, stimmt wesentlich mit dem überein, das später von Euler im 3. Bande der Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae und von Bernoulli im 4. Bande seiner *Opera omnia* auseinandergesetzt wurde.

Auch mit Problemen über tautochrone und isochrone Kurven beschäftigen sich die Briefe, in nahem Anschlusse an die einschlägigen Abhandlungen von Euler in den Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, und die zwei Briefe in deutscher Sprache sind ausschließlich der mathematischen Theorie der Musik gewidmet.

Mehr im Vorübergehen werden einige andere Gegenstände behandelt, z. B. über die Bewegungen von Kanonenkugeln; über die Glieder der Reihe 1, 1.2, 1.2.3, ..., 1.2.3...$n$, die gebrochenen Werten von $n$ entsprechen; über eine Verallgemeinerung des Problems von der kürzesten Linie auf einer Oberfläche; über die Bewegung eines Körpers auf einer Kurve, die in einem beweglichen Vertikalplane liegt.

Noch andere Fragen werden beiläufig erwähnt als von Euler oder von seinen Kollegen in Angriff genommen.

## 1.

## Euler an Bernoulli 5. November 1727.

Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm.

*Inhalt.* Euler spricht seinen herzlichsten Dank aus für das Wohlwollen, das ihm Bernoulli bei vielen Gelegenheiten erwiesen hat. — Gewisse kritische Bemerkungen von N. Harscher in betreff der Abhandlungen von Bernoulli. — Schwierigkeiten bei der mathematischen Behandlung der Ausströmung von Flüssigkeiten durch Öffnungen von Gefäßen. — Eine von Euler in Angriff genommene Abhandlung über die Theorie des Schalles. — Die Lösung von J. Hermann des Problemes die tautochrone Kurve im resistenten Medium zu bestimmen. — Die geometrische Bedeutung der Gleichung $y = (-1)^x$.

Vir Excellentissime Celeberime Fautor atque Patrone summe semper Colende!

Postulat officium meum, ut, quod coram negligentius peregeram, id absens literis diligentius, et quantum tenui calamo fieri potest, accuratius perficiam, Tibique, Vir Excellentissime, gratias, quantas mente concipere possum, maximas agam, pro summis quae largiter in me contulisti, beneficiis. Non solum mihi, de Praestantissima Tua et Carissima, qua prae omnibus longe excellis, scientia, interiora penetralia benevole patefacere et largiri haud dedignatus es, verum etiam sine ullo meo merito, sollicite eo incubuisti, ut officium quoddam in Patria, si fortuna favisset, nec non alibi occuparem. Pro ingentibus hisce innumerisque aliis beneficiis, quomodo me, quodammodo saltem, sufficienter enim vires meas longe superat, gratum Tibi sistam, nescio. Id tamen agam, et ita me geram, ut Te eorum, quibus me mactare voluisti, beneficiorum nunquam poeniteat, atque Tibi me observantissimum et quavis occasione obstrictissimum, exhibebo. Deum autem Ter Optimum Maximum ex animo precor, ut Vitam tuam in Carissimae tuae familiae emolumentum et solatium, in Litterarum promotionem et augmentum, in multos annos protrahere velit, Tibique bonam valetudinem, felices laborum tuorum successus, et quaecunque ad vitam hanc commodo transigendam sequentemque coelestem adipiscendam conducunt, clementer largiri. Ad haec Tuo me favori, meaque studia submisse commendo, rogoque ut, quo hactenus me complexus fuisti amore, favore et patrocinio, in posterum me impertire benevole perrecturus sis.[1])

Petis, Vir Excellentissime, ut perscribam ea, quae Exp. D. HARSCHER[2]) aliquando in Te mecum locutus est. Quantum recordor, res ita se habuit: In bibliotheca publicâ primum incepit de trajectoriis reciprocis loqui, de quibus se tot schediasmata in Actis Erudit. deprehendere ajebat,[3]) sibi autem totam rem plane nullius usus neque in vita communi neque in medicina videri (quasi quae illuc applicari nequeant, nihili essent facienda), ut merito quae de illis excogitata sunt, veritates fatuae vocari possint,

1) Bei dem Durchlesen der etwas übertriebenen Ausdrücke von EULERS Dankbarkeit muß man in Betracht ziehen, daß der Briefschreiber am 15. April 1707 geboren war und also noch nicht 21 Jahre erfüllt hatte.

2) NIKOLAUS HARSCHER, geboren in Basel den 1. Mai 1683, wurde 1698 Philosophiae Magister, 1704 Doctor Medicinae, 1707 Professor der Historie und Eloquenz in Marburg, 1711 Professor der Eloquenz in Basel und starb in Basel den 27. Oktober 1742. Er hat viele Abhandlungen und Reden medizinischen und literarischen Inhalts veröffentlicht. Als Student beschäftigte er sich ein wenig mit der Mathematik und verteidigte 1698 die vierte Abhandlung von JAKOB BERNOULLI über unendliche Reihen (vgl. CANTOR, *Vorles. über Gesch. d. Mathem.* $3^2$, S. 90).

3) Das Problem der reziproken Trajektorien wurde im Jahre 1720 von NIKOLAUS II BERNOULLI gestellt, und gab zu einigen Artikeln in den Acta Eruditorum Anlaß (vgl. CANTOR, a. a. O. $3^2$, S. 473—474).

seque mirari Te in hujusmodi inutilibus studia Tua collocare. Hisce autem longe deteriorem esse dissertationem *De motu musculorum*[1]) quippe quâ in re medica vix absurdius quid excogitatum sit. Haec sunt, quae mihi recordanti inciderunt, et quae se exacte sic habere affirmare possum.

Cum ordo conventu nostro aliquid proponendi me tetigisset, primum de effluxu aquarum ex vasis perforatis quaedam proposui,[2]) quam materiam Cl. Tuus Filius jam perscripsit.[3]) Multis autem haec Theoria difficultatibus premitur, quemadmodum in novissimis literis significasti. Experientiam enim, quando cylindrorum fundis alii graciliores infiguntur, minus conspirantem habet, siquidem theoria tempus duplo fere minus exhibet.

Nuper incepi dissertationem meam de sono exponere,[4]) ubi primum aeris naturam ex tua Theoria deductam explicavi, circa eam inveni quod velocitas materiae subtilis in globulis aereis gyrantis tanta esse debeat, ut mota in directum lato possit tempore unius minut. sec. ad summum 1116, ad minimum 1070 ped. absolvere possit, quae velocitas apprime eadem est cum velocitate soni, num eae a se invicem forte dependeant nescio.

Celeb. Hermannus[5]) nuper solutionem tautochronarum in medio resistente[6]) dedit, exactissime eandem quam ego dederam.[7])

Incidi forsan in hanc aequationem $y = (-1)^x$, qualem ea figuram exhibeat, difficile determinatu videtur, cum $y$ nunc affirmativum, nunc negativum, nunc imaginarium existat, mihi ea videtur non lineam continuam exprimere, sed infinita puncta discretim posita ad distantiam $= 1$ ex utraque axis parte, quae autem simul sumta aequentur axi.

Datum Petropoli: Vale Vir Excellentissime et favere perge
d. 5. Novemb. vet. st. Tui observantissimo et obstrictissimo servo
A. 1727. Leonh. Euler.

---

1) Die *Dissertatio de motu musculorum* von Johann Bernoulli wurde 1694 in Basel herausgegeben.

2) Dieser Vortrag von Euler scheint nicht gedruckt worden zu sein.

3) Siehe die Abhandlung von Daniel Bernoulli, *Theoria nova de motu aquarum per canales quoscumque fluentium;* Comment. acad. sc. Petrop. 2, 1727 (gedruckt 1730), S. 111—125.

4) Euler hatte 1727 in Basel eine *Dissertatio physica de sono* herausgegeben.

5) Über Jakob Hermann (geboren in Basel den 16. Juli 1678, gestorben daselbst den 11. Juli 1733) siehe Cantor, a. a. O. 3², S. 275—276.

6) Vgl. die Abhandlung von Hermann, *Theoria generalis motuum qui nascuntur a potentiis quibusvis in corpore indesinenter agentibus;* Comment. acad. sc. Petrop. 2, S. 139—173, wo S. 158 eine Methode zur Lösung der Aufgabe angedeutet wird.

7) Vgl. die Abhandlung von Euler, *Curva tautochrona in fluido resistentiam faciente secundum quadrata celeritatum;* daselbst 4, 1729 (gedruckt 1735), S. 67—89.

Aufschrift:

*Monsieur*
*Monsieur* JEAN BERNOULLI
*Tres Celebre Professeur des Mathematiques, et Membre des Academies Royales de Franche*(!), *d'Angleterre et de Prusse etc.*
*à*
*Bâle.*

## 2.

## Bernoulli an Euler 9. Januar 1728.

Antwort auf EULERS Brief vom 5. November 1727. Original im Archiv der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg; Konzept in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. Veröffentlicht von FUSS a. a. O. S. 3—7.[1]

*Inhalt.* Die Ernennung von HERMANN zum Professor der Moralphilosophie an der Universität in Basel. — EULERS Untersuchungen über die mathematische Theorie der Ausströmung von Flüssigkeiten und der Geschwindigkeit des Schalles. — Experimente über vertikal abgeschossene Kanonenkugeln und Berechnung der Bewegungen solcher Kugeln. Eine Abhandlung von CHR. FATIO DE DUILLIER über Schwingungs- und Stoß-Mittelpunkt. — Wert der Größe $y = (-1)^x$ für verschiedene Werte von $x$. — Berichtigung eines Versehens von DANIEL BERNOULLI in betreff der Bewegungen von vertikal geworfenen Körpern. — Übersendung einer dynamischen Abhandlung von JOHANN BERNOULLI. — EULER wird aufgefordert mit DANIEL BERNOULLI in Eintracht zu leben.

Doctissimo atque ingeniosissimo Viro Juveni
LEONHARDO EULERO S. P. D. JOH. BERNOULLI.

Pergratae fuerunt literae Tuae Petropoli ad me datae die 5. Novembris st. v., quae me certiorem reddiderunt mei memoriam in Te nondum esse obliteratam neque temporis, neque loci longinquitate; si quid, ut agnoscis, in sublimiore mathesi a me profecisti, gaudeo, eoque magis, quod pro ea qua es ingenii felicitate, mirum in modum illud amplificas, quo spero futurum ut semina a me sparsa brevi tempore in immenses abeant segetes, quid enim a fundi Tui fertilitate expectare non licet?

Dedi 20. praeteriti mensis Decembris literas ad filium meum DANIELEM, quas eum accepisse spero. Significabam in illis electionem Celeb. HERMANNI ad professionem Ethices, atque monebam ut huic viro meo nomine ea de re gratularetur, quod factum fuisse non dubito; nunc idem ut repetas apud illum enixe Te rogo, cum plurima salute meis verbis illi denuncianda, non minus quam Filio meo.

Gratias ago pro perscripta crisi iniqua et fastuosa quam HARSCHERUS de me meisque editis scriptis tam inhumaniter ad Te dixit. Dabitur occasio, eam illi pro merito exprobrandi, atque invidi hominis judicio opponendi judicium mihi perquam honorificum tot aliorum virorum in mathematicis et anatomicis celeberrimorum.

Quae de motu aquarum effluentium ut et de velocitate soni memoras,

1) Einige kleine Fehler bei FUSS sind in dem folgenden Abdrucke verbessert worden

digna utique sunt ut excolas. Nullus dubito quin si recte tractentur, omnia quae experientia monstrat ex Theoria mea virium vivarum deduci possint.

Scripsit nuper Daniel meus facta fuisse experimenta, circa globos tormentarios in altum verticaliter explosos, eaque occasione communicavit quaedam a se commenta de modo supputandi tempora ascensus et descensus, habita ratione resistentiae aëris. Dicit inter alia se demonstrare posse globum verticaliter explosum, licet vi infinita, hoc est, cujus velocitas initialis infinita sit, impendere tamen tempus tantum finitum in totum ascensum absolvendum in aëre resistente. Ego vero ex eo tempore meditatus detexi methodum determinandi quaecunque circa hanc materiam desiderabat Filius. Notabo hic summatim tantum pro casu proposito principaliora, communicaturus methodum ipsam forsan prima vice qua ad Danielem scribam. Esto globus ferreus, qualis Petropoli adhibitus fuit, habens diametrum 3 poll. seu $\frac{1}{4}$ ped. Paris. (assumo hic mensuram Paris. quia haec mihi nota est, non item anglica). Suppono aërem per omnes dimensiones uniformiter densum, cujus densitas se habeat ad densitatem ferri ut 1 ad 7000, quemadmodum Filius assumit (quamvis verius se habeat ut 1 ad 6000), suppono etiam aërem esse perfecte elasticum, cujus nempe minimae particulae, ceu globuli consideratae, potentissimo elaterio sint praeditae; aliter enim se res haberet, quam hic descripturus sum, si aër esset instar fluidi non elastici ut aquae, cujus nempe particulae post impulsum in corpora non resilirent sed tantum a sequentibus ad latera removerentur et postea praeterlaberentur. Suppono item quod calculus et experientia ab Hugenio instituta docet, corpus grave a quiete cadens in vacuo descendere primo minuto secundo per $15\frac{1}{12}$ ped. Paris. Ponamus jam exempl. gr. globum tanta vi sursum explodi ut in vacuo ascendere posset per 1000 ped. His ita praemissis dico sequentia: 1. Ad ascensum 1000 ped. in vacuo requiritur tempus $8\frac{1}{6}$ sec., est enim

$$\sqrt{15\tfrac{1}{12}} : \sqrt{1000} :: 1 : 8\tfrac{1}{6}$$

quam proxime. 2. Idem globus eadem vi explosus in aëre resistente ascendet ad altitudinem $582\frac{3}{8}$ ped. 3. Pro hoc ascensu in aëre requiruntur $5\frac{3}{4}$ sec. quam proxime. 4. Pro subsequente descensu insumuntur $6\frac{17}{25}$ sec. ita ut uno fere secundo citius ascendat quam descendat. 5. Hinc a momento explosionis ad momentum recidentiae globi elabentur $12\frac{83}{100}$ sec. in aëre, sed in vacuo $16\frac{1}{3}$ sec.; differentia est $3\frac{149}{300}$, seu proxime $3\frac{1}{2}$ sec. quibus in vacuo serius recidit quam in aëre. 6. Si globus noster careret pondere et suam tantum quantitatem materiae retineret, ille pergeret moveri in infinitum, sed ita retardaretur, ut post percursos pedes 4667 $ln$: 17371780 ipsi residua foret velocitas quae se haberet ad velocitatem initialem ut 1 ad $n$ (per $ln$ intelligo logarithmum numeri $n$ ex tabulis logarithm.

sumendum). Hoc nihil aliud est quam casus particularis formulae illius generalis quam dedi in dissertatione mea de motu[1]) Cap. XII § 13 7. Tempus vero, quo globus noster non gravis percurreret hanc altitudinem, foret $= 228683 \times \overline{n-1} : 48000$ sec. 8. Velocitas maxima, ad quam globus descendens in aëre continuo vergit, et quidem data quavis quantitate propius, si in infinitum descenderet, se habet ad velocitatem initialem quacum exploditur ut 61 ad 80. Adeoque descendendo in aeternum primam suam velocitatem nunquam recuperabit globus. 9. Hinc velocitas illa, quae tempore infinito acquireretur in aëre, aequalis est illi, quam globus acquireret si in vacuo caderet ex altitudine $583\frac{3}{8}$ ped. h. e. uno tantum pede majore quam est ascensus in aëre, quem quippe invenimus esse $582\frac{3}{8}$ ped. 10. Velocitas initialis est ad velocitatem finalem, quam nempe acquirit globus recidens ad eundem locum unde fuerat explosus, ut 135 ad 82. Hinc velocitas finalis ad velocitatem maximam *ad quam non* ut 1312 ad 1645, h. e. proxime ut 4 ad 5.

Communica haec quaeso cum Daniele meo, ut conferat cum suis, dicasque ei Illustr. Comitem à Pergen desiderare, ut describi curet dissertationem illam gallicam de centro oscillationis et percussionis, quam olim Ill. Christophorus Fatio[2]) sub ductu et auspiciis meis conscripserat et cujus apographum mihi traditum mei filii Petropolim abeuntes secum deportarunt. Quando descripta erit, poterit Daniel alterutrum exemplar commoda sed promta et tuta occasione ad me transmittere, alterum sibi retinere.

Quaeris de $y = (-1)^x$, quid illa sit? Ego sic statuo: sit

$$y = (-n)^x,$$

erit

$$ly = xl(-n),$$

adeoque

$$\frac{dy}{y} = dxl(-n).$$

Est vero

$$l(-n) = l(+n),$$

---

1) Es handelt sich hier um die Preisschrift des Johann Bernoulli, *Discours sur les loix de la communication du mouvement*, gedruckt in Paris 1727 im 1. Bande des Recueil des pièces qui ont remporté le prix de l'académie des sciences, und abgedruckt im 3. Bande (S. 7—107) seiner *Opera omnia.*

2) Aus einem Briefe von Johann Bernoulli an Leibniz vom Januar 1695 geht hervor, daß Christopher Fatio de Duillier (ein älterer Bruder von Nikolaus) nach den Lektionen des Bernoulli einen ziemlich starken Band mathematischen Inhalts geschrieben hatte; möglicherweise handelt es sich hier um eine Abteilung dieses Bandes.

nam in genere

$$dl(-z) = \frac{-dz}{-z} = \frac{+dz}{+z} = dl(z), \text{ hinc } l(-z) = l(z);$$

adeoque

$$\frac{dy}{y} = dxl(+n),$$

et integrando

$$ly = xln,$$

unde

$$y = n^x = (\text{in casu quo } n = \pm 1)\ 1^x = 1. \quad \text{Ergo } y = 1.$$

Caeterum novi anni auspicia, decursum ac finem cum multis aliis sequentibus ex animi sententia Tibi procedere voveo. Vale et fave. Dabam Basileae a. d. 9 Jan. 1728.

P. S. Filius meus credit globum in aëre sursum explosum vi licet infinita vel cujus velocitas initialis infinite sit magna, tamen nonnisi tempus finitum insumere in ascensum totalem, sed fallitur; invenio enim in hoc casu tempus ascensus esse etiam infinitum, quamvis (quod forsan illum fefellit) sit infinities minus, quam tempus ascensus in vacuo, si eadem illa velocitate initiali infinita exploderetur. Misi nuper per cursorem publicum specimen meum gallicum de Motu[1]) ad Clar. Schumacherum, Bibliothecarium vestrum, ab Illustri Academia vestra examinandum. Adventaverit fortassis ante has literas. Spero te alere pacem et concordiam cum Filio meo, ita enim ambo excitabitis admirationem vestri apud minus exercitatos in profundiori mathesi: praeterquam quod hoc suadeat obligatio erga Filium, qui unicus Petropolim te protraxit.

## 3.

## **Euler** an Bernoulli 10. Dezember 1728.

Antwort auf Bernoullis Brief vom 9. Januar 1728. Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. Auszüge veröffentlicht von Eneström in der Biblioth. Mathem. 1899, S. 46.

*Inhalt.* Geldangelegenheiten. — Die Logarithmen negativer Größen und die Gleichung $y = (-1)^x$. — Einige Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die integriert werden können.

Vir Excellentissime Celeberime.

Misi ego ante septimanam tessaram nummariam primam, nunc mitto alteram centum Rubelonum, ad 54. Stüberos, cujus summae dimidium Cl. Filius Tuus transmittit, idque quam primum Pater meus argentum accipiet, Tibi persolvet.

1) Das hier erwähnte „specimen gallicum de motu" ist wohl die S. 351 zitierte Preisschrift. Aus welchem Grunde diese Schrift von der Petersburger Akademie geprüft werden sollte, ist mir unbekannt.

Quae mihi nuper de potentiis quantitatum negativarum perscripsisti, solvunt quidem dubium propositum, et ipse interim in aliquot argumenta incidi, quibus mihi probare posse video, esse $lx = l - x$. Alia autem quoque sese obtulerunt, contrarium asserentia, et quibus assentiar prorsus nescio. Pro affirmativa praeter argumenta tua mihi perscripta, est hoc forte quoque argumentum. Sit $lxx = z$, erit

$$\tfrac{1}{2} z = l \sqrt{xx},$$

sed $\sqrt{xx}$ est tam $-x$ quam $+x$, quare $\frac{1}{2} z$ est $lx$ et $l - x$. Posset quidem objici, $xx$ habere duos logarithmos, sed hoc qui asser[ere vult][1] infinitos adjudicare deberet.[2] Haec autem ratio, quod differentialia $lx$ et [$l - x$ sunt] aequalia, minus mihi probare videtur aequalitatem $lx$ et $l - x$, cum ab aequalitate differentialium ad aequalitatem integralium concludere non liceat, ut $a + x$ non aequatur $x$, eo quod differentialia aequantur. Similis autem est casus noster, est enim $l - x = lx + l - 1$, unde ad aequalitatem $lx$ et $l - x$ prius concludere non licet, quam demonstratum sit, $l - 1$ esse 0. Contraria argumenta sunt haec absurdum deducentia. Si enim esset $lx = l - x$ foret $x = -x$ et $\sqrt{-1} = 1$. Posset autem hic objici, sed nescio an felici succesu, ab aequalitate logarithmorum ad aequalitatem numerorum conclusionem fieri non posse. Et tum adhuc dubium meum concernens curvam $y = (-1)^x$ valent. Concesso autem non esse $x = -x$, etiam si sit $lx = l - x$, vereor tamen ne hoc principium in calculo applicatum in errorem deducat. Uti sit radius circuli $a$, sinus $y$, cosinus $x$, exit ex methodo Tuâ quadraturam circuli ad logarithmos reducendi,[3] area sectoris

$$= \frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l \frac{x + y\sqrt{-1}}{x - y\sqrt{-1}},$$

et posito $x = 0$ habebitur quadrans circuli

$$= \frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l - 1.$$

Si ergo fuerit $l - 1 = 0$, oportet ut sit quoque $\sqrt{-1} = 0$, et tandem $1 = 0$. Quomodo me ex his contradictionibus explicam, plane ignoro, ideoque, Vir Celeberime, abs te intelligere desidero quid de iisdem sentias.

Memini cum adhuc Basileae degerem, aliquando me in hanc aequationem

1) Die in eckigen Klammern stehenden Worte sind von mir ergänzt; der Brief ist nämlich an einem Rande ein wenig beschädigt.

2) Hier hat Euler also das wahre Verhältnis gestreift, verfolgt aber nicht weiter den Gedanken.

3) Vgl. Johann Bernoulli, *Solution d'un problème concernant le calcul intégral;* Mém. de l'acad. d. sc. de Paris 1702 (gedruckt 1704), S. 289—297 [speziell S. 297].

$$yy\,ddy = x\,dx^2,$$

existente $ddx = 0$ incidisse, quam ad differentialem primi gradus reducere institueram sed irritu conatu. Hic autem nuper in methodum incidi tria genera aequationum differentio-differentialium ad differentiales reducendi.[1]) Primum genus comprehendit sub se omnes aequationes duobus terminis constantes, cujusmodi est aequatio proposita. Alterum genus est omnium earum aequationum, in quibus alterutra indeterminata in singulis terminis eundem dimensionum numerum obtinet; unius autem dimensionis tam $x$ quam $dx$ et $ddx$ pono, cujusmodi haec est aequatio[2])

$$ddx = x^n\,Y\,dx^{m-n}\,dy^{2-m} + x^p\,\mathfrak{Y}\,dx^{q-p}\,dy^{2-q}$$

ubi $Y$ et $\mathfrak{Y}$ denotant functiones quasvis ipsius $y$. Ad tertium genus refero omnes eas aequationes, quarum singuli termini eundem dimensionum numerum continent. Methodum ipsam alio tempore perscribo, hic enim propter spatii angustiam finire cogor.

Vale Vir Excellentissime Celeberrime et favere perge

Die 10. Decembris A. 1728. Petropoli. Obstrictissimo servo Tuo L. Eulero.

Aufschrift:

*A Monsieur*
*Monsieur Jean Bernoulli*
*Très Célèbre Professeur des Mathematiques*
*à*
*Bâle.*

## 4.

## Euler an Bernoulli 18. Februar 1729.

Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. — Auszüge veröffentlicht von Eneström in der Biblioth. Mathem. 1899, S. 20.

*Inhalt.* Lösung der Aufgabe: Die kürzeste Linie auf einer Oberfläche zu finden. — Einige Spezialfälle dieser Aufgabe, und besonders der Fall, wo die Oberfläche erzeugt wird von einer Geraden, die immer einen Punkt mit einer gegebenen ebenen Kurve gemeinsam hat, und durch einen außerhalb der Ebene der Kurve befindlichen festen Punkt geht. — Eine Eigenschaft homogener Gleichungen nullten Grades.

Vir Excellentissime Celeberime.

Quanquam non diu est, quod literas ad te dedi, atque ea propter nefas videri posset tam brevi intervallo bis literis te obruere: Tamen cum

1) Vgl. hierüber die Abhandlung von Euler, *Nova methodus innumerabiles aequationes differentiales secundi gradus reducendi ad aequationes differentiales primi gradus;* Comment. acad. sc. Petrop. 3, 1728 (gedruckt 1732), S. 124—137.

2) In seinem Briefe vom 16. Mai 1729 bemerkt Euler, daß die folgende Gleichung unrichtig abgeschrieben ist.

problema a Cl. filio tuo mihi tuo nomine propositum[1]) feliciter solvisse mihi visus sim, non potui hoc tempore intermittere, quia solutionem meam tibi perscriberem, quapropter a te veniam mihi datum iri confido. Problema illud postulabat, ut in superficie quacumque a puncto dato ad datum ducatur linea brevissima. Tametsi vero mihi non ignotum erat, idem problema jam olim a te fratreque tuo in Act. Lips. fuisse agitatum, non dubitavi tamen, quin hoc tempore faciliorem et elegantiorem solutionem consecutus sis, eo quod de novo nunc iterum proposueris. Atque propter id ipsum primo intuitu difficilius mihi visum erat hoc problema, quam cujus solutionem viribus meis adipisci possem. Interim tamen omnem operam meam in eo collocavi, et brevi tempore elapso sequentem solutionem nactus sum. Data superficie quacumque, accipio planum quoddam tanquam primarium et in eo rectam loco axis. In hoc axe sumo abscissas $t$, hisce normales in plano assumto voco $x$, et inde perpendiculares donec superficiei occurrant, appello $y$. Aequatione inter has tres coordinatas naturam superficiei expressam esse suppono, et nil aliud ago, nisi ut hanc aequationem certo modo restringam, quo lineam brevissimam tantum praebeat. Id quod fiet alterutram indeterminatam eliminando, et aequatio inter duas residuas projectionem lineae brevissimae in plano exhibebit. Ad hoc praestandum aequationem propositam ad differentialem reduco, quam hanc formam habere pono:

$$Pdx = Qdy + Rdt,$$

in qua $P$, $Q$ et $R$ functiones quascumque ipsarum $x$, $y$ et $t$ significare possunt. Ut haec restringatur ex conditione problematis sequentem aequationem naturam lineae brevissimae involventem erui[2])

1) Es ist nicht unwahrscheinlich, daß Johann Bernoulli das Problem in seinem Briefe an Daniel Bernoulli vom 20. Dezember 1727 (siehe oben S. 349) gestellt hatte; jedenfalls dürfte Euler erst nach dem 10. Dezember 1728 davon Kenntnis erhalten haben (vgl. Eneström, Biblioth. Mathem. 1899, S. 21).

2) Hier hat Johann Bernoulli notiert: „Ego inveni (servatis litteris Eulerianis, sed posito $\sqrt{dt^2 + dx^2}$ constante, hanc aequationem:

$$\frac{Pdx - Rdt}{Pdt + Rdx} \times \frac{ddt}{dx} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2} = \frac{Pddt + Rddx}{Pdt + Rdx}.$$

Am Rande der dritten Seite von Eulers Brief hat Johann Bernoulli noch notiert: „Ego inveni (servatis iisdem literis, sed nulla posita constante) hanc aequationem:

$$\frac{Qddx + Pddy}{Qdx + Pdy} = \frac{Qddt - Rddy}{Qdt - Rdy},$$

quae congruit cum Euleriana, non vero cum altera. Hoc inde venit, quia in substitutione valoris suarum literarum ex inadvertentia erratum est; debet itaque deleri $dxddx$. Posita $\sqrt{dt^2 + dx^2}$ constante invenio

$$\frac{dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2} = \frac{Pddt + Rddx}{Pdt + Rdx}.$$

$$\frac{Q\,ddx + P\,ddy}{Q\,dx + P\,dy} = \frac{dx\,ddx + dy\,ddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2},$$

in qua $dt$ ponitur constans. Haec aequatio cum superiori conjuncta lineam brevissimam determinabit.

Hoc igitur ad solutionem problematis sufficere posset, quum autem in casibus particularibus admodum facilis evadat aequatio, nonnullos eosque primarios hic derivabo. Sit superficies proposita cylindrica, cujus axis $t$; abibit in hoc casu aequatio generalis in hanc

$$P\,dx = Q\,dy.$$

Ex hac substituantur valores loco $P$ et $Q$ in inventa; habebitur

$$\frac{dx\,ddx + dy\,ddy}{dx^2 + dy^2} = \frac{dx\,ddx + dy\,ddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$$

seu

$$dx\,ddx + dy\,ddy = 0,$$

quae integrata dat hanc

$$dx^2 + dy^2 = nn\,dt^2,$$

et

$$nt = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Sit superficies proposita rotunda, cujus sectiones transversae per planum primarium sint circuli, transmutabitur aequatio generalis in hanc

$$x\,dx = -\,y\,dy + R\,dt,$$

ut ergo sit $P = x$ et $Q = -\,y$, quare altera abibit in hanc

$$\frac{x\,ddy - y\,ddx}{x\,dy - y\,dx} = \frac{dx\,ddx + dy\,ddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2},$$

quae etiam integrari potest, resultante

$$l\,(x\,dy - y\,dx) = l\sqrt{dt^2 + dx^2 + dy^2},$$

seu

$$x\,dy - y\,dx = a\sqrt{dt^2 + dx^2 + dy^2};$$

ponatur

$$yy + xx = zz \text{ et } \sqrt{dt^2 + dx^2 + dy^2} = du,$$

erit

$$du = \frac{z\sqrt{dt^2 + dz^2}}{\sqrt{zz - aa}};$$

pro sphaera est

$$zz + tt = bb,$$

ergo

$$du = \frac{b\,dt}{\sqrt{bb - aa - tt}},$$

ex qua aequatione monstrare possum lineam brevissimam in globo semper esse circulum maximum. Si in aequatione pro solidis rotundis ponatur $a = 0$, erit

$$x\,dy - y\,dx = 0, \text{ seu } y = nx,$$

quae etiam meras lineas brevissimas exhibet.

Corpora conoidica mihi denotant solida lineis ex curvae cujusvis singulis punctis ad punctum extra planum curvae fixum ductis, terminata, unde habentur coni consueti, si curva assumta fuerit sectio conica. Hujusmodi solida hanc habent proprietatem, ut sumto initio abscissarum $t$ in vertice coni, aequatio sit inter $t$, $x$ et $y$ homogenea seu ejusdem ubique dimensionum numeri. Haec aequatio eo reducatur, ut $t$ exprimatur in meris $x$ et $y$; functio igitur ista $x$ et $y$, ipsi $t$ aequalis, unius tantum est dimensionis, quae si dividatur per $x$, evadit nullius dimensionis. Sit ea $F$, erit

$$\frac{t}{x} = F,$$

differentietur haec aequatio posito

$$dF = Mdx + Ndy,$$

erit

$$\frac{xdt - tdx}{xx} = Mdx + Ndy.$$

Sed propter id, quod $F$ sit functio nullius dimensionis, inveni quod sit

$$Mx + Ny = 0.$$

Aequatio autem illa cum superiori generali

$$Pdx = Qdy + Rdt$$

comparata dat

$$P = Mxx + t \text{ et } Q = -Nxx.$$

Quia autem ex duabus aequationibus

$$Mdx + Ndy = \text{etc.} \quad \text{et } Mx + Ny = 0$$

valores ipsorum $M$ et $N$ erui possunt; erit facta substitutione

$$P = \frac{xydt - xtdy}{ydx - xdy} \text{ et } Q = \frac{xxdt - txdx}{ydx - xdy}.$$

His valoribus subrogatis in altera aequatione generali obtinebitur

$$\frac{ydtddy - tdyddy + xdtddx - tdxddx}{ydtdy - tdy^2 + xdtdx - tdx^2} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2};$$

cujus integratio me diu torsit, tandem vero sic obtinui. Sit

$$dt^2 + dx^2 + dy^2 = ds^2$$

et

$$tt + xx + yy = zz,$$

eritque

$$\frac{zdtddz + dz^2dt - ds^2dt - tdsdds}{zdzdt - tds^2} = \frac{dds}{ds},$$

et porro habebitur

$$ds = \frac{zdsddz + dz^2ds - zdzdds}{ds^2},$$

quae integrata dat

$$s = \frac{zdz}{ds} \text{ seu } ss = zz + C, \text{ unde}$$

$$s = \sqrt{tt + xx + yy + C},$$

atque ex hac proprietate in quovis casu applicatio facile absolvitur.[1])

Aequationes generales pro cylindris et conis ad ducendam lineam brevissimam etiam alio modo obtinui, ex eo quod superficies eorum in planos transmutari possunt, unde quidem facilius obtinentur. Ei tamen exposita methodus praeferri debet ob generalitatem.

Plura non scribo, nisi quod Cl. filius Tuus omnesque quos hic nosti valeant. Vale igitur favere perge

Vir Celeberime et Excellentissime

Obstrictissimo servo tuo

Petropoli ad d. 18 L. Eulero.
Februarii A. 1729.

Aufschrift:

*A Monsieur*
*Monsieur* Jean Bernoulli
*Très celebre Professeur des Mathematiques*
*à*
*Bâle.*

## 5.

## Bernoulli an Euler 18. April 1729.

Antwort auf Eulers zwei Briefe vom 10. Dezember 1728 und 18. Februar 1729. Original verloren; Konzept in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. Veröffentlicht von Eneström im Bihang till svenska vetenskapsakademiens handlingar 5, Nr. 21 (1880), S. 5—10.

*Inhalt.* Die Logarithmen negativer Größen. — Integration zweier Differentialgleichungen zweiter Ordnung. — Die Gleichung der kürzesten Linie auf einer Oberfläche.

Clarissimo ac Doctissimo Viro Leonhardo Eulero S. P. D.
Joh. Bernoulli.

Debeo responsum ad binas litteras quas a te accepi; ad priores, quibus significabas me acceptum 50 Rubelos a filio meo transmissos, quos Rev. tuus pater octiduo post rite persolvit, partim jam respondi in litteris meis ad filium datis, ubi ei ostendi dubia vestra (nam et ipse similes formavit difficultates circa logarithmos imaginarios) inde tantum oriri, quod conceptus quem habuistis de logarithmis quantitatum negativarum cum rei natura non satis bene congruebat, dixique si statuatur (& recte quidem)

$$lx = l - x,$$

---

1) Über den vorangehenden Inhalt des Briefes vgl. die Abhandlung von Euler, *De linea brevissima in superficie quacumque duo quolibet puncta jungente;* Comment. acad. sc. Petrop. 3, S. 110—120, sowie Eneström, Biblioth. Mathem. 1899, S. 19—24.

intelligendum esse

$$l-(x)^{1)},$$

non vero

$$l(-x),$$

vos autem utrumque confudisse, etiamsi magna sit inter utrumque differentia, sic. e. gr.

$$l-(x)^{\frac{1}{2}}$$

est reale quid, sed

$$l(-x^{\frac{1}{2}})$$

imaginarium. Hoc bene observato, cessant omnes vestrae difficultates & monstrosae inde deductae consequentiae. Quod attinet ad scrupulum quem porro moves desumtum ex area sectoris circularis per logarithmum expressa, ubi posito sinu $= y$ & cosinu $= x$ invenitur per methodum meam quadraturam circuli ad logarithmum reducendi, area sectoris

$$= \frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l\, \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}},$$

de eo pariter jam monui filium meum in casu quo

$$x=0,$$

hanc aream revera exhiberi tanquam $= 0$, quamvis deberet esse $=$ quadranti; hinc autem nihil aliud concludi debere, quam quod expressio ista

$$\frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l\, \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}$$

augeri debeat quantitate constante $nQ$, seu multiplo quadrantis, quod vel ideo patet, quia sinus & cosinus inter se convertuntur, atque non uno tantum modo sed infinitis modis fieri potest ut sit

$$x=0 \ \ \& \ \ y=1,$$

vel vice versa

$$x=1 \ \ \& \ \ y=0;$$

nam hoc fit assumto sectore $=$ vel $1\,Q$, vel $2\,Q$, vel $3\,Q$, etc. vel etiam quando vis $= 0\,Q$, adeoque nulla ratio est cur

$$\frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l\, \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}$$

---

1) Was JOHANN BERNOULLI mit $l-(x)$ meint, hat er weder hier noch, so viel ich weiß, an irgend einer anderen Stelle auseinandergesetzt, aber aus dem folgenden Inhalt des Briefes geht hervor, daß er, vorausgesetzt daß seine Auseinandersetzungen überhaupt irgend einen Sinn haben, unter $l-(x)$ den reellen Teil von $\log(-x)$ verstehen muß. Auch die Bemerkung von JOHANN BERNOULLI: „hujusmodi expressiones imaginariae usum potius habent, si in series expendantur, in quibus quippe termini imaginarij se destruunt" deutet darauf hin, denn was nach der Entwickelung zurückbleibt, ist natürlich gerade der reelle Teil.

unum potius exprimat quam alterum; malo itaque dicere quod area sectoris statuenda sit generaliter

$$= \frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l\, \frac{x + y\sqrt{-1}}{x - y\sqrt{-1}} + nQ,$$

adeo ut quotiescunque pars prior in nihilum abit, id, quod deest, suppleri possit per $nQ$, hoc est, per multiplum, submultiplumve quadrantis, prout necessitas id exigit; semper enim invenies differentiando sectoris tui differentiale[1]) quod est

1) Die vorangehenden Bemerkungen von Johann Bernoulli scheinen nicht genau durchgedacht zu sein. Was er mit dem Passus „quia sinus et cosinus inter se convertuntur" meint, ist nicht klar, denn der Wert von $\log \frac{x + y\sqrt{-1}}{x - y\sqrt{-1}}$ wird natürlich nicht unverändert, wenn man $x$ statt $y$ und $y$ statt $x$ setzt, und für $x = 0$, $y = 1$, kann die Fläche des entsprechenden Sektors nicht $0\,Q$ oder $2\,Q$ sein. Ferner hat Bernoulli hier die bestimmte Integration (denn es handelt sich ja um eine solche) mit der unbestimmten verwechselt. Sein Ausdruck

$$\frac{a^2}{4\sqrt{-1}}\, l\, \frac{x + y\sqrt{-1}}{x - y\sqrt{-1}} + nQ$$

muß darum modifiziert werden, und zwar kann man den richtigen Ausdruck auf folgende Weise herleiten. Setzt man in dem Ausdrucke

$$\log \frac{x + y\sqrt{-1}}{x - y\sqrt{-1}}$$

$x = \cos\vartheta$, $y = \sin\vartheta$, so wird daraus

$$\log \frac{\cos\vartheta + i\sin\vartheta}{\cos\vartheta - i\sin\vartheta} = \log \frac{e^{i\vartheta}}{e^{-\vartheta i}} = \log e^{2\vartheta i} = (2\vartheta + 2k\pi)i;$$

der reelle Teil des Ausdruckes ist also $= 0$, d. h.

$$l\, \frac{x + y\sqrt{-1}}{x - y\sqrt{-1}} = 0.$$

Aber der vollständige Wert von

$$\frac{a^2}{4\sqrt{-1}} \log \frac{x + y\sqrt{-1}}{x - y\sqrt{-1}}$$

ist

$$\frac{a^2}{4\sqrt{-1}}(2\vartheta + 2k\pi)\, i = \frac{a^2}{2}(\vartheta + k\pi)$$

und für $x = 0$, $y = 1$, wird $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, so daß, wenn man mit Johann Bernoulli $Q = \frac{a^2\pi}{4}$ setzt, in diesem Falle

$$\frac{a^2}{4\sqrt{-1}} \log \frac{x + y\sqrt{-1}}{x - y\sqrt{-1}} = \frac{a^2}{4\sqrt{-1}}\, l\, \frac{x + y\sqrt{-1}}{x - y\sqrt{-1}} + (2k + 1)\,Q.$$

Der von Johann Bernoulli angegebene Ausdruck ist also richtig, wenn $n$ eine ungerade ganze Zahl bedeutet.

$$\frac{aadx}{2\sqrt{aa-xx}},$$

sicuti decet. In casu semiquadrantis, ubi

$$x = y = \sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

habebis etiam partem priorem $= 0$, aut si mavis

$$= \frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l\sqrt{-1},$$

quocirca adjiciendum $\frac{1}{2}Q$ [1]; sed hujusmodi expressiones imaginariae usum potius habent, si in series expendantur in quibus quippe termini imaginarij se destruunt. De his satis.

Probum erit intelligere methodum, quam tibi inventam dicis ejusque communicationem promittis, reducendi hujusmodi aequationes differentio-differentiales

$$yyddy = xdx^2,$$

existente

$$ddx = 0,$$

ad differentiales primi gradus, interim non satis capio mentem tuam de duobus aliis generibus differentio-differentialium pluribus quam duobus terminis constantibus; imprimis non video quomodo quadret exemplum

$$ddx = x^n\, Ydx^{m-n}\, dy^{2-m} + x^p\, \mathfrak{Y} dx^{q-p}\, dy^{2-q} \text{ etc.}$$

ad eas, quas innuis, aequationes, in quibus alterutra indeterminata in singulis terminis eundem dimensionum numerum obtinet; unius autem dimensionis tam $x$ quam $dx$ & $ddx$ dicis te ponere, cum tamen in exemplo, quod proponis, neque $x$, neque $dx$, neque $ddx$ unius sit dimensionis nec etiam eundem dimensionum numerum obtineat. Cave autem ne in his asystata vel incompatibilia comparare inter se suscipere velis, nam e. gr. comparare velle $ddx$ cum $Ydx$ vel cum $Ydx^3$ aeque absurdum est quam velle lineam invenire aequalem superficiei, sed $ddx$ comparabile est cum $Ydx^2$. Ut verbo dicam comparabilia sunt tantum illa differentialia in quibus littera $d$ ubique aequaliter reperitur, cujuscumque gradus sint differentialia, sic e. gr. $ddx$ cum $Ydx^2$ vel $Ydy^2$ vel $Ydxdy$ vel $Y\frac{dy^3}{dx}$; et $d^3x$ cum $Ydx^3$, vel $Ydx^2dy$, vel $Ydxddx$, vel $Y\frac{d^4x}{dy}$; atque ita in aliis. Hinc itaque primus terminus tui exempli generaliter loquendo est incomparabilis cum $ddx$, nam ut cum $ddx$ subsistere possit

$$x^n\, Ydx^{m-n} dy^{2-m},$$

1) Aus der Anmerkung auf Seite 360 ist ersichtlich, daß man hier

$$\frac{a^2}{4\sqrt{-1}}\, l\sqrt{-1} + \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = \left(2k + \tfrac{1}{2}\right) Q$$

zu setzen hat.

oportet supponere

$$m-n+(2-m)=2,$$

sed cum sit $=2-n$, vides nullam posse fieri comparationem inter $ddx$ & hunc terminum nisi in casu quo $n=0$; idem etiam de altero termino dicendum, quare haec attentiori curae tuae commendo, ne possibilia velis facere quae sua natura sunt impossibilia.

Venio nunc ad litteras tuas novissimas. Solutio tua problematis de ducenda linea brevissima in superficie data videtur bona. Quod ad meam[1]) attinet, ea consistit in hac aequatione

$$\frac{Tddy}{Tdzdy-zds^2}=\frac{ddz}{ds^2+dz^2},$$

ubi notandum per $x$, $y$, $z$ me intelligere tres coordinatas, quae tibi sunt $t$, $x$, $y$: item $T$ esse subtangentem curvae illius datae, quae fit in superficie data, quando secatur per planum subjecto plano perpendiculare & ipsis $y$ parallelum; porro per $ds$ (quod constans suppono) intelligo elementum curvae projectae seu

$$\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Possum etiam naturam curvae quaesitae exprimere hac aequatione

$$\frac{\Theta ddx-Tddy}{\Theta dx-Tdy}=\frac{dzddz}{ds^2+dz^2},$$

quae aliquando commodior est, ubi litterae $x$, $y$, $z$, $T$ idem mihi significant quod ante, & praeterea $\Theta$ est subtangens alterius curvae datae quae fit secando superficiem per planum priori coordinatum, h. e. ipsis $x$ parallelum. Es his aequationibus facile omnes casus particulares, quos solutos das, deducuntur. Non unum tantum solvendi fundamentum habeo; quantum conjicio, tuus solvendi modus nititur natura minimi, quo etiam agnatus[2]) meus feliciter usus est, & problema legitime solvit, sed hic solvendi modus non satis est generalis, ad alia quippe hujusmodi problemata sese non extendens, quale esset e. gr. hoc: Ducere in data superficie lineam curvam, cujus in puncto quolibet planum osculans datam habeat inclinationem ad planum tangens superficiem datam in eodem puncto. Voco autem planum osculans, quod transit per tria curvae quaesitae puncta infinite sibi invicem propinqua. Patet hoc problema includere prius, nam si angulus inclinationis est rectus, erit quilibet arcus curvae quaesitae minimus inter duo puncta sua extrema. Poteris ergo etiam vadum tentare pro hoc problemate ita generaliter concepto, ego illud pariter reduxi ad aequationem

1) Vgl. den Aufsatz von Johann Bernoulli in seinen *Opera omnia* T. IV, S. 108—128.

2) Wahrscheinlich der Neffe von Johann Bernoulli, Nikolaus I Bernoulli, der damals Professor der Logik an der Universität in Basel war.

differentio-differentialem. Caeterum in applicatione quam facis aequationis tuae ad superficiem cylindricam, qui tamen casus est omnium facillimus, posset dubium moveri, utrum liceat in aequatione ad quam pervenis

$$\frac{dxddx + dyddy}{dx^2 + dy^2} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2},$$

supponere

$$dxddx + dyddy = 0,$$

cum hoc nihil aliud sit quam communis divisor utriusque membri; ideoque mallem ego citra hanc suppositionem immediate integrare utrumque membrum per logarithmos, nempe sic: Assumto logarithmo constante numeri arbitrarii $c$ habebo

$$lc + l(dx^2 + dy^2) = l(dt^2 + dx^2 + dy^2),$$

ideoque

$$cdx^2 + cdy^2 = dt^2 + dx^2 + dy^2.$$

Hinc

$$\overline{c-1} \times \overline{dx^2 + dy^2} = dt^2,$$

vel

$$\frac{1}{\sqrt{c-1}}\,dt = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{c-1}}\,t = \int \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

prorsus ut tu invenisti. Quod enim tibi est $n$, id hic est $\frac{1}{\sqrt{c-1}}$. Si superficies proposita sit conoidea, cujus sectiones transversae per planum primarium sint circuli, habeo praeter methodum generalem aliam particularem pro hoc casu, quae immediate deducit ad aequationem differentialem primi gradus, ubi indeterminatae non sunt permixtae, & quae suppeditat constructionem, quam olim frater meus dedit,[1]) nescio ex quo fundamento erutam, quod quia non exhibuit, incertum est an sit legitimum, nam observavi posse perveniri etiam ad eandem illam constructionem per viam aliquam quae est paralogistica. Interim quod attinet ad tuam pro hoc casu aequationem

$$xdy - ydx = a\sqrt{dt^2 + dx^2 + dy^2},$$

non video, quomodo (positis $yy + xx = zz$ & $\sqrt{dt^2 + dx^2 + dy^2} = du$) inde sequatur

$$du = \frac{z\sqrt{dt^2 + dz^2}}{\sqrt{zz - aa}},$$

1) Siehe Jakob Bernoulli, *Solutio sex problematum fraternorum, in Ephem. Gall. 26. Aug. 1697 propositorum;* Acta Eruditorum 1697, S. 226—230: „Probl. I. In superficie dati conoidis vel sphaeroidis, ex. gr. parabolici, inter duo data puncta geometrice describere lineam omnium in illa superficie sic ductarum brevissimam.“

multo minus, quomodo haec aliquid conferat ad constructionem curvae quaesitae, si quidem $du$ est elementum ipsius curvae & $dt$, $dz$ elementa diversarum indeterminatarum. Mea vero, quam habeo aequatio, in qua indeterminatae sunt separatae, expedit more solito constructionem per quadraturas, cujus ope in casu particularissimo globi statim videre est, lineam brevissimam in superficie sphaerica esse circulum maximum. Porro si in aequatione pro solidis rotundis (quorum scilicet axis est perpendicularis ad basin, nam si est obliquus, res est altioris indaginis, quam non facile ad differentias primas reduces), ponatur $a = 0$, ita ut sit

$$xdy - ydx = 0,$$

seu $y = nx$, haud dubie dat meras (ut dicis) etiam lineas brevissimas, sed omnes nonnisi unam eandemque efficiunt, nempe eam ex cujus revolutione generatur solidum rotundum. Eas vocat frater meus in suo schediasmate *meridianos;* circulos vero, quos singula puncta in revolutione describunt — *parallelos;* corpora *conica*, quae tu non satis apte *conoidica* vocas, sunt utique omnia illa quae generantur ex circumductu lineae rectae circa curvam aliquam datam in aliquo plano & perpetuo transeuntis per punctum (quod vertex conici corporis vocatur) extra planum existens.

Quae hic habes de ducenda linea brevissima in superficiebus horum corporum conicorum sunt intricata & obscura; putat agnatus meus, cui epistolam tuam legendam tradidi, in iis aliquem paralogismum latitare. Quidquid vero sit, problema pro hujusmodi superficiebus non minus quam pro simplicibus conis & cylindroidibus facillimam admittit solutionem, ita ut non egeat tam operoso quod suscipis molimine; possunt enim eae omnes superficies transmutari in planas, ut tu ipse nunc etiam probe animadvertisti, postquam idem ego jam diu insinuavi, vid. Act. Lips. a. 1698 p. 469,[1]) ac revera hic casus nihil aliud est quam corollarium unius ex solutionibus meis generalibus, nam plures habeo.

Quod superest vale & omnes amicos meos verbis saluta.

Dab. Bas. a. d. 18 Apr. 1729.

P. S. Tenta num possis problema de ducenda linea brevissima reducere ad aequationem differentialem primi gradus in superficie aliqua quae non sit vel cylindroidica vel conoidica sed alia aliqua.[2])

---

1) Es handelt sich hier um einige Zeilen im Aufsatze von Johann Bernoulli, *Annotata in solutiones fraternas problematum quorundam suorum, editas proximo Actorum Maio;* Acta Eruditorum 1698, S. 466—474.

2) Diesem Wunsche von Johann Bernoulli hat Euler am Ende seiner schon zitierten Abhandlung in dem Comment. acad. sc. Petrop. 3 („ad annum 1728") Genüge geleistet. Die Abhandlung war also im April 1729 noch nicht fertig (vgl. Eneström, Biblioth. Mathem. 1899, S. 23).