Miscellanea Analytica[1]

I.

Teorema proposto dal celebre Waring senza dimostrazione

Se n è un numero primo, allora il prodotto continuo $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1)$, aggiunto dell'unità, è divisibile per lo stesso numero n

Dimostrazione. Sebbene l'illustre geometra Lagrange già abbia dato una duplice dimostrazione nei Nuovi Atti della Accademia delle Scienze di Berlino, ritengo tuttavia che sia gradito ai geometri se renderò nota la mia dimostrazione, come costume a me familiare. Ora proposto un qualunque numero primo n, come ho mostrato da un'altra parte[2], si possono sempre trovare numeri che si possono rendere grandi a piacere in maniera facile, tali che le singole potenze di essi, aventi l'esponente minore di $n-1$, divisi per n, diano resti diversi. Sia a un numero così fatto di cui le singole potenze

$$a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, ..., a^{n-2}$$

divise per n, diano resti diversi, ed essendo il numero di potenze $n-1$, in questi resti compariranno tutti i numeri 1, 2, 3, 4, ..., $n-1$, dei quali esaurita la sequenza la potenza a^{n-1} divisa anche lei per n dia 1 come resto, e cioè il primo a^0. Essendo allora dopo ciò la formula $a^{n-1}-1$ divisibile per n, poiché il numero $n-1$ è pari, quindi $n-1=2p$, allora $n=2p+1$, allora ovviamente o la formula a^p-1, o anche questa a^p+1 è divisibile per il numero primo n. Ora nel primo caso a^p dà resto 1, ciò in contraddizione con la nostra

[1] Eneström index E560, *translated from Latin by Francesco Venti, Perugia.*
[2] Eulero, Commentationes arithmeticae 1, 1849, pp. 516-537 (E449a)

ipotesi, nel secondo la formula $a^p + 1$ sarà divisibile per n sia che la potenza p dia resto -1 sia $n-1$. Premesso ciò, poiché i singoli resti 1, 2, 3, 4, ..., $n-1$ provengono dalle potenze a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, ..., a^{n-2}, è ovvio che il prodotto di tutti quei resti, cioè il prodotto dato $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ...(n-1)$, se si divide per n è lo stesso di quello che si ottiene dividendo per n il prodotto di tutte le altre potenze

$$a^{0+1+2+3+...+(n-2)}, \qquad \text{cioè questa potenza: } a^{(n-1)(n-2):2}$$

Ora essendo $n = 2p+1$, sarà $n-1 = 2p$ e cioè $n-2 = 2p-1$, e così questa potenza sarà a^{2pp-p}, che si riduce a questa $a^{2p(p-1)+p}$, che è il prodotto di queste due potenze $a^{2p(p-1)}$ e a^p. Veramente già vediamo che la potenza a^{2p}, cioè a^{n-1}, divisa per n dà resto 1, e lo stesso risulterà da tutte le potenze di questa, come $a^{2p(p-1)}$; ma le altre potenze a^p danno resto -1, perciò il prodotto di ognuna delle potenze a^{2pp-p} sarà -1. E così questa formula $a^{2pp-p} + 1$ sarà divisibile per il numero n; sostituito allora il prodotto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ...(n-1)$ al posto della potenza a^{2pp-p}, questa formula $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ...(n-1) + 1$, sarà divisibile per il numero primo n.

Corollario 1. Da questo si possono dedurre facilmente altre simili formule, che saranno divisibili in maniera esatta per il numero primo n, che elenchiamo qui con la formula che le ha create:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ...(n-1)+1$$

$$1 \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ...(n-2)-1$$

$$1 \cdot 2 \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ...(n-3)+1$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ...(n-4)-1$$

etc.

Ora in queste formule il numero n va diminuito finché diventi $n=0$.

Corollario 2. Se ora abbiamo una progressione aritmetica di n termini, di cui la differenza non sia n nè multiplo di n, in questa ci sarà un termine divisibile per n, che escluso dal prodotto degli altri termini, e aggiunta l'unità al prodotto, sarà divisibile per il numero n se il numero n è primo. Così se $n=7$ e si forma questa progressione aritmetica di 7 termini: $2, 5, 8, 11, 14, 17, 20$, tolto il termine 14, questa espressione $2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 17 + 1$ è divisibile per 7.

II.

Problema. Trovare quattro numeri interi tali che il prodotto a due a due aggiunto all'unità sia un quadrato.

Soluzione. Ho trattato questo problema nei miei elementi di algebra a sufficienza ma in verità il metodo, a cui sono abituato, era poco adatto a trovare numeri interi. Tuttavia questa questione è più difficile, poiché occorre che siano soddisfatte sei condizioni. Allora ora mostro la seguente semplice soluzione. Presi a piacere 2 numeri m e n, tali che $mn + 1 = ll$, saranno richiesti quattro numeri:

$$\text{I. } m, \quad \text{II. } n, \quad \text{III. } m + n + 2l, \quad \text{IV. } 4l(l + m)(l + n),$$

per i quali sono soddisfatte le 6 condizioni richieste

1) $mn + 1 = ll$,

2) $m(m + n + 2l) + 1 = (l + m)^2$,

3) $n(m + n + 2l) + 1 = (l + n)^2$,

4) $4ml(l + m)(l + n) + 1 = (2ll + 2lm - 1)^2$,

5) $4nl(l + m)(l + n) + 1 = (2ll + 2ln - 1)^2$,

e infine

6) $4l(m + n + 2l)(l + m)(l + n) + 1 = (4ll + 2lm + 2ln - 1)^2$.

In verità occorre osservare che il numero l si può prendere in più modi sia positivo che negativo. Così se si prende $m = 3$ e $n = 8$, cosicché sia $mn + 1 = 25$, cioè $l = \pm 5$, il caso $l = -5$ darà questi quattro numeri

I. 3, II. 8, III. 1 e IV. 120.

Se invece si prende $l = +5$, i numeri saranno

I. 3, II. 8, III. 21 e IV. 2080.

Analisi che porta a questa soluzione

Avendo trovato molto facilmente i tre primi numeri m, n, e $m+n+2l$, si ponga il quarto $= z$, e devono essere soddisfatte queste condizioni

$$\begin{aligned} &1) \quad mz+1=\Box. \\ &2) \quad nz+1=\Box. \\ &3) \quad (m+n+2l)z+1=\Box. \end{aligned}$$

Allora anche il prodotto di queste tre formule deve essere quadrato. Svolgendo i conti si trova questo prodotto

$$1+2(m+n+l)z+((m+n+l)^2-1)zz+mn(m+n+2l)z^3=\Box,$$

la cui radice, tolti i precedenti tre membri, imponiamo essere

$$1+(m+n+l)z-\frac{1}{2}zz,$$

di cui il quadrato è

$$1+2(m+n+l)z+((m+n+l)^2-1)zz-(m+n+l)z^3+\frac{1}{4}z^4$$

da cui si ottiene questa equazione

$$\begin{aligned} & mn(m+n+2l)=-m-n-l+\frac{1}{4}z, \\ \text{ovvero} \quad & \frac{1}{4}z=m+n+l+mn(m+n+2l), \\ \text{ovvero} \quad & \frac{1}{4}z=(mn+1)(m+n+l)+lmn, \end{aligned}$$

poiché $mn + 1 = ll$, si avrà

$$ll(m + n + l) + lmn = l(ll + lm + ln + mn) = l(l + m)(l + n),$$

dal quale troviamo

$$z = 4l(l + m)(l + n).$$

Sebbene abbiamo reso quadrato anche questo prodotto di tre formule $mz + 1$, $nz + 1$, $(m + n + 2l)z + 1$, tuttavia poiché per z, quasi oltre le aspettative, si produce un numero intero, da cui queste tre formule risultano prime tra di loro, possiamo concludere che anche le singole tre formule diventano quadrate, delle quali abbiamo trovato già sopra le radici.

III.

Problema. Trovare due numeri x e y tali che la formula $\left(\frac{xx+1}{x}\right)^2 + \left(\frac{yy+1}{y}\right)^2$ sia un quadrato.

Soluzione. In primo luogo questa condizione è automaticamente soddisfatta, se si prende $y = \frac{x+1}{x-1}$, infatti risulta allora $\frac{yy+1}{y} = \frac{2(xx+1)}{xx-1}$, da cui la formula proposta si riduce in questa forma:

$$\frac{(xx+1)^2}{xx} + \frac{4(xx+1)^2}{(xx-1)^2} = \frac{(xx+1)^4}{xx(xx-1)^2},$$

che è già di per sé un quadrato. In verità poiché questa soluzione è molto speciale, allora stabiliamo di ottenerla più generale

$$y = \frac{px-1}{x+p}, \text{ da cui risulta } \frac{yy+1}{y} = \frac{(pp+1)(xx+1)}{(x+p)(px-1)},$$

per cui la nostra formula diviene

$$\frac{(xx+1)^2}{xx} + \frac{(pp+1)^2(xx+1)^2}{(x+p)^2(px-1)^2},$$

che divisa per il quadrato $(xx+1)^2$ si trasforma in questa:

$$\frac{1}{xx} + \frac{(pp+1)^2}{(x+p)^2(px-1)^2},$$

che moltiplicata per il quadrato $xx(x+p)^2(px-1)^2$ dà

$$(x+p)^2(px-1)^2 + xx(pp+1)^2.$$

Ora questa formula deve essere ridotta ad un quadrato e svolgendo i calcoli si ottiene questa :

$$ppx^4 + 2p(pp-1)x^3 + 2(p^4 - pp + 1)xx - 2p(pp-1)x + pp,$$

della quale la radice, secondo i precetti conosciuti, se si stabilisce essere:

$$pxx + (pp-1)x + p,$$

allora risulta questo valore: $x = \frac{4p}{pp-1}$, dove quindi il numero p può essere preso a piacere; allora per l'altro numero y avremo, come abbiamo assunto prima

$$y = \frac{px-1}{x+p} = \frac{3pp+1}{p(pp+3)}.$$

Quindi allora se si pone $p = 2$, risulta

$$x = \frac{8}{3} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{13}{14} \qquad \text{e} \qquad \frac{xx+1}{x} = \frac{73}{24} \qquad \text{e} \qquad \frac{yy+1}{y} = \frac{365}{182},$$

la somma dei quadrati dei quali sarà il quadrato della radice $\frac{73 \cdot 109}{2 \cdot 12 \cdot 91}$.

IV.

Problema. Trovare due numeri p e q, la cui somma sia un quadrato, e la cui somma dei quadrati sia un biquadrato.

Soluzione. Questo problema, proposto una volta da Leibniz, tanto più è degno di nota, poiché pochi numeri sono veramente grandi, dal momento che li cerchiamo positivi. Per quanto accada che questo problema sia risolto senza regola, tuttavia è opportuno che si presti attenzione a questa soluzione. Si ponga $p + q = B^2$ e $pp + qq = A^4$. Già raddoppiando la seconda equazione $2pp + 2qq = 2A^4$ e sottraendo il quadrato della prima $pp + 2pq + qq = B^4$, risulterà:

$$pp - 2pq + qq = 2A^4 - B^4, \ \text{ e cioè } \ p - q = \sqrt{2A^4 - B^4},$$

e così tutto il lavoro si riduce a mostrare quando la formula $2A^4 - B^4$ risulti un quadrato. Affinché i numeri p e q siano entrambi positivi deve risultare[3] $B > A$. Affermiamo allora

$$\sqrt{2A^4 - B^4} = yy + 2xy - xx,$$

[3]N. B. In realtà $A < B < A\sqrt[4]{2}$

che risulta se si prendono

$$A^2 = xx + yy \qquad \text{e} \qquad B^2 = xx + 2xy - yy,$$

allora di nuovo occorre che queste due formule siano riportate a quadrati. Essendo la seconda $(x+y)^2 - 2yy$, per entrambe le condizioni, imponiamo $y = 2abcd$, per la prima imponiamo $x = aabb - ccdd$, per la seconda invece $x + y = aacc + 2bbdd$, così che risulta

$$A = aabb + ccdd \qquad \text{e} \qquad B = aacc - 2bbdd.$$

Poiché tuttavia abbiamo

$$x = aabb - ccdd \qquad \text{e} \qquad y = 2abcd,$$

sarà allora

$$x + y = aabb - ccdd + 2abcd = aacc + 2bbdd,$$

da cui deduciamo

$$aa = \frac{2abcd - dd(2bb + cc)}{cc - bb},$$

da cui estraendo la radice troviamo

$$a = \frac{bcd \pm \sqrt{(bbccdd - dd(2bb + cc)(cc - bb))}}{cc - bb},$$

da cui per evoluzione risulta $\frac{a}{d} = \frac{bc \pm \sqrt{(2b^4 - c^4)}}{cc - bb}$, o per conversione $\frac{d}{a} = \frac{bc \pm \sqrt{(2b^4 - c^4)}}{2bb + cc}$. In questo modo abbiamo così ridotto la risoluzione della formula $\sqrt{2A^4 - B^4}$ alla risoluzione di una formula del tutto simile a $\sqrt{(2b^4 - c^4)}$, da cui se consta di un unico caso, per il quale tale formula non sia razionale, allora l'altro caso può essere risolto immediatamente dopo. Assumendo allora inizialmente che risulti $b = 1$ e $c = 1$, sarà $\frac{a}{d} = \frac{1 \pm 1}{0}$ ovvero dalla seconda forma $\frac{d}{a} = \frac{1 \pm 1}{3}$. Si assuma allora $\frac{d}{a} = \frac{2}{3}$, ovvero $a = 3$ e $d = 2$, e risulta $x = 5$ e $y = 12$, allora in verità $A = 13$ e $B = 1$, e questo:

$$yy + 2xy - xx = (x + y)^2 - 2xx = 239,$$

che è la radice quadrata della formula $2 \cdot 13^4 - 1$. Poiché tuttavia $B < A$, segue allora che la soluzione non è idonea. Tuttavia se troviamo questo caso facciamo ora $b = 13$ e $c = 1$, e risulta $\sqrt{(2b^4 - c^4)} = 239$, e così inoltre trovo $\frac{a}{d} = \frac{13 \pm 239}{-168}$, da cui si originano due soluzioni a causa dell'ambiguità del segno: o $\frac{a}{d} = -\frac{3}{2}$, o $\frac{a}{d} = \frac{113}{84}$. Allora dal primo caso abbiamo $a = 3$, $b = 13$, $c = 1$ e $d = -2$, da cui ricaviamo $x = 1521 - 4 = 1517$ e $y = -156$, allora $A = 1525$ e $B = -1343$. Poiché però la lettera B è sia quadrato che biquadrato, si può assumere $B = 1343$, il cui valore essendo minore di $A = 1525$, non porta alla soluzione desiderata.

Consideriamo allora il secondo caso, cioè $\frac{a}{d} = \frac{113}{84}$, da cui le nostre quattro lettere saranno $a = 113$, $b = 13$, $c = 1$ e $d = 84$, dai quali si ricavano i valori di x, y e A, B, sarà $B > A$ e da ciò quegli enormi valori per p e q risultano soddisfare il problema.

V.

Problema. Se la formula $1+Az+Bzz+Cz^3+Dz^4+etc$ fosse il prodotto dei fattori $1+\alpha z$, $1+\beta z$, $1+\gamma z$, $1+\delta z$, etc. trovare la somma delle potenze di tutte le lettere α, β, γ, δ, etc.

Soluzione. Questa somma che cerchiamo, la indichiamo così:

$$P = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}$$

$$Q = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \text{etc.}$$

$$R = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \text{etc.}$$

$$S = \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4 + \text{etc.}$$

e tutto il lavoro si riduce a trovare i valori delle lettere P, Q, R, S, etc in funzione delle lettere A, B, C, D, etc. Tuttavia conviene osservare prima di tutto che la lettera P dipende solo dalla lettera A, poiché è uguale ad essa; in più la lettera Q può dipendere al più dalle lettere A e B, poiché il prodotto di terne tra α, β, γ, δ, etc non interviene nella composizione del termine quadrato. Nello stesso modo la lettera R dipende al più dalle tre lettere A, B, C, e la lettera S dipende al più da queste quattro A, B, C, D; e così in maniera simile le seguenti.

1. Notato tutto ciò la lettera P si può trovare nello stesso modo, e se la formula fosse solo $1 + Az$ e le restanti lettere B, C, D, E si annullassero, in questo caso si ha un unico fattore, che è $1 + az$, così che risulta $P = a$. Posto già questo fattore $1 + az = 0$, ovvero $z = -\frac{1}{a}$, la stessa formula si deve annullare, perciò sarà $1 - \frac{A}{a}$, cioè $a - A = 0$, da cui si ha $a = P = A$, che è fatto notissimo.

2. Ora la lettera Q viene fuori dallo stesso valore e se la nostra formula fosse $1 + Az + Bzz$, gli altri termini si annullerebbero. Ora questa formula ha due fattori, che sono $1 + az$ e $1 + bz$, e sarà quindi $P = a + b$ e $Q = a^2 + b^2$. Sia ora $1 + az = 0$, ovvero $z = -\frac{1}{a}$, e in questo caso la nostra stessa formula si deve annullare, e risulterà:

$$1 - \frac{A}{a} + \frac{B}{a^2} = 0, \quad \text{cioè} \quad a^2 - Aa + B = 0.$$

Nello stesso modo dall'altro fattore $1 + bz$ si genera questa equazione: $b^2 - Ab + B = 0$. Si sommino queste due equazioni, e al posto di $a^2 + b^2$ si scriva Q, e al posto di $a + b$ si scriva P, viene fuori questa equazione:

$$Q - AP + 2B = 0,$$

da cui si ricava $Q = AP - 2B$.

3. Inoltre il vero valore dello stesso R si deduce dalla formula $1 + Az + Bz^2 + Cz^3$ i cui tre fattori siano

$$(1 + az)(1 + bz)(1 + cz),$$

cosicché si abbia

$$P = a + b + c, \quad Q = a^2 + b^2 + c^2 \quad \text{e} \quad \mathrm{R} = \mathrm{a}^3 + \mathrm{b}^3 + \mathrm{c}^3.$$

Uguagliamo a zero tutti questi fattori, e dal primo risulta $z = -\frac{1}{a}$, da cui la stessa formula diventerà

$$1 - \frac{A}{a} + \frac{B}{a^2} - \frac{C}{a^3} = 0, \quad \text{ovvero} \quad a^3 - Aa^2 + Ba - C = 0.$$

In maniera simile i due fattori rimanenti daranno

$$b^3 - Ab^2 + Bb - C = 0 \quad \text{e} \quad c^3 - Ac^2 + Bc - C = 0,$$

quindi le tre equazioni unite daranno

$$R - AQ + BP - 3C = 0, \quad \text{da cui} \quad R = AQ - BP + 3C.$$

4. Nello stesso modo la lettera S si deduce da questa formula

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4$$

della quale i quattro fattori siano

$$(1 + az)(1 + bz)(1 + cz)(1 + dz)$$

e quindi

$$\begin{aligned} &P = a + b + c + d, && Q = a^2 + b^2 + c^2 + d^4, \\ &R = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \qquad \text{e} && S = a^4 + b^4 + c^4 + d^4. \end{aligned}$$

Perciò se ora si eguagliano a zero i singoli fattori e si opera come prima, risultano quindi le quattro seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} a^4 - Aa^3 + Ba^2 - Ca + D &= 0, \\ b^4 - Ab^3 + Bb^2 - Cb + D &= 0, \\ c^4 - Ac^3 + Bc^2 - Cc + D &= 0, \\ d^4 - Ad^3 + Bd^2 - Cd + D &= 0, \end{aligned}$$

che aggiunte a questa formula forniscono:

$$S - AR + BQ - CP + 4D = 0,$$

$$\text{e cioè} \quad S = AR - BQ + CP - 4D.$$

Si capisce già facilmente in che modo anche le potenze superiori, cioè T, U, V, etc. si formino dalle precedenti. Scriviamo infine questi singoli valori in ordine:

$$\begin{aligned}
&P = A,\\
&Q = AP - 2B,\\
&R = AQ - BP + 3C,\\
&S = AR - BQ + CP - 4D,\\
&T = AS - BR + CQ - DP + 5E,\\
&U = AT - BS + CR - DQ + EP - 6F,\\
&\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

VI.

Problema. Trovare cinque numeri tali che i prodotti a coppie aggiunti dell'unità siano quadrati.

Soluzione. Questo problema dovrà superare l'approvazione delle proprietà dell'Analisi Diofantea, a meno che la soluzione sia resa possibile per un certo caso singolare. Ora nel primo problema abbiamo già mostrato quattro numeri di quel tipo, questi certamente interi, che soddisfano queste condizioni; allora assunti a piacere due numeri m e n così che sia $mn + 1 = ll$, si avranno questi quattro numeri:

$$a = m, \;\; b = n, \;\; c = m + n + 2l \quad \text{e} \quad d = 4l(l + m)(l + n).$$

Dunque ora la presente questione si riduce a cercare un quinto numero z, che con questi quattro soddisfi le condizioni prescritte; si richiede dunque che le seguenti quattro formule singole siano rese quadrate:

$$1 + az = \square, \;\; 1 + bz = \square, \;\; 1 + cz = \square, \;\; 1 + dz = \square,$$

tuttavia se dovessero essere soddisfatte singolarmente, presenterebbero ostacoli insuperabili. Succede invece, come nell'altro problema, che se il prodotto di queste quattro formule diviene quadrato, anche le singole formule saranno quadrati. Si moltiplichino dunque queste quattro formule reciprocamente tra di loro, e si ponga per brevità il prodotto:

$$1 + pz + qzz + rz^3 + sz^4$$

così che sia

$$\begin{array}{lcl} p = a + b + c + d, & & q = ab + ac + ad + bc + bd + cd, \\ r = abc + abd + acd + bcd & \text{e} & s = abcd. \end{array}$$

Ora si stabilisce essere la radice quadrata di questa formula

$$1 + \frac{1}{2}pz + \left(\frac{1}{2}q - \frac{1}{8}pp\right) zz,$$

in modo tale che il suo quadrato diventi

$$1 + pz + qz^2 + p\left(\frac{1}{2}q - \frac{1}{8}pp\right)z^3 + \left(\frac{1}{2}q - \frac{1}{8}pp\right)z^4,$$

dove semplificando i primi tre termini, gli altri, divisi per z^3, daranno questa uguaglianza:

$$r + sz = p\left(\frac{1}{2}q - \frac{1}{8}pp\right) + \left(\frac{1}{2}q - \frac{1}{8}pp\right)^2 z,$$

dalla quale ricaviamo il quinto numero richiesto:

$$z = \frac{r - p\left(\frac{1}{2}q - \frac{1}{8}pp\right)}{\left(\frac{1}{2}q - \frac{1}{8}pp\right)^2 - s}.$$

In verità se analizziamo con più accuratezza i quattro numeri dati, possiamo sempre trovare

$$\frac{1}{2}q - \frac{1}{8}pp = \frac{-1-s}{2},$$

da dove il denominatore della frazione ottenuta diviene

$$\left(\frac{1}{2}q - \frac{1}{8}pp\right)^2 - s = \frac{(s-1)^2}{4},$$

e così accade automaticamente che questo denominatore sia un quadrato; infatti se non accadesse ciò, le singole formule:

$$1 + az, \quad 1 + bz, \quad 1 + cz, \quad 1 + dz,$$

non possono divenire quadrati. Perciò se sostituiamo anche al denominatore questo valore al posto di $\left(\frac{1}{2}q - \frac{1}{8}pp\right)$, risulta $z = \frac{4r+2p(s+1)}{(s-1)^2}$. Ora il numero z trovato soddisfa tutte le dieci seguenti condizioni:

$$\begin{array}{llll}
\text{I.} & ab+1=\square, & \text{II.} & ac+1=\square, \\
\text{III.} & ad+1=\square, & \text{IV.} & bc+1=\square, \\
\text{V.} & bd+1=\square, & \text{VI.} & cd+1=\square, \\
\text{VII.} & az+1=\square, & \text{VIII.} & bz+1=\square, \\
\text{IX.} & cz+1=\square, & \text{X.} & dz+1=\square.
\end{array}$$

Corollario. Ora dimostriamo nel seguente modo perché $\frac{1}{2}q - \frac{1}{8}pp = \frac{-s-1}{2}$. Si ponga per brevità $m+n+l=f$ e $l(l+m)(l+n)=k$, così che risulti $k = fll + lmn$, e poiché si ha $a=m,\ b=n,\ c=f+l$ e $d=4k$, si avrà

$$a+b+c=2f, \quad \text{allora} \quad p=2f+4k:$$

poi poiché

$$q=(a+b+c)d+(a+b)c+ab,$$

risulta dunque

$$q=8fk+(m+n)^2+2l(m+n)+mn,$$

la quale espressione, essendo $mn=ll-1$, si trasforma in questa: $q=8fk+ff-1$; allora in verità sarà $s=4mnk(f+l)$ e quindi sarà

$$1+q+s=8fk+ff+4mnk(f+l),$$

che vediamo essere uguale allo stesso $\frac{1}{4}pp$. Infatti è

$$\frac{1}{4}pp=ff+4fk+4kk,$$

e questi valori uguagliati fra loro daranno

$$8fk + ff + 4mnk(f + l) = ff + 4fk + 4kk, \quad \text{ovvero} \quad 4fk + 4mnk(f + l) = 4kk,$$

la cui equazione divisa per $4k$ dà

$$f + mn(f + l) = k = fll + lmn, \quad \text{ovvero} \quad f + fmn = fll, \quad \text{e poiché } mn + 1 = ll$$

per ipotesi, segue quanto richiesto, essendo uguali le equazioni; allora $1 + q + s = \frac{1}{4}pp$ è necessariamente vera, da cui segue ciò che abbiamo assunto, $\frac{1}{2}q - \frac{1}{8}pp = \frac{-s-1}{2}$.

Esempio 1. Sommiamo $m = 1$ e $n = 3$, sarà allora $l = 2$, da cui i quattro numeri precedenti saranno $a = 1$, $b = 3$, $c = 8$, $d = 120$, allora deduciamo ciò:

$$p = 132, \quad q = 1475, \quad r = 4224 \quad \text{e} \quad s = 2880,$$

dai quali valori deduciamo:

$$z = \frac{4 \cdot 4224 + 264 \cdot 2881}{2879^2},$$

tale frazione si riduce a questa $\frac{777480}{8288641}$, e per cui le dieci condizioni prescritte sono soddisfatte nel seguente modo:

$$
\begin{array}{llll}
1) & ab + 1 = 2^2, & 2) & ac + 1 = 3^2, \\
3) & ad + 1 = 11^2, & 4) & bc + 1 = 5^2, \\
5) & bd + 1 = 19^2, & 6) & cd + 1 = 31^2, \\
7) & az + 1 = \dfrac{3011^2}{2879^2}, & 8) & bz + 1 = \dfrac{3259^2}{2879^2}, \\
9) & cz + 1 = \dfrac{3809^2}{2879^2}, & 10) & dz + 1 = \dfrac{10079^2}{2879^2}.
\end{array}
$$

Esempio 2. Poiché il numero z in questo modo risulta molto grande, svolgiamo il seguente caso in frazioni, giacché ora siamo costretti a considerare frazioni. Si assuma allora $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{5}{2}$, così che sia $l = \frac{3}{2}$, per cui i quattro numeri precedenti saranno

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{5}{2}, \quad c = 6 \quad \text{e} \quad d = 48,$$

da cui quindi deduciamo:

$$p = 57, \quad q = 451\frac{1}{4}, \quad r = 931\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad s = 360,$$

dai quali dunque si deduce:

$$z = \frac{4 \cdot 931\frac{1}{2} + 114 \cdot 361}{359^2} = \frac{44880}{359^2} = \frac{44880}{128881}.$$

i cui numeri sono molto minori dei precedenti.