COMPARATIO VALORVM FORMVLAE INTEGRALIS

$$\int \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}},$$

A TERMINO $x=0$ VSQVE AD $x=1$ EXTENSAE.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 10 *Octobr.* 1776.

§. 1.

In hac formula litterae n, p et q perpetuo designant numeros integros positiuos, et pro quolibet numero n binis litteris p et q omnes valores tribui concipiuntur, ita vt hinc pro quouis numero n innumerae nascantur huiusmodi formulae integrales, quarum valores plurimas egregias relationes inter se seruant; vnde si eorum aliquot fuerint cogniti, reliquae omnes ex iis definiri queant. Iam dudum equidem plures huiusmodi relationes demonstraui; cum autem hoc argumentum tum temporis neutiquam exhausissem, nunc accuratius in istas relationes inquirere constitui, et eiusmodi methodum adhibebo, quae omnes plane huius generis relationes sit exhibitura; his

his enim inuentis innumerabilia Theoremata condi poterunt, quibus vniuersa Analysis non mediocriter locupletari erit censenda.

§. 2. Quoniam igitur hoc modo pro quolibet numero n ambae litterae p et q infinitos valores recipere possunt, ante omnia hic obseruari conuenit, omnes hos innumerabiles casus semper ad numerum finitum reuocari posse. Quantumuis enim magni numeri pro litteris p et q accipiantur, eos casus semper ad alios reducere licet, in quibus numeri p et q quantitate n futuri sint diminuti. Hoc igitur modo omnes huiusmodi casus tandem eo redigi poterunt, vt ambo numeri p et q infra exponentem n deprimantur; vnde pro quolibet numero n eos tantum casus considerasse sufficiet, quibus litterae p et q minores valores recipiant quam n, vel saltem hunc limitem non superent. Hoc igitur modo pro quouis numero n multitudo casuum, qui in computum veniunt, et quos inter se comparari oportet, prorsus erit determinata.

§. 3. Quemadmodum autem ista reductio litterarum p et q ad numeros continuo minores institui debeat, quamquam id satis in vulgus est notum, tamen ad formulam praesentem accommodasse iuuabit. Statuatur scilicet haec formula algebraica: $x^p (1 - x^n)^{\frac{q}{n}} = V$, eritque

$$l V = p l x + \frac{q}{n} l (1 - x^n),$$

hinc differentiando

$$\frac{\partial V}{V} = \frac{p \partial x}{x} - \frac{q x^{n-1} \partial x}{1 - x^n} = \frac{p \partial x - (p + q) x^n \partial x}{x (1 - x^n)},$$

vbi si per V multiplicemus ac per partes integremus, orietur ista aequatio:

V =

$$V = p \int x^{p-1} \partial x (1 - x^n)^{\frac{q-n}{n}}$$

$$- (p+q) \int x^{p+n-1} \partial x (1 - x^n)^{\frac{q-n}{n}},$$

Quoniam igitur quantitas V pro vtroque integrationis termino euanescit, hinc adipiscimur istam reductionem:

$$\int x^{p+n-1} \partial x (1 - x^n)^{\frac{q-n}{n}} = \frac{p}{p+q} \int x^{p-1} \partial x (1 - x^n)^{\frac{q-n}{n}},$$

cuius ergo reductionis ope exponens ipsius x continuo quantitate n diminui poterit, donec tandem infra n deprimatur.

§. 4. Deinde formula pro $\frac{\partial V}{V} = \frac{p \partial x - (p+q) x^n \partial x}{x (1 - x^n)}$ inuenta hoc modo referri poterit:

$$\frac{\partial V}{V} = \frac{(p+q) \partial x (1 - x^n) - q \partial x}{x (1 - x^n)},$$

quae forma per V multiplicata ac denuo per partes integrata dabit

$$V = (p+q) \int x^{p-1} \partial x (1 - x^n)^{\frac{q}{n}} - q \int x^{p-1} \partial x (1 - x^n)^{\frac{q-n}{n}},$$

vnde quia posito $x = 1$ fit $V = 0$, oritur haec reductio:

$$\int x^{p-1} \partial x (1 - x^n)^{\frac{q}{n}} = \frac{q}{p+q} \int x^{p-1} \partial x (1 - x^n)^{\frac{q-n}{n}},$$

cuius reductionis ope exponens Binomii $1 - x^n$ vnitate minuitur, siue quod eodem redit, numerus q numero n imminuitur. Tali igitur reductione, quoties opus fuerit, repetita, exponens q tandem infra n deprimi poterit.

§. 5. Quoniam igitur pro quouis numero n ambos exponentes p et q tanquam minores quam n spectare licet, for-

Sicque demonstratum est ambas litteras p et q semper inter se esse permutabiles.

§. 7. His praemissis, quo calculos sequentes magis in compendium redigere liceat, loco formulae huius integralis:

$$\int \frac{x^{p-1}\,\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \int \frac{x^{q-1}\,\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}},$$

scribamus hunc characterem: (p, q), vbi perinde est, siue p ante q, siue q ante p collocetur; semper autem hic certus exponens n subintelligi debet. Hic autem duo casus prae reliquis maxime memorabiles occurrunt. Prior casus est, quo numerorum p et q alteruter ipsi exponenti n est aequalis; si enim fuerit $q = n$, erit ex priore formula $(p, n) = \int x^{p-1}\,\partial x = \frac{1}{p}$, sicque perpetuo habebimus $(p, n) = \frac{1}{p}$, hincque etiam $(n, q) = \frac{1}{q}$. Alter casus notatu dignissimus locum habet, quando $p + q = n$, quo casu semper est

$$(p, q) = \frac{\pi}{n \sin. \frac{p\pi}{n}} = \frac{\pi}{n \sin. \frac{q\pi}{n}}.$$

Ad hoc ostendendum sit $q = n - p$, hincque formula proposita $\int \frac{x^{p-1}\,\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)\,p}}$, tum ponatur $\frac{x}{\sqrt[n]{(1-x^n)}} = z$, et quia $\frac{x^p}{\sqrt[n]{(1-x^n)\,p}} = z^p$, erit $S = \int \frac{z^p\,\partial x}{x}$. Ex facta autem positione sequitur $x^n = \frac{z^n}{1+z^n}$, hincque

$$n\,l\,x = n\,l\,z - l(1+z^n),$$

ergo differentiando

∂x

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial z}{z} - \frac{z^{n-1}\,\partial z}{1+z^n} = \frac{\partial z}{z(1+z^n)},$$

ita vt iam fit $S = \int \frac{z^{p-1}\,\partial z}{1+z^n}$. Quia autem fumpto $x = 0$ fit etiam $z = 0$, at vero fumpto $x = 1$ prodit $z = \infty$, hoc integrale a termino $z = 0$ vsque ad $z = \infty$ extendi debet. Notum autem eft valorem hoc modo refultantem effe $\frac{\pi}{n \sin.\frac{p\pi}{n}}$.

§. 8. Progrediamur nunc ad ipfum fundamentum, vnde omnes relationes, quas quaerimus, deriuari conuenit et quod reductioni priori innititur; vnde fit

$$\int \frac{x^{p-1}\,\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \frac{p+q}{p} \cdot \int \frac{x^{n+p-1}\,\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}},$$

vbi loco $\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}$ fcribamus X, vt fit

$$\int \frac{x^{p-1}\,\partial x}{X} = \frac{p+q}{p} \cdot \int \frac{x^{n+p-1}\,\partial x}{X},$$

hinc iam fimili modo, fi loco p fcribamus $n+p$, erit

$$\int \frac{x^{n+p-1}\,\partial x}{X} = \frac{n+p+q}{n+p} \cdot \int \frac{x^{2n+p-1}\,\partial x}{X},$$

hincque fequitur fore:

$$\int \frac{x^{p-1}\,\partial x}{X} = \frac{p+q}{p} \cdot \frac{n+p+q}{n+p} \int \frac{x^{2n+p-1}\,\partial x}{X}.$$

Quodfi fimili modo vlterius progrediamur, perueniemus ad hanc aequationem:

$$\int \frac{x^{p-1}\,\partial x}{X} = \frac{p+q}{p} \cdot \frac{n+p+q}{n+p} \cdot \frac{2n+p+q}{2n+p} \int \frac{x^{3n+p-1}\,\partial x}{X}.$$

Quare fi hoc modo in infinitum progrediamur, habebimus

$$\int \frac{x^{p-1}\,\partial x}{X} = \frac{p+q}{p} \cdot \frac{n+p+q}{n+p} \cdot \frac{2n+p+q}{2n+p} \times$$

$$\times \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \frac{in+p+q}{in+p} \int \frac{x^{(i+1)n+p-1}\,\partial x}{X},$$

vbi i denotat numerum infinite magnum.

§. 9. Quodsi iam loco p alium quemcunque numerum r, pariter ipso n minorem, assumamus, erit simili modo:

$$\int \frac{x^{r-1}\,\partial x}{X} = \frac{r+q}{r} \cdot \frac{n+r+q}{n+r} \cdot \frac{2n+r+q}{2n+r} \times$$

$$\times \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \frac{in+r+q}{in+r} \int \frac{x^{(i+1)n+r-1}\,\partial x}{X},$$

vbi littera i eundem numerum infinitum designat, ita vt vtrinque idem factorum numerus adsit. Diuidamus iam priorem expressionem per istam, et quoniam extremae formulae integrales, ob litteras p et r prae $(i+1)n$ euanescentes, pro aequalibus inter se sunt habendae, facta diuisione per singulos factores reperiemus hanc aequationem:

$$\frac{\int x^{p-1}\,\partial x : X}{\int x^{r-1}\,\partial x : X} = \frac{r\,(p+q)}{p\,(r+q)} \cdot \frac{(n+r)\,(n+p+q)}{(n+p)\,(n+r+q)} \times$$

$$\times \frac{(2n+r)\,(2n+p+q)}{(2n+p)\,(2n+r+q)} \cdot \frac{(3n+r)\,(3n+p+q)}{(3n+p)\,(3n+r+q)} \times \text{etc.}$$

Restituamus iam loco harum formularum integralium characteres ante stabilitos, atque adipiscemur istam relationem notatu dignissimam:

$$\frac{(p,q)}{(r,q)} = \frac{r\,(p+q)}{p\,(r+q)} \cdot \frac{(n+r)\,(n+p+q)}{(n+p)\,(n+r+q)} \cdot \frac{(2n+r)\,(2n+p+q)}{(2n+p)\,(2n+r+q)} \cdot \text{etc.}$$

quod productum ex infinitis membris componitur, quorum singula sunt fractiones, quarum tam numeratores quam denominatores ex binis factoribus constant. Hos factores singulos eodem

quem ergo exponentem n quouis casu excedere non oportet, quamobrem euolutionem formae generalis in theoremate contentae ita in classes distribuamus, quae inter se per maximum valorem termini $a+b$ distinguantur. Cum igitur nulla litterarum a, b, c nihilo aequalis sumi queat, ac esse debeat $b>c$, minimus valor, quem terminus $a+b$ recipere potest, erit 3, in quo ergo primam classem constituemus; sequentes vero classes constituentur, dum termino $a+b$ valores 4, 5, 6, 7, etc. tribuantur.

I. Euolutio classis qua $a+b=3$.

§. 12. Hic ergo necessario erit $a=1$, $b=2$ et $c=1$, ita vt hic nulla varietas locum inueniat, vnde theorema nostrum suppeditat hanc vnicam relationem: $(1, 2)(3, 1) = (1, 1)(2, 2)$. Dummodo igitur exponens n non fuerit minor quam 3, semper haec insignis relatio locum habet:

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-2}}} \cdot \int \frac{x x \partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-1}}} = \int \frac{\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-1}}} \cdot \int \frac{x \partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-2}}},$$

quae forma, quia in quolibet charactere terminos inter se permutare licet, etiam hoc modo repraesentari poterit:

$$\int \frac{x \partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-1}}} \cdot \int \frac{\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-3}}} = \int \frac{\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-1}}} \cdot \int \frac{x \partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-2}}}.$$

II. Euolutio classis qua $a+b=4$.

§. 13. Quoniam b binario minor esse nequit, hic erit vel $b=2$, vel $b=3$. Sit igitur primo $b=2$, eritque $a=2$ et

et $c = 1$; vnde ex noſtro theoremate ſequitur haec relatio: $(2, 2)(4, 1) = (2, 1)(3, 2)$, quae forma manifeſto oritur ex claſſe prima, ſi ibi termini priores cuiusque characteris vnitate augeantur; id quod etiam inde intelligere licet, quod omnes termini priores litteram a continent, qua vnitate aucta proceſſus ſemper fit ad claſſem ſequentem.

§. 14. Deinde vero hic quoque ſtatui poteſt $b = 3$, vnde fit $a = 1$; at vero littera c iam duos valores, vel 1, vel 2 ſortiri poterit; priore caſu, quo $c = 1$, prodibit iſta aequatio: $(1, 3)(4, 1) = (1, 1)(2, 3)$; alter vero caſus, quo $c = 2$, praebet hanc aequationem: $(1, 3)(4, 2) = (1, 2)(3, 3)$. Sicque haec claſſis omnino ſequentes tres relationes continebit:

1°. $(2, 2)(4, 1) = (2, 1)(3, 2)$,
2°. $(1, 3)(4, 1) = (1, 1)(2, 3)$,
3°. $(1, 3)(4, 2) = (1, 2)(3, 3)$.

III. Euolutio claſſis qua $a + b = 5$.

§. 15. In hac igitur claſſe primo occurrent tres relationes praecedentes, ſi modo termini priores cuiusque characteris vnitate augeantur: hinc enim caſus exſurgent, quibus eſt vel $b = 2$, vel $b = 3$. De nouo igitur hic accedent caſus, quibus $b = 4$ et $a = 1$, vbi ergo erit vel $c = 1$, vel $c = 2$, vel $c = 3$, quibus ergo tribus caſibus euolutis omnino in hac claſſe ſex continebuntur ralationes, quae erunt:

1°. $(3, 2)(5, 1) = (3, 1)(4, 2)$,
2°. $(2, 3)(5, 1) = (2, 1)(3, 3)$,
3°. $(2, 3)(5, 2) = (2, 2)(4, 3)$,

4°.

4°. $(1, 4)(5, 1) = (1, 1)(2, 4)$,
5°. $(1, 4)(5, 3) = (1, 2)(3, 4)$,
6°. $(1, 4)(5, 3) = (1, 3)(4, 4)$,

IV. Euolutio classis
qua $a + b = 6$.

§. 16. Hic igitur primum occurrent omnes relationes proxime praecedentes, si modo termini priores cuiusque characteris vnitate augeantur: hi scilicet nascuntur, si fuerit vel $b = 2$, vel $b = 3$, vel $b = 4$. Praeterea vero insuper accedent casus $b = 5$ et $a = 1$, vbi littera c recipere poterit valores 1, 2, 3, 4, sicque omnino in hac classe occurrent decem relationes sequentes:

1°. $(4, 2)(6, 1) = (4, 1)(5, 2)$,
2°. $(3, 3)(6, 1) = (3, 1)(4, 3)$,
3°. $(3, 3)(6, 2) = (3, 2)(5, 2)$,
4°. $(2, 4)(6, 1) = (2, 1)(3, 4)$,
5°. $(2, 4)(6, 2) = (2, 2)(4, 4)$,
6°. $(2, 4)(6, 3) = (2, 3)(5, 4)$,
7°. $(1, 5)(5, 1) = (1, 1)(2, 5)$,
8°. $(1, 5)(6, 2) = (1, 2)(3, 5)$,
9°. $(1, 5)(6, 3) = (1, 3)(4, 5)$,
10°. $(1, 5)(6, 4) = (1, 4)(5, 5)$.

V. Euolutio classis
qua $a + b = 7$.

§. 17. Hic igitur primo occurrent omnes relationes Classis IV. postquam scilicet omnes terminos priores singulorum

rum characterum vnitate auxerimus, quos igitur hic apposuisse non erit necesse, ac sufficiet eas tantum relationes hic exponere, quae de nouo accedunt et ex valore $b = 6$ oriuntur, existente $a = 1$; vbi pro c sumi poterunt numeri 1, 2, 3, 4, 5, ita vt harum numerus sit quinque. Hae ergo relationes sunt:

$$(1, 6)\ (7, 1) = (1, 1)\ (2, 6)$$
$$(1, 6)\ (7, 2) = (1, 2)\ (3, 6)$$
$$(1, 6)\ (7, 3) = (1, 3)\ (4, 6)$$
$$(1, 6)\ (7, 4) = (1, 4)\ (5, 6)$$
$$(1, 6)\ (7, 5) = (1, 5)\ (6, 6).$$

VI. Euolutio classis
qua $a + b = 8$.

§. 18. In hac iam classe primo occurrent omnes decem relationes classis IV, dum scilicet omnes termini priores binario augentur; praeterea quoque accedent quinque relationes in classe V allatae, dum partes priores vnitate augebuntur; praeter has vero de nouo accedent 6 sequentes relationes ex valoribus $a = 1$ et $b = 7$ oriundae, dum litterae c valores 1, 2, 3, 4, 5, 6 ordine tribuuntur, quae ergo erunt:

$$(1, 7)\ (8, 1) = (1, 1)\ (2, 7)$$
$$(1, 7)\ (8, 2) = (1, 2)\ (3, 7)$$
$$(1, 7)\ (8, 3) = (1, 3)\ (4, 7)$$
$$(1, 7)\ (8, 4) = (1, 4)\ (5, 7)$$
$$(1, 7)\ (8, 5) = (1, 5)\ (6, 7)$$
$$(1, 7)\ (8, 6) = (1, 6)\ (7, 7).$$

VII. Euolutio classis
qua $a + b = 9$.

§. 19. Vt omnes relationes ad hanc classem pertinentes adipiscamur, notandum est primo hic occurrere decem relationes classis

IV. dum partes priores ternario augentur. Secundo adiici oportet quinque relationes in classe V. exhibitas, vbi partes priores binario augeri debent. Tertio huc referri debent sex relationes classis VI. partes priores vnitate augendo. Insuper vero de nouo accedent septem relationes ex valoribus $a = 1$ et $b = 8$ natae, dum litterae c tribuuntur ordine valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Hae relationes sunt:

$$(1, 8)\ (9, 1) = (1, 1)\ (2, 8)$$
$$(1, 8)\ (9, 2) = (1, 2)\ (3, 8)$$
$$(1, 8)\ (9, 3) = (1, 3)\ (4, 8)$$
$$(1, 8)\ (9, 4) = (1, 4)\ (5, 8)$$
$$(1, 8)\ (9, 5) = (1, 5)\ (6, 8)$$
$$(1, 8)\ (9, 6) = (1, 6)\ (7, 8)$$
$$(1, 8)\ (9, 7) = (1, 7)\ (8, 8).$$

§. 20. Hinc iam ordo progressionis tam clare perspicitur, vt superfluum foret has euolutiones vlterius prosequi; quandoquidem ob ingentem multitudinem relationum, quae in sequentibus classibus occurrerent, nimis molestum foret omnes percurrere. Quin etiam nostrum institutum vix permittere videtur, vt in nostra formula generali exponentem n vltra sex vel septem augeamus, si quidem omnes relationes ad eum pertinentes enumerare voluerimus. Sin autem animus sit aliquas tantum expendere, classes allatae abunde sufficiunt, dum termini priores cuiusque classis quouis numero augebuntur.

§. 21. His iam classibus expeditis formulam integralem propositam $\int \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ secundum diuersos valores exponentis n pertractemus, dum scilicet successiue assumemus $n = 3$; $n = 4$; $n = 5$; etc. et pro quolibet ordine omnes relatio-

lationes, quae in eo occurrere poſſunt, expendamus. Euidens autem eſt, quicunque numerus exponenti n tribuatur, formulas omnium claſſium inferiorum, in quibus ſcilicet terminus $a+b$ non ſuperet n, in vſum vocari poſſe. Ex quo intelligitur, ſi fuerit $n=3$, vnicam relationem locum inuenire; ſtatim autem ac n magis augetur, numerus omnium relationum mox ita increſcit, vt nimis moleſtum foret omnes recenſere. Hos igitur diuerſos ordines, ex exponente n conſtituendos, a primo incipiendo, ordine euoluamus.

Ordo I.

quo $n=3$ et formula

$$(p,q)=\int\frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^{n-q}}}=\int\frac{x^{q-1}\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^{n-p}}}.$$

§. 22. Cum hic ſit $n=3$, erit $(3,1)=1$; formulae autem integrales huius ordinis erunt tres; ſcilicet: 1°. $(1,1)$; 2°. $(1,2)$; 3°. $(2,2)$; quarum media, ob $1+2=3$, a circulo pendet, quae ergo, quia eſt cognita, ponatur

$$(1,2)=\frac{\pi}{3\,\text{ſin.}\,\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}=A.$$

Hic igitur tantum claſſis prima locum habet, quae nobis hanc vnicam aequationem ſuppeditat: $A=(1,1)(2,2)$.

§. 23. Hinc ergo patet productum ex binis formulis transcendentibus $(1,1)$ et $(2,2)$ aequari quantitati circulari $A=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$, ita vt pro ipſis formulis integralibus habeamus hanc relationem:

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}\cdot\int\frac{x\,\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}};$$

vnde

vnde si altera harum duarum formularum fuerit cognita, etiam valor alterius assignari potest. Spectemus ergo priorem quasi nobis esset cognita, etiamsi sit transcendens, eamque ponamus

$$(1, 1) = \int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(1 - x^3)^2}} = P$$

eritque $(2, 2) = \frac{A}{P}$. Sicque nihil praeterea in hoc ordine notandum relinquitur.

Ordo II.

quo $n = 4$ et formula

$$(p, q) = \int \frac{x^{p-1} \partial x}{\sqrt[4]{(1 - x^4)^{4-q}}} = \int \frac{x^{q-1} \partial x}{\sqrt[4]{(1 - x^4)^{4-p}}}.$$

§. 24. Cum igitur hic sit $n = 4$, erit $(4, 1) = 1$ et $(4, 2) = \frac{1}{2}$; formulae autem integrales ad hunc ordinem pertinentes erunt sex sequentes: 1°. $(1, 1)$; 2°. $(1, 2)$; 3°. $(1, 3)$; 4°. $(2, 2)$; 5°. $(2, 3)$; 6°. $(3, 3)$, inter quas ergo reperiuntur duae formulae circulares $(1, 3)$ et $(2, 2)$, quas propterea litteris A et B designemus, ponendo

$$(1, 3) = \frac{\pi}{4 \sin. \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = A \text{ et}$$

$$(2, 2) = \frac{\pi}{4 \sin. \frac{2\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} = B$$

ita vt sit $\frac{A}{B} = \sqrt{2}$.

§. 25. In hoc ergo ordine aequationes tam primae quam secundae classis locum habere possunt; secunda autem classis nobis has tres praebet aequationes:

1°. $B = (2, 1)(3, 2)$; 2°. $A = (1, 1)(2, 3)$; 3°. $A = 2(1, 2)(3, 3)$;

classis

$$(1, 2) = P = \int \frac{\partial x}{\sqrt{(1 - x^4)}};$$

$$(1, 1) = \frac{AP}{B};$$

$$(2, 3) = \frac{B}{P};$$

$$(3, 3) = \frac{A}{2P}.$$

Ex postremis ergo erit

$$(2, 3) : (3, 3) = 2B : A = \sqrt{2} : 1,$$

ita vt etiam hae duae formulae inter se habeant rationem algebraicam, qua est

$$\int \frac{xx\partial x}{\sqrt{(1 - x^4)}} = \sqrt{2} \int \frac{xx\partial x}{\sqrt[4]{(1 - x^4)}}.$$

Aliis insignibus relationibus, vtpote satis cognitis, hic non immoramur.

Ordo III.

quo $n = 5$ et formula

$$(p, q) = \int \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt[5]{(1 - x^5)^{n-q}}} = \int \frac{x^{q-1}\partial x}{\sqrt[5]{(1 - x^5)^{n-p}}}.$$

§. 28. Hic igitur ob $n = 5$ ante omnia erit $(5, 1) = 1$; $(5, 2) = \frac{1}{2}$; $(5, 3) = \frac{1}{3}$; formulae autem integrales huius ordinis erunt hae decem:

1°. $(1, 1)$; 2°. $(1, 2)$; 3°. $(1, 3)$; 4°. $(1, 4)$; 5°. $(2, 2)$;
6°. $(2, 3)$; 7°. $(2, 4)$; 8°. $(3, 3)$; 9°. $(3, 4)$; 10°. $(4, 4)$;

inter quas quarta et sexta sunt circulares, quas ergo ita designemus:

$$(1, 4) = \frac{\pi}{5 \sin. \frac{1}{5}\pi} = A \text{ et}$$

$$(2, 3) = \frac{\pi}{5 \sin. \frac{2\pi}{5}} = B.$$

Prae-

Praeterea vero binas formulas, quae in ordine praecedenti erant circulares, nunc autem ſunt transcendentes, etiam peculiaribus litteris notemus, ſcilicet $(1, 3) = P$ et $(2, 2) = Q$. Mox enim patebit, dummodo etiam iſtae formulae tanquam cognitae ſpectentur, reliquas ſex omnes per has quatuor determinari poſſe.

§. 29. Quoniam hic tres claſſes priores locum habere poſſunt, conſideremus primo aequationes, quas tertia claſſis ſuppeditat, & quae introductis his valoribus erunt:

1°. $B = P\,(4, 2)$;
2°. $B = (2, 1)\,(3, 3)$;
3°. $B = 2\,Q\,(4, 3)$;
4°. $A = (1, 1)\,(2, 4)$;
5°. $A = 2\,(1, 2)\,(3, 4)$;
6°. $A = 3\,P\,(4, 4)$.

Quas hoc modo ſuccinctius repraeſentare licet:

$$A = (1, 1)\,(2, 4) = 2\,(1, 2)\,(3, 4) = 3\,P\,(4, 4);$$
$$B = P\,(4, 2) = (2, 1)\,(3, 3) = 2\,Q\,(4, 3);$$

vbi ſex occurrunt producta ex binis formulis integralibus, quae ſingula quantitati circulari aequantur, vnde totidem egregia theoremata formari poſſent, niſi hinc iam clare in oculos incurrerent.

§. 30. Iam videamus, quot formulas integrales incognitas ex quatuor cognitis A, B, P et Q definire queamus, at vero prima dat $(4, 2) = \frac{B}{P}$; tertia praebet $(4, 3) = \frac{B}{2Q}$; ſexta dat $(4, 4) = \frac{A}{3P}$; hinc autem porro ex quarta deducimus

$$(1, 1) = \frac{A}{(2, 4)} = \frac{AP}{B};$$

ex quinta vero deducimus

$$(1, 2) = \frac{A}{2\,(3, 4)} = \frac{AQ}{B}.$$

Deni-

Denique ex ſecunda elicimus

$$(3, 3) = \frac{B}{(2, 1)} = \frac{BB}{AQ},$$

ſicque ex his ſex aequationibus ſex determinationes ſumus adepti; atque adeo per litteras A, B, P et Q valores omnium reliquarum litterarum aſſignauimus.

§. 31. Quoniam igitur hactenus tantum claſſe tertia ſumus vſi, conſideremus etiam aequationes ſecundae claſſis, quae ſunt:

1°. $AQ = B(2, 1)$;

2°. $AP = B(1, 1)$ et

3°. $P(4, 2) = (1, 2)(3, 3)$;

verum ſi hic valores modo inuentos ſubſtituamus, aequationes mere identicae reſultant, ita vt hinc nulla noua determinatio ſequatur. Idem vſu venit ex aequatione primae claſſis, quae erat $(2, 1)(3, 1) = (1, 1)(2, 2)$, quae facta ſubſtitutione quoque fit identica, ita vt duae priores claſſes nihil noui inuoluant. Neque tamen hinc concludere licet, etiam in ſequentibus ordinibus claſſes praecedentes praetermitti poſſe, ſiquidem in ordine ſequente ſtatim contrarium ſe manifeſtabit.

§. 32. Cum igitur hic ordo complectatur decem formulas integrales, earum valores per quatuor litteras A, B, P et Q ordine ita aſpectui exponamus:

1°. $(1, 1) = \frac{AP}{B}$;

2°. $(1, 2) = \frac{AQ}{B}$;

3°. $(1, 3) = P$;

4°. $(1, 4) = A$;

5°. $(2, 2) = Q$;

6°. $(2, 3) = B$;

7°. $(2, 4) = \frac{B}{P}$;

8°. $(3, 3) = \frac{BB}{AQ}$;

9°. $(3, 4) = \frac{B}{2Q}$;

10°. $(4, 4) = \frac{A}{3P}$.

§. 33. Cum sit $\frac{A}{B} = \frac{\text{fin.} \frac{2}{5}\pi}{\text{fin.} \frac{1}{5}\pi} = 2 \text{ cof.} \frac{1}{5}\pi$, tum vero $\text{cof.} \frac{1}{5}\pi = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, erit $\frac{A}{B} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ideoque quantitas algebraica. Hinc igitur aliquot paria formularum integralium exhiberi poterunt, quae inter fe teneant rationem algebraicam; erit enim:

$$\frac{(1,1)}{(1,3)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \quad \frac{(1,2)}{(2,2)} = \frac{A}{B}; \quad \frac{(3,4)}{(3,3)} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}; \quad \frac{(4,4)}{(2,4)} = \frac{1+\sqrt{5}}{6};$$

vnde totidem egregia theoremata condi poffent, nifi ex his formulis manifefto elucerent.

Ordo IV.

quo $n = 6$ et formula

$$(p, q) = \int \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt[6]{(1-x^6)^{6-q}}} = \int \frac{x^{q-1}\partial x}{\sqrt[6]{(1-x^6)^{6-p}}}.$$

§. 34. Quoniam hic eft $n = 6$, habebimus ante omnia $(6, 1) = 1$; $(6, 2) = \frac{1}{2}$; $(6, 3) = \frac{1}{3}$; $(6, 4) = \frac{1}{4}$; formularum autem integralium in hoc ordine occurrentium numerus eft 15, quae funt:

1°. $(1, 1)$; 2°. $(1, 2)$; 3°. $(1, 3)$; 4°. $(1, 4)$; 5°. $(1, 5)$;
6°. $(2, 2)$; 7°. $(2, 3)$; 8°. $(2, 4)$; 9°. $(2, 5)$; 10°. $(3, 3)$;
11°. $(3, 4)$; 12°. $(3, 5)$; 13°. $(4, 4)$; 14°. $(4, 5)$; 15°. $(5, 5)$;

inter

inter quas reperiuntur tres circulares, quas ſingulari modo deſignemus, ſcilicet:

$$1^\circ.\ (1, 5) = \frac{\pi}{6\ \text{ſin.}\ \frac{1}{6}\pi} = \tfrac{\pi}{3} = A;$$

$$2^\circ.\ (2, 4) = \frac{\pi}{6\ \text{ſin.}\ \frac{2\pi}{6}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = B \text{ et}$$

$$3^\circ.\ (3, 3) = \frac{\pi}{6\ \text{ſin.}\ \frac{3\pi}{6}} = \tfrac{\pi}{6} = C;$$

ita vt ſit $A = 2\,C$. Praeterea vero ambas formulas, quae in ordine praecedente erant circulares, nunc vero ſunt transcendentes, ſtatuamus $(1, 4) = P$ et $(2, 3) = Q$. His factis denominationibus euoluamus decem aequationes claſſis quartae, quae ſunt:

1°. $B = P\,(5, 2)$;
2°. $C = (3, 1)\,(4, 3)$;
3°. $C = 2\,Q\,(5, 3)$;
4°. $B = (2, 1)\,(3, 4)$;
5°. $B = 2\,(2, 2)\,(4, 4)$;
6°. $B = 3\,Q\,(5, 4)$;
7°. $A = (1, 1)\,(5, 2)$;
8°. $A = 2\,(1, 2)\,(3, 5)$;
9°. $A = 3\,(1, 3)\,(4, 5)$;
10°. $A = 4\,P\,(5, 5)$;

quas ita ſuccinctius referre licet:

$$A = (1,1)\,(5,2) = 2\,(1,2)\,(3,5) = 3\,(1,3)\,(4,5) = 4\,P\,(5,5);$$
$$B = P\,(5,2) = (2,1)\,(3,4) = 2\,(2,2)\,(4,4) = 3\,Q\,(4,5);$$
$$C = (3,1)\,(5,2) = 2\,Q\,(5,3).$$

Ecce

Ecce ergo decem producta ex binis formulis integralibus, quorum singula quantitati circulari aequantur.

§. 35. Cum deinde sit $\frac{A}{B}=\sqrt{3}$ et $\frac{A}{C}=2$, tum vero etiam $\frac{B}{C}=\frac{2}{\sqrt{3}}$, plura paria binarum formularum integralium exhiberi possunt, quae inter se teneant rationem algebraicam; erit enim:

$$\frac{A}{B}=\sqrt{3}=\frac{(1,1)}{(1,4)}=\frac{2(3,5)}{(3,4)}=\frac{(1,3)}{(2,3)}=\frac{4(5,5)}{(5,2)},$$
$$\frac{A}{C}=2=\frac{(1,1)}{(1,3)}=\frac{(1,2)}{(2,3)}=\frac{3(4,5)}{(2,5)},$$
$$\frac{B}{C}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{(1,4)}{(1,3)}=\frac{3(4,5)}{2(3,5)}.$$

§. 36. Quodsi iam quinque formulas litteris A, B, C, P et Q designatas tanquam cognitas spectemus, videamus, quomodo reliquae formulae per eas definiri queant. Ac primo quidem percurramus decem aequationes classis quartae supra allatas, quarum prima dabit $(5,2)=\frac{B}{P}$; tertia dat $(5,3)=\frac{C}{2Q}$; sexta praebet $(5,4)=\frac{B}{3Q}$; decima dat $(5,5)=\frac{A}{4P}$. Quodsi iam hos valores in reliquis surrogemus, secunda dabit $(3,1)=\frac{C}{(4,3)}=\frac{AQ}{B}$; septima praebet $(1,1)=\frac{A}{(5,2)}=\frac{AP}{B}$; octava dat $(1,2)=\frac{A}{2(3,5)}=\frac{AQ}{C}$; nona dat $(3,1)=\frac{A}{3(4,5)}=\frac{AQ}{B}$, quem valorem etiam secunda praebuit. Porro vero quarta dat $(3,4)=\frac{B}{(2,1)}=\frac{BC}{AQ}$. At vero ex aequatione quinta nullum valorem elicere possumus, quia neque formula $(2,2)$ nec $(4,4)$ etiamnunc constat. Causa est quia duae reliquarum aequationum eandem determinationem produxerunt.

§. 37. Coacti igitur sumus ad aequationes praecedentium classium confugere, atque adeo ex prima classe

 (1, 2)

$$(1, 2)\,(3, 1) = (1, 1)\,(2, 2)$$
ſtatim colligimus

$$(2, 2) = \frac{(1, 2)\,(3, 1)}{(1, 1)} = \frac{AQQ}{CP},$$
qui valor in quinta aequatione ſubſtitutus ſuppeditat poſtremam aequationem, nempe

$$(4, 4) = \frac{B}{2(2, 2)} = \frac{BCP}{2AQQ}.$$
Omnes igitur hos valores hic ordine referemus.

1°. $(1, 1) = \frac{AP}{B}$.	9°. $(2, 5) = \frac{B}{P}$.
2°. $(1, 2) = \frac{AQ}{C}$.	10°. $(3, 3) = C$.
3°. $(1, 3) = \frac{AQ}{B}$.	11°. $(3, 4) = \frac{BC}{AQ}$.
4°. $(1, 4) = P$.	12°. $(3, 5) = \frac{C}{2Q}$.
5°. $(1, 5) = A$.	13°. $(4, 4) = \frac{BCP}{2AQQ}$.
6°. $(2, 2) = \frac{AQQ}{CP}$	14°. $(4, 5) = \frac{B}{3Q}$.
7°. $(2, 3) = Q$.	15°. $(5, 5) = \frac{A}{4P}$.
8°. $(2, 4) = B$.	

§. 38. Cum autem in hoc ordine etiam aequationes tam claſſis ſecundae quam tertiae valere debeant, videamus vtrum valores inuenti his claſſibus conueniant, an vero forte novam determinationem ſuppeditent? Facta autem ſubſtitutione in tribus aequationibus ſecundae claſſis, ad identitatem peruenitur, quod idem quoque in aequationibus tertiae claſſis contingere debet, id quod euoluenti mox patebit. Vnde memorabile eſt omnes aequationes in quatuor primis claſſibus contentas, quarum numerus eſt 20, tantum decem determinationes in ſe complecti.

Ordo

Ordo V.

quo $n = 7$ et formula

$$(p, q) = \int \frac{x^{p-1} \partial x}{\sqrt[7]{(1 - x^7)^{7-q}}} = \int \frac{x^{q-1} \partial x}{\sqrt[7]{(1 - x^7)^{7-p}}},$$

§. 39. Quia hic $n = 7$, ante omnia habebimus valores abſolutos $(7, 1) = 1$; $(7, 2) = \frac{1}{2}$; $(7, 3) = \frac{1}{3}$; $(7, 4) = \frac{1}{4}$ et $(7, 5) = \frac{1}{5}$; deinde inter formulas integrales huius ordinis imprimis notari debent circulares, quas hoc modo deſignemus:

$$(1, 6) = \frac{\pi}{7 \text{ ſin. } \frac{\pi}{7}} = A;$$

$$(2, 5) = \frac{\pi}{7 \text{ ſin. } \frac{2\pi}{7}} = B;$$

$$(3, 4) = \frac{\pi}{7 \text{ ſin. } \frac{3\pi}{7}} = C.$$

Praeterea vero peculiaribus litteris notentur eae formulae, quae in ordine praecedenti erant circulares, hic autem valores transcendentes ſortiuntur, qui ſint $(1, 5) = P$; $(2, 4) = Q$ et $(3, 3) = R$: per has enim ſex litteras videbimus omnes reliquas formulas huius ordinis determinari poſſe.

§. 40. Quoniam ſupra non omnes aequationes quintae claſſis expreſſimus, eas hic coniunctim exhibeamus et ad noſtrum caſum accommodemus:

I°.	$(1,6)\,(7,1) = (1,1)\,(2,6)$	$A = (1,1)\,(2,6)$,
II°.	$(1,6)\,(7,2) = (1,2)\,(3,6)$	$A = 2\,(1,2)\,(3,6)$,
III°.	$(1,6)\,(7,3) = (1,3)\,(4,6)$	$A = 3\,(1,3)\,(4,6)$,
IV°.	$(1,6)\,(7,4) = (1,4)\,(5,6)$	$A = 4\,(1,4)\,(5,6)$,
V°.	$(1,6)\,(7,5) = (1,5)\,(6,6)$	$A = 5\;P\;(6,6)$,
VI°.	$(2,5)\,(7,1) = (2,1)\,(3,5)$	$B = (2,1)\,(3,5)$,
VII°.	$(2,5)\,(7,2) = (2,2)\,(4,5)$	$B = 2\,(2,2)\,(4,5)$,
VIII°.	$(2,5)\,(7,3) = (2,3)\,(5,5)$	$B = 3\,(2,3)\,(5,5)$,
IX°.	$(2,5)\,(7,4) = (2,4)\,(6,5)$	$B = 4\;Q\;(6,5)$,
X°.	$(3,4)\,(7,1) = (3,1)\,(4,4)$	$C = (3,1)\,(4,4)$,
XI°.	$(3,4)\,(7,2) = (3,2)\,(5,4)$	$C = 2\,(3,2)\,(5,4)$,
XII°.	$(3,4)\,(7,3) = (3,3)\,(6,4)$	$C = 3\;R\;(6,4)$,
XIII°.	$(4,3)\,(7,1) = (4,1)\,(5,3)$	$C = (4,1)\,(5,3)$,
XIV°.	$(4,3)\,(7,2) = (4,2)\,(6,3)$	$C = 2\;Q\;(6,3)$,
XV°.	$(5,2)\,(7,1) = (5,1)\,(6,2)$	$B = P\;(6,2)$.

Hic igitur habemus quina producta formulae A aequalia, totidemque formulis B et C aequalia.

§. 41. Omnino autem in hoc ordine occurrunt 21 formulae integrales, ex quibus ſex litteris A, B, C, P, Q et R deſignauimus, per quas igitur reliquas quindecim formulas integrales definiri oportet, quae ſunt: 1°. (1, 1); 2°. (1, 2); 3°. (1, 3); 4°. (2, 2); 5°. (1, 4); 6°. (2, 3); 7°. (2, 6); 8°. (3, 5); 9°. (4, 4); 10°. (3, 6); 11°. (4, 5); 12°. (4, 6); 13°. (5, 5); 14°. (5, 6); 15°. (6, 6).

§. 42. Videamus igitur, quot harum formularum ex ſuperioribus quindecim aequationibus determinare liceat, ac primo quidem ex aequationibus V, IX, XII, XIV et XV immediate deducuntur ſequentes formulae: $(6,6) = \frac{A}{5P}$; $(6,5) = \frac{B}{4Q}$; $(6,4) = \frac{C}{3R}$; $(6,3) = \frac{C}{2Q}$; $(6,2) = \frac{B}{P}$. His iam inuentis ex

aequa-

aequationibus I, II, III et IV. deriuamus has formulas: $(1, 1) = \frac{AP}{B}$; $(1, 2) = \frac{AQ}{C}$; $(1, 3) = \frac{AR}{C}$; $(1, 4) = \frac{AQ}{B}$. Ex his vero valoribus per aequationes VI, X et XIII, colligimus $(3, 5) = \frac{BC}{AQ}$; $(4, 4) = \frac{CC}{AR}$, et $(5, 3) = \frac{BC}{AQ}$; vbi notasse iuuabit eundem valorem pro $(5, 3)$ prodiisse ex aequationibus VI et XIII. Ex reliquis autem aequationibus VII, VIII et IX, nihil concludere licet, vnde istae quatuor formulae: $(2, 2)$; $(2, 3)$; $(5, 4)$ et $(5, 5)$, nobis etiamnunc manent incognitae.

§. 43. Recurrere ergo coacti sumus ad aequationes praecedentium classium, quippe quae aeque ad nostrum ordinem pertinent atque aequationes classis quintae; hanc ob rem simili modo aequationes classis quartae hic apponamus et ad nostrum casum applicemus:

I°.	$(1, 5)(6, 1) = (1, 1)(2, 5)$	$PA = (1, 1)$
II°.	$(1, 5)(6, 2) = (1, 2)(3, 5)$	$P(6, 2) = (1, 2)(3, 5)$
III°.	$(1, 5)(6, 3) = (1, 3)(4, 5)$	$P(6, 3) = (1, 3)(4, 5)$
VI°.	$(1, 5)(6, 4) = (1, 4)(5, 5)$	$P(6, 4) = (1, 4)(5, 5)$
V°.	$(2, 4)(6, 1) = (2, 1)(3, 4)$	$QA = (2, 1)C$
VI°.	$(2, 4)(6, 2) = (2, 2)(4, 4)$	$Q(6, 2) = (2, 2)(4, 4)$
VII°.	$(2, 4)(6, 3) = (2, 3)(5, 4)$	$Q(6, 3) = (2, 3)(5, 4)$
VIII°.	$(3, 3)(6, 1) = (3, 1)(4, 3)$	$RA = (3, 1)C$
IX°.	$(3, 3)(6, 2) = (3, 2)(5, 3)$	$R(6, 2) = (3, 2)(5, 3)$
X°.	$(4, 2)(6, 1) = (4, 1)(5, 2)$	$QA = (4, 1)B.$

§. 44. Ex aequationibus I, V, VIII et X immediate concludimus has formulas: $(1, 1) = \frac{PA}{B}$; $(2, 1) = \frac{QA}{C}$; $(3, 1) = \frac{AR}{C}$; $(4, 1) = \frac{AQ}{B}$, quos autem valores iam ante adepti sumus. Secunda aequatio, si formulae iam inuentae substituantur, praebet aequationem identicam. Ex tertia autem poterimus definire formu-

formulam $(4, 5)$, cuius valor hinc colligitur $(4, 5) = \frac{CCP}{2AQR}$. Simili modo ex IV elicimus $(5, 5) = \frac{BCP}{3AQR}$. Porro ex aequatione VI. concludimus fore $(2, 2) = \frac{ABQR}{CCP}$. Deinde feptima aequatio dat $(2, 3) = \frac{AQR}{CP}$. Nona vero aequatio etiam praebet $(3, 2) = \frac{AQR}{CP}$. Sicque omnes quindecim formulas incognitas determinauimus per fex litteras cognitas A, B, C, P, Q et R.

§. 45. Valores igitur omnium formularum huius ordinis hic afpectui coniunctim exponamus:

$(1, 6) = A$	$(6, 2) = \frac{B}{P}$	$(1, 1) = \frac{AP}{B}$	$(3, 5) = \frac{BC}{AQ}$	$(2, 3) = \frac{AQR}{CP}$,
$(2, 5) = B$	$(6, 3) = \frac{C}{2Q}$	$(1, 2) = \frac{AQ}{C}$	$(4, 4) = \frac{CC}{AR}$	$(4, 5) = \frac{CCP}{2AQR}$,
$(3, 4) = C$	$(6, 4) = \frac{C}{3R}$	$(1, 3) = \frac{AR}{C}$		$(5, 5) = \frac{BCP}{3AQR}$,
$(1, 5) = P$	$(6, 5) = \frac{B}{4Q}$	$(1, 4) = \frac{AQ}{B}$		$(2, 2) = \frac{ABQR}{CCP}$,
$(2, 4) = Q$	$(6, 6) = \frac{A}{5P}$			
$(3, 3) = R$				

§. 46. Quoniam autem aequationes primae, fecundae ac tertiae claffis etiam in hoc ordine valent, fi in iis valores hic inuentos fubftituamus, perpetuo in aequationes identicas incidemus. Ita cum aequatio primae claffis fit $(1, 2)\ (3, 1) = (1, 1)\ (2, 2)$, facta fubftitutione reperietur $(1, 2)\ (3, 1) = \frac{AAQR}{CC}$; at vero $(1, 1)\ (2, 2)$ fit $= \frac{AAQR}{CC}$, haecque identitas etiam deprehendetur, in tribus aequationibus fecundae claffis, atque etiam in fex aequationibus tertiae claffis, quemadmodum calculum inftituenti mox patebit.

§. 47. Simili modo haud difficile erit hanc inueftigationem ad ordines fuperiores extendere, neque tamen legem obfer-

obſeruare licet, ſecundum quam determinationes ſingularum formularum cuiusque ordinis progrediuntur. Interim tamen obſeruaſſe iuuabit, in ordine ſequente ſexto, vbi $n = 8$ et formulae occurrunt 28, eas omnes primo per quatuor formulas circulares: $(1, 7) = A$; $(2, 6) = B$; $(3, 5) = C$; $(4, 4) = D$; praeterea vero per has tres tranſcendentes: $(1, 6) = P$; $(2, 5) = Q$ et $(3, 4) = R$, determinari poſſe. Cum igitur quouis ordine determinatio ſingularum formularum, praeter formulas circulares, quae vtique pro cognitis haberi poſſunt, etiam aliquot formulas tranſcendentes poſtulat, ſi ſaltem valores harum formularum vero proxime cognoſcere voluerimus: methodus adhuc deſideratur, iſtos valores proxime, veluti in fractionibus decimalibus, definiendi. Talem igitur methodum hic coronidis loco ſubiungemus.

Problema.

Propoſita formula integrali cuiusque ordinis

$$S = \int \frac{x^{p-1}\, \partial x}{\sqrt[n]{(1 - x^n)^{n-q}}},$$

a termino $x = 0$ *vsque ad* $x = 1$ *extendenda, inueſtigare ſeriem conuergentem, quae iſtum valorem* S *exprimat.*

Solutio.

§. 48. Cum ſit

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(1 - x^n)^{n-q}}} = (1 - x^n)^{-\frac{(n-q)}{n}},$$

facta euolutione huius poteſtatis binomii more ſolito, reperietur

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(1 - x^n)^{n-q}}} = 1 + \frac{n-q}{n} x^n + \frac{n-q}{n} \cdot \frac{2n-q}{2n} x^{2n}$$
$$+ \frac{n-q}{n} \cdot \frac{2n-q}{2n} \cdot \frac{3n-q}{3n} x^{3n} + \text{etc.}$$

Si haec feries ducatur in $x^{p-1}\partial x$ et integretur, prodibit

$$S = \frac{x^p}{p} + \frac{n-q}{n}\cdot\frac{x^{n+p}}{n+p} + \frac{n-q}{n}\cdot\frac{2n-q}{2n}\cdot\frac{x^{2n+p}}{2n+p}$$
$$+ \frac{n-q}{n}\cdot\frac{2n-q}{2n}\cdot\frac{3n-q}{3n}\cdot\frac{x^{3n+p}}{3n+p} + \text{etc.}$$

quae feries iam euanefcit pofito $x=0$; vnde fi ponamus $x=1$, valor quaefitus noftrae formulae fiet

$$S = \frac{1}{p} + \frac{n-q}{n}\cdot\frac{1}{n+p} + \frac{n-q}{n}\cdot\frac{2n-q}{2n}\cdot\frac{1}{2n+p}$$
$$+ \frac{n-q}{n}\cdot\frac{2n-q}{2n}\cdot\frac{3n-q}{3n}\cdot\frac{1}{3n+p} + \text{etc.}$$

§. 49. Verum ifta feries, quicunque numeri pro litteris n, p et q accipiantur, nimis lente conuergit, quam vt ex ea valores ipfius S faltem ad tres quatuorue figuras decimales fatis exacte definiri queant; quamobrem aliam euolutionem inftitui conueniet, dum fcilicet valorem quaefitum in duas partes refoluemus. Statuamus igitur:

$$\int \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x^n = \frac{1}{2} \end{bmatrix} = P \text{ et}$$

$$\int \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} \begin{bmatrix} \text{ab } x^n = \frac{1}{2} \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = Q,$$

atque euidens eft fore $S = P + Q$. Nunc autem tam pro P quam pro Q haud difficulter feries fatis conuergentes exhiberi poterunt.

§. 50. Quod primum ad valorem P attinet, eum ex valore generali, quem fupra pro S inuenimus, facile deriuabimus ponendo $x^n = \frac{1}{2}$, ita vt fit $x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ et $x^p = \frac{1}{\sqrt[n]{2^p}}$, quo

facto

facto pro P obtinebimus hanc feriem:

$$P = \frac{1}{\sqrt[n]{2^p}}\left(\frac{1}{p} + \frac{n-q}{2n}\cdot\frac{1}{n+p} + \frac{n-q}{2n}\cdot\frac{2n-q}{4n}\cdot\frac{1}{2n+p}\right.$$
$$\left. + \frac{n-q}{2n}\cdot\frac{2n-q}{4n}\cdot\frac{3n-q}{6n}\cdot\frac{1}{3n+p} + \text{etc.}\right).$$

In qua ferie finguli termini plus quam in ratione dupla decrescunt; ita vt verbi gratia terminus decimus iam multo minor futurus fit quam $\frac{1}{1024}$, vnde fi ad partes millionefimas certi effe velimus, fufficeret calculum nequidem ad vigefimum vsque terminum extendere.

§. 51. Cum deinde pofuerimus

$$Q = \int \frac{x^{p-1}\,\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} \begin{bmatrix} \text{ab } x^n = \frac{1}{2} \\ \text{ab } x = 1 \end{bmatrix},$$

ftatuamus $1 - x^n = y^n$, vt fit $Q = \int \frac{x^{p-1}\,\partial x}{y^{n-q}}$, tum vero erit $x^n = 1 - y^n$, ideoque $x^p = \sqrt[n]{(1-y^n)^p}$, vnde differentiando colligitur $x^{p-1}\,\partial x = -y^{n-1}\,\partial y\,(1-y^n)^{\frac{p-n}{n}}$, quo valore fubftituto erit

$$Q = -\int y^{q-1}\,\partial y\,(1-y^n)^{\frac{p-n}{n}} \begin{bmatrix} \text{ab } y^n = \frac{1}{2} \\ \text{ad } y = 0 \end{bmatrix}.$$

Quando enim fit $x^n = \frac{1}{2}$, tum etiam erit $y^n = \frac{1}{2}$, at facto $x = 1$, manifefto fit $y = 0$; quare fi terminos integrationis permutemus, etiam fignum ipfius formulae immutari debet, ficque fiet

$$Q = \int y^{q-1}\,\partial y\,(1-y^n)^{\frac{p-n}{n}} \begin{bmatrix} \text{ab } y = 0 \\ \text{ad } y^n = \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

§. 52. Haec autem formula pro Q inuenta omnino fimilis eft illi, quam pro P inuenimus, hoc tantum difcrimine,

ne, quod litterae p et q inter ſe ſunt permutatae; quocirca, ſi integratio per ſeriem inſtituatur, proueniet ſequens:

$$Q = \frac{1}{\sqrt[n]{2^q}}\left(\frac{1}{q} + \frac{n-p}{2n}\cdot\frac{1}{n+q} + \frac{n-p}{2n}\cdot\frac{2n-p}{4n}\cdot\frac{1}{2n+q} + \frac{n-p}{2n}\cdot\frac{2n-p}{4n}\cdot\frac{3n-p}{6n}\cdot\frac{1}{3n+q} + \text{etc.}\right),$$

quae ſeries aeque conuerget, ac praecedens pro P inuenta. His autem duabus ſeriebus ad calculum reuocatis ſemper erit valor quaeſitus $S = P + Q$.

Corollarium 1.

§. 53. Iſte calculus plurimum contrahetur iis caſibus, quibus eſt $p = q$, tum enim fiet $P = Q$, hisque caſibus, quibus $S = \int \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}}$, valor iſtius formulae ab $x = 0$ ad $x = 1$ extenſae erit

$$S = \frac{2}{\sqrt[n]{2^p}}\left(\frac{1}{p} + \frac{n-p}{2n}\cdot\frac{1}{n+p} + \frac{n-p}{2n}\cdot\frac{2n-p}{4n}\cdot\frac{1}{2n+p} + \frac{n-p}{2n}\cdot\frac{2n-p}{4n}\cdot\frac{3n-p}{6n}\cdot\frac{1}{3n+p} + \text{etc.}\right).$$

Corollarium 2.

§. 54. Quoniam igitur in ſingulis ordinibus nonnullae huiusmodi formulae (p, p) occurrunt, ſtatim atque valores aliquot huiusmodi formularum fuerint ad calculum decimalem reuocati, quoniam formulae circulares per ſe ſunt notae, ex iis valores omnium reliquarum formularum eiusdem ordinis aſſignare licebit.

Exem-

Exemplum.

§. 55. Propofita fit formula ordinis primi, vbi $p = q = 2$ et $S = \int \frac{x \partial x}{\sqrt[3]{(1 - x^3)}}$. Series igitur pro S inuenta erit

$$S = \sqrt[3]{2}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{4}{12}\cdot\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{4}{12}\cdot\tfrac{7}{18}\cdot\tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{4}{12}\cdot\tfrac{7}{18}\cdot\tfrac{10}{24}\cdot\tfrac{1}{14} + \text{etc.}\right).$$

Subducto autem calculo reperitur

$$S = 0{,}54325 \times \sqrt[3]{2} = 0{,}68445,$$

qui ergo eft valor formulae $(2, 2)$ in ordine 1^{mo} §. 22. vbi inuenimus $(2, 2) = \frac{A}{P}$, ita vt iam fit $P = \frac{A}{(2, 2)}$. Eft vero $A = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = 1{,}20918$, hinc erit $P = 2{,}22582 = (1, 1)$, vnde in fractionibus decimalibus ternae formulae ordinis primi erunt $(1, 1) = 2{,}22582$; $(1, 2) = 1{,}20918$; $(2, 2) = 0{,}68445$. Hocque modo etiam omnes formulas fequentium ordinum euoluere licebit.