Kapitel 1
Über das Variationskalkül im Allgemeinen

Leonhard Euler

Definition 1

§1 *Die Relation zwischen zwei Variablen wird gesagt variiert zu werden, wenn der Wert, mit welchem die eine daher durch die andere bestimmt wird, um einen unendlich kleinen Zuwachs vermehrt zu werden aufgefasst wird, welchen Zuwachs wir die Variation der Größe, welcher er hinzugefügt wird, nennen werden.*

Erläuterung

§2 Zuerst wird also hier irgendeine Relation zwischen den zwei Variablen x und y betrachtet, die mit irgendeiner Gleichung zwischen denselben ausgedrückt wurde und mit welcher für die einzelnen x zugeteilten Werte die entsprechenden Werte von y bestimmt werden; dann aber werden die einzelnen Werte von y mit unendlich kleinen Stücken auf irgendeine Weise vermehrt zu werden aufgefasst, sodass diese variierten Werte von den wahren, welche sie aus der vorgelegten Relation erhalten, unendlich wenig abweichen, und auf diese Weise wird die Relation zwischen x und y gesagt variiert zu werden und zugleich werden jene unendlich kleinen Stücke, die den wahren Werten von y hinzugefügt wurden, *Variationen* genannt. Besonders ist hier aber zu bemerken, dass diese Variation, mit denen diese einzelnen Werte von y vermehrt zu werden aufgefasst werden, weder einander gleich festgelegt werden noch auf irgendeine andere Weise voneinander abhängig sind, sondern so unserem Belieben überlassen werden, dass alle außer einem oder einige, die gewissen Werten von y entsprechen, sich als keine betrachten lassen. Diese Variationen sind natürlich keinem Gesetz unterworfen aufzufassen und die zwischen x und y gegebene Relation ist auch anzusehen keine Bestimmung in diese Variationen einzubringen, welche als vollkommen beliebig betrachtet werden müssen.

KOROLLAR 1

§3 Daher ist klar, dass Variationen sich in der ganzen Natur von Differentialen unterscheiden, auch wenn beide unendlich klein sind und daher natürlich verschwinden; denn die Variation betrifft denselben Wert von y, der dem Wert von x entspricht, während sein Differential $\mathrm{d}y$ zugleich den unmittelbar folgenden Wert $x + \mathrm{d}x$ mit einbezieht.

KOROLLAR 2

§4 Wenn nämlich aus der zwischen x und y vorgelegten Relation y einem x entspricht, der $x + \mathrm{d}x$ entsprechende Wert von y aber y' gesetzt wird, dann ist $\mathrm{d}y = y' - y$; aber diese Variation von y hängt in keinster Weise vom folgenden Wert y' ab, ja es lässt sich sogar jedem der beiden y und y' nach Belieben seine Variation jeweils einzeln zuteilen.

BEMERKUNG

§5 Diese Idee der Variationen, die an sich so zu diffus wie unfruchtbar erscheinen kann, wird besonders gut illustriert werden, wenn wir ihre Entstehung und wie zu dieser gelangt worden ist erläutert haben werden. Es hat aber dorthin hauptsächlich die Frage über das Finden von Kurven hingeführt, die mit einer gewissen Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehen sind, woher, damit nicht beim Betrachten der Sache im Allgemeinen eine Unklarheit angetroffen wird, wir das Problem betrachten wollen, in welchem die gekrümmte Linie verlangt wird, über welcher ein schwerer herabgleitender Körper von einem gegebenen Punkt aus am schnellsten zu einem anderen gegebenem Punkt herabsinkt. Und hier ist freilich aus der Natur der

Maxima und der Minima sofort klar, dass die Kurve so beschaffen sein muss, dass, wenn an ihrer Stelle irgendeine andere sich unendlich wenig von jener unterscheidende Kurve eingesetzt wird, die Zeit des Herabsinkens über ihr vollkommen dieselbe sein wird. Die Lösung muss also so gegeben werden, dass, während die gesuchte Kurve als gegeben betrachtet wird, die Rechnung auch auf die andere von ihr nur unendlich wenig abweichende Kurve angewendet wird und daher der Unterschied, welcher sich auf den Ausdruck der Zeit niederschlägt, berechnet wird; dann nämlich wird dieser Unterschied selbst gleich Null gesetzt die Natur der gesuchten Kurve aufzeigen. Diese unendlich wenig von der gesuchten abweichenden Kurven werden am besten so betrachtet, dass die Ordinaten, die den einzelnen Abszissen entsprechen, um unendlich kleine Stücke entweder vermehrt oder vermindert werden, das heißt, wie *Variationen* zu erhalten aufgefasst werden. Für gewöhnlich genügt es freilich, eine Variation dieser Art bei einer einzigen Ordinate festgelegt zu haben; nichts hindert aber daran, dass mehreren und sogar allen Ordinaten solche Variationen zugeteilt werden, weil es nötig ist, dass man immer auf dieselbe Lösung geführt wird. Aber auf diese Weise wird nicht nur das Vermögen dieser Methode vorzüglicher aufgezeigt, sondern daher werden auch vollständigere und reichhaltigere Lösungen von Fragen dieser Art erhalten, woher es möglich ist, auch Fragen, die sich auf andere Bedingungen beziehen, zu beantworten. Dieses Grundes wegen scheint es ganz und gar notwendig, dass das Variationskalkül in der weitesten Ausdehnung, der es freilich fassungsfähig ist, behandelt wird.

Definition 2

§6 *Für eine gegebene Relation zwischen zwei variablen Größen wird jede der beiden derselben gesagt variiert zu werden, wenn jede der beiden einzeln um einen unendlich kleinen Zuwachs vermehrt zu werden aufgefasst wird; daher ist klar, wie es zu verstehen ist, wenn jeder der beiden ihre Variation zugeteilt wird.*

Erläuterung

§7 Wenn irgendeine Gleichung zwischen den zwei Variablen x und y vorgelegt ist, mit welcher deren gegenseitige Relation ausgedrückt wird, kann diese Relation nach Definition auf zweifache Weise variiert werden, auf die eine, indem, während die Werte von x dieselben bleiben, den einzelnen y eine Variation zugeteilt wird, auf die andere aber, indem, während die Werte von y dieselben bleiben, die einzelnen x variiert zu werden aufgefasst werden. Nichts verbietet es also, dass jede der beiden Variablen zugleich ihre Variationen zu erhalten verstanden wird, welche sich sogar so annehmen lassen, dass sie ohne irgendeinen Zusammenhang miteinander zusammenhängen; hier wird also eine zweifache Variation betrachtet, obwohl in der ersten Definition nur eine zugelassen worden ist. Wir betrachten aber diese Sache hier so allgemein, damit keine der beiden Variationen einem Gesetz unterworfen ist und auch die Variationen von y auf keine Weise von den Variationen von x abhängen.

KOROLLAR 1

§8 Aus dem Fall, in welchem eine zweifache Variation festgelegt wird, entspringt also der erste Fall als Gattung, wenn die Variationen der anderen Variable vollkommen vernachlässigt werden; daher ist es offenkundig, dass der Fall der zweiten Definition den Fall der ersten in sich umfasst.

KOROLLAR 2

§9 Daher zeigt sich umso mehr, wie eine gegebene Relation zwischen zwei Variablen auf unendlich viele Weisen variiert werden kann, und zugleich wird eingesehen, weil wir ja diese Variationen als keinem Gesetz unterworfen annehmen, dass ganz und gar alle möglichen Variationen jener Relation auf diese Weise angezeigt werden.

BEMERKUNG 1

§10 Zwar erfassen nur die der einen der beiden Variablen aufgeprägten Variationen schon alle möglichen Variationen, die der vorgelegten Relation zwischen den zwei Variablen zukommen können, sodass es überflüssig erscheinen kann, dass das Kalkül auf eine zweifache Variation angewendet wird; aber wenn wir die natürliche Beschaffenheit der Sache und den Gebrauch, mit welcher er verknüpft ist, aufmerksamer erwägen, wird die Betrachtung der doppelten Variation keinesfalls als überflüssig festgestellt werden, was durch die Geometrie am offenkundigsten auf folgende Weise illustriert werden wird.

Weil irgendeine Relation zwischen zwei Variablen am genauesten durch eine in der Ebene beschriebene gekrümmte Linie dargestellt wird, sei AYM (Fig. 1) die gekrümmte Linie, die mit einer Gleichung zwischen den Koordinaten $AX = x$ und $XY = y$ bestimmt wurde und die also jene gegebene Relation darbiete;

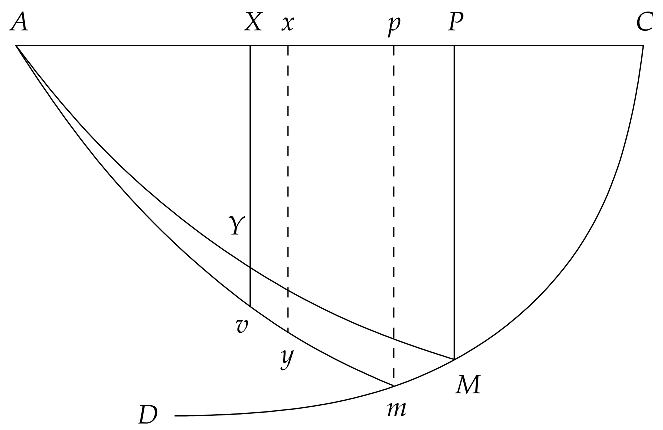

Fig. 1

nun wird also jede beliebige von jener nur unendlich wenig abweichende andere gekrümmte Linie Aym jene variierte Relation darstellen, die, wie auch immer sie sich verhält, immer so betrachtet werden kann, dass derselben Abszisse $AX = x$ die variierte Ordinate Xv entspricht, während das Stück Yv ihre Variation ist; diese Betrachtung genügt auch für die meisten über Maxima und Minima vorgelegten Fragen, wo sogar die Kurve AM in nur einigen Elementen variiert zu werden aufgefasst zu werden pflegt. Aber wenn die Frage so beschaffen ist, dass unter allen Kurven, welche sich vom gegebenen Punkt A aus bis hin zu einer gewissen gegebenen Kurve CD zeichnen lassen, die durch AYM bestimmt wird, welcher eine gewisse Eigenschaft des Maximums oder Minimums entspricht, dann muss dieselbe Eigenschaft auch irgendeiner anderen sehr nahen Kurven Aym, die auch in einem anderen Punkt m der Linie CD begrenzt wurde, gleichermaßen zufallen und so ist für den letzten Punkt M der gesuchten Kurve so diese Abszisse AP wie die

Ordinate PM eine Variation zu erhalten anzusehen und freilich von dieser Art, die der Natur der Linie CD verträglich ist. Damit also das Kalkül auf eine solche dem letzten Element aufgeprägten Variation angewendet werden kann, ist es ganz und gar notwendig, dass für die einzelnen Zwischenpunkte der Kurve AM vollkommen allgemein so der Abszisse $AX = x$ wie der Ordinate $XY = y$ irgendwelche Variationen zugeteilt werden und die Variation jener als das Stück Xx, von dieser aber gleich $xy - XY$ festgelegt wird, woher die Gestalt und zugleich der Gebrauch einer doppelten Variation von dieser Art sehr deutlich erkannt wird.

Bemerkung 2

§11 Wie diese Betrachtung des letzten Punktes der zu untersuchenden und zu findenden Kurve uns diese riesige Erleuchtung verschafft hat, so muss auch von da aus dem ersten Punkt eine Variation zugeteilt werden. Wie wenn beispielsweise unter allen Linien, welche sich von einer gewissen gegebenen Kurve AB (Fig. 2) zu einer gewissen ebenso gegebenen CD gezogen auffassen lassen, die zu suchen ist, die mit der Eigenschaft eines gewissen Maximums oder Minimums versehen ist, dann wird es um vieles mehr notwendig sein, dass so den einzelnen Abszissen AX wie den Ordinaten XY irgendwelche keinem Gesetz unterworfenen Variationen in der Rechnung angegeben werden, sodass sie darauf so auf die Variation des Anfangs G der gesuchten Kurve wie ihr Ende M übertragen werden können.

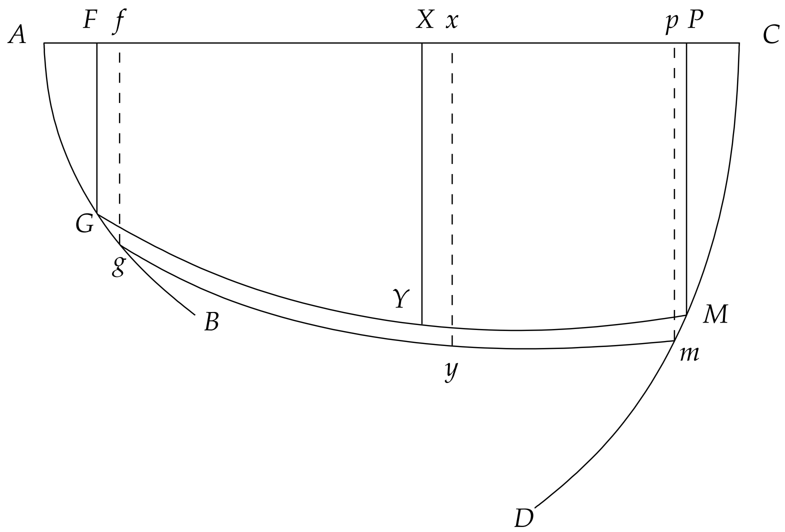

Fig. 2

Obwohl aber diese Illustration aus der Geometrie entnommen worden ist, wird dennoch leicht eingesehen, dass die daher hergeholte Idee der Variationen sich um vieles weiter erstreckt und in der davon losgelösten Analysis vom größten Nutzen nicht frei sein wird. Aber der hochgeehrte Lagrange, der scharfsinnigste Geometer Turins, welchem wir die ersten Entdeckungen, die über dieses Kalkül erhalten wurden, zuschreiben müssen, hat diese Methode auf höchst brillante Weise sogar auf nicht stetige Linien übertragen wie z. B. auf zur Art der Polygone zu zählende, bei welcher Aufgabe diese zweifachen Variationen selbigem sehr großen Nutzen geleistet haben.

Definition 3

§12 *Eine Relation zwischen drei Variablen, mit zwei Gleichungen bestimmt, wird gesagt variiert zu werden, wenn von selbigen entweder eine oder zwei oder gar alle diese um unendlich kleine Stücke vermehrt werden, die deren Variationen genannt werden.*

Erläuterung

§13 Weil drei variable Größen vorgelegt werden wie beispielsweise x, y und z, zwischen welchen zwei Gleichungen gegeben zu sein aufgefasst werden, lassen sich aus irgendeiner derer die zwei übrigen bestimmen, sodass so y wie z als Funktion von x betrachtet werden kann. Auf diese Weise aber pflegt eine gekrümmte Linie bestimmt zu werden, die nicht in derselben Ebene beschrieben wurde, während ihre einzelnen Punkte durch diese drei Koordinaten x, y und z auf gewohnte Weise angegeben werden. Wenn daher nun eine solche Kurve von einer an ihr sehr nahen begleitet wird, dass die Differenz unendlich klein ist, wird diese neue Kurve die variierte der vorgelegten sein und jene variierte Relation zwischen den drei Variablen x, y, z ist aufzufassen ihre Natur auszudrücken. Daher, je nachdem wie die zwei sehr nahen Punkte, der eine auf der vorgelegten Kurve selbst, der andere in der variierten Begleitkurve angenommen, miteinander verglichen werden, kann es geschehen, dass für die variierte entweder alle drei Koordinaten voneinander verschieden hervorgehen oder nur zwei oder zumindest eine, und deren Differenzen von den anfänglichen Koordinaten der Kurve werden deren Variationen darstellen; dass diese Dinge hier aber derart allgemein betrachtet werden, ist gefällig, weil sie auf ganz und gar alle sehr nahen Kurven ausgedehnt werden, ob sie in ihrem ganzen Verlauf von der vorgelegten Kurve verschieden waren oder nur in gewissen Anteilen von ihr abweichen, sodass auch nicht stetige Linien, solange sie der grundlegenden sehr nahe sind, davon nicht ausgeschlossen werden. Denn diese variierten Kurven sind keinem einzigen Gesetz der Fortsetzung zu unterwerfen, dass sie ganz und gar alle möglichen von der grundlegenden unendlich wenig abweichenden Kurven in sich umfassen.

Korollar 1

§14 Es wird also ein gewisser Punkt der variierten Kurve mit irgendeinem Punkt der vorgelegten oder anfänglichen Kurve verglichen, der unendlich wenig von jenem entfernt gelegen ist, und daher werden die Variationen der Koordinaten bestimmt zu werden verstanden.

KOROLLAR 2

§15 Weil weiter aus einer angenommenen Variable x die zwei übrigen y und z und daher ein Punkt der vorgelegten Kurve bestimmt wird, lassen sich auch die Variationen der einzelnen Variationen als Funktionen von x betrachten, solange deren Größe als unendlich klein betrachtet wird.

KOROLLAR 3

§16 Es lassen sich also irgendwelche zwei wie sehr auch immer voneinander verschiedene Funktionen von x auffassen, die mit unendlich kleinen Faktoren multipliziert geeignet sein werden um drei Variationen von Koordinaten darzustellen. Dieses selbe ist auch über drei irgendwelche Variablen festzuhalten, auch wenn sie nicht zur Geometrie gerechnet werden.

KOROLLAR 4

§17 Auf die gleiche Weise, wenn eine Relation zwischen nur zwei Variablen vorgelegt wird, können deren Variationen als Funktionen der einen Variable betrachtet werden, seien sie nur unendlich klein oder, was auf dasselbe hinausläuft, mit einer unendlich kleinen Größe multipliziert.

BEMERKUNG 1

§18 Aber die geometrische Betrachtung ist in höchstem Maße geeignet um diese Entdeckungen zu illustrieren, die im Allgemeinen betrachtet zu abstrakt und auch zu schlüpfrig erscheinen können. Der Fall dreier Variablen also, deren Relation mit zwei Gleichungen bestimmt zu werden angenommen wird, wird am vortrefflichsten durch eine nicht in derselben Ebene beschriebene Kurve erklärt, während mit jenen Variablen die drei Koordinaten bezeichnet werden. Wenn daher nämlich über Kurven von dieser Art die Frage gestellt wird, dass unter ihnen die bestimmt wird, die mit einer gewissen Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehen ist, ist es von Nöten, dass dieselbe Eigenschaft allen anderen von ihre unendlich wenig abweichenden Kurven gleichermaßen zufällt, was aus den entsprechend in die Rechnung eingeführten Variationen zu beurteilen ist. Was für einen Nutzen aber die höchste hier in den Variationen festgelegte Allgemeinheit haben wird, lässt sich daher einsehen, wenn anstelle der zwei Kurven AB und CD (Fig. 2) irgendwelche zwei Oberflächen gegeben sind, von jener von welchen beiden aus zu dieser eine gekrümmte Linie solcher Art gezogen werden muss, die sich einer gewissen Eigenschaft des Maximums oder Minimums erfreut. Dann müssen nämlich so allgemeine Variationen der drei Koordinaten betrachtet werden, dass die Variationen der gesuchten Kurve, nachdem der Punkt zum Anfang zur Oberfläche AB hin verschoben wurde, dort an dieselbe Oberfläche angepasst werden können und das auf die gleiche Weise am Ende zur Oberfläche CD geschehen kann. Daher ist es ersichtlich, dass im Allgemeinen drei Variationen in die Rechnung eingeführt werden müssen, dass sie sich so für den Anfang wie für das Ende der zu findenden Kurve auf die begrenzenden Oberflächen übertragen lassen, deren Gestalt natürlich in jeder der beiden Grenzen eine gegenseitige Relation zwischen den Variationen bestimmen wird.

Bemerkung 2

§19 So wie wir diese drei Variablen betrachtet haben, deren Relation mit zwei Gleichungen bestimmt wird, so kann die Rechnung der Variablen auch auf vier oder mehr Variablen ausgedehnt werden, wenn freilich die Relation durch so viele Gleichungen ausgedrückt wird, dass durch eine einzige Variable alle übrigen ihre Bestimmung erhalten, auch wenn die Illustration dieses Falles nicht weiter aus der Geometrie, die von nur drei Dimensionen eingeschlossen wird, hergeholt werden kann, außer wenn wir vielleicht die Zeit zur Hilfe nehmen wollen, einen stetigen Fluss von der Oberfläche AB zur Oberfläche CD fließend, aber dennoch den Verlauf der Zeit ununterbrochen unverändert betrachten, sodass dann auch das Momentum der Zeit anzugeben ist, in welchem eine gewisse Ader des Flusses, sich von der Oberfläche AB zur Oberfläche CD bewegend, mit einer gewissen Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehen ist. Wenn wir zu diesen Variablen darüber hinaus die Veränderlichkeit der Geschwindigkeit hinzufügen, werden diese zum Illustrieren einer größeren Anzahl der Variationen dienen können. Besonders wird aber daher eingesehen, auch wenn alle Variablen durch eine einzige bestimmt zu werden angenommen werden, dass die Art der Untersuchung dennoch von der, wo nur zwei Variablen zugelassen werden, in höchstem Maße abweicht, deshalb weil den einen ihre von den übrigen nicht abhängenden Variationen zugeteilt werden müssen; denn daher sind auch nicht, was zwischen der Variablen selbst als eine gewisse Relation erkannt wird, deren Variationen einer Relation unterworfen anzusehen; wie beispielsweise aus dem zuvor erwähnten Fall klar ist, wo die Kurve, sich zwischen den zwei Oberflächen AB und CD ausbreitend und mit einer gewissen Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehen natürlich in sich bestimmt ist, sodass nach Annahme einer der Koordinaten die zwei übrigen bestimmt werden; nichtsdestoweniger erhalten alle variierten Kurven, die sich in alle Richtungen von jener entfernen können, für die einzelnen Koordinaten keineswegs voneinander abhängende Variationen, nachdem allein der Anfang und das Ende davon ausgeschlossen wurde, wo sie auch an gegebene Oberflächen angepasst werden müssen.

DEFINITION 4

§20 *Eine Relation zwischen drei Variablen, mit einer einzigen Gleichung bestimmt, eine derer einer Funktion der zwei übrigen gleich wird, wird gesagt variiert zu werden, wenn entweder eine oder zwei oder gar alle drei jene Variablen um unendlich kleine Stücke vermehrt werden, die deren Variationen genannt werden.*

ERLÄUTERUNG

§21 Weil ja hier eine Variation zwischen drei Variablen mit einer einzigen Gleichung bestimmt zu werden festgelegt wird, wird erst nach Annahme zweier nach Belieben die dritte bestimmt werden, sodass sie für eine Funktion von zwei Variablen zu halten ist. Mit dieser Relation wird also nicht eine gewisse gekrümmte Linie, wenn wir die Sache auf Figuren übertragen wollen, beschrieben, sondern eine ganz bestimmte Oberfläche, deren Natur mit einer Gleichung zwischen drei verschiedenen Koordinaten ausgedrückt wird; daher wird eingesehen, dass nach Variieren derselben Relation, eine andere von jener unendlich wenig abweichende Oberfläche dargestellt wird, welche Variation sich so sehr weit erstrecken muss, dass die Variation entweder nur auf einen gewissen Anteil der Oberfläche beschränkt wird oder durch die ganze hindurch erstreckt werden kann. Je nachdem mit welchem Punkt der gegebenen Oberfläche also ein anderer jener anderen variierten Oberfläche freilich sehr naher Punkt verglichen wird, kann es geschehen, dass von den drei Koordinaten nicht nur eine, sondern auch zwei oder gar alle drei variiert werden; daher, damit die Behandlung in ihrer ganzen Weite illustriert wird, wird es gefällig sein, dass den einzelnen Koordinaten sofort ihre Variationen zugeteilt werden, welche deshalb so beschaffen sein müssen, dass sie als Funktionen von zwei Variablen betrachtet werden können, weil erst nach der Bestimmung von zweien ein Punkt der Oberfläche bestimmt wird.

Korollar 1

§22 Wenn also die drei Variablen oder die drei Koordinaten x, y und z sind, wie sich aus der Relation den zweien x und y nach Belieben zuteilen lassen, woher dann auch z einen bestimmten Wert erhält, so ist die Variation von z von jeden der beiden jener x und y abzuhängen anzusehen, weil ja, ob die eine der beiden oder beide verändert werden, eine andere Variation von z resultieren muss.

Korollar 2

§23 Was hier über die Variation der einen Variable z bemerkt wurde, ist genauso über die zwei übrigen zu verstehen, sodass die Variationen der einzelnen als Funktionen von zwei Variablen anzusehen sind; weil ja aber zwischen x und y und z eine Gleichung gegeben ist, ist es egal, von welchen zweien die besagten Funktionen aufgefasst werden, weil die Funktion von y und z durch die Gleichung auf eine Funktion von x und y zurückgeführt werden kann, wenn natürlich anstelle von z sein durch x und y ausgedrückter Wert eingesetzt wird.

Bemerkung 1

§24 Diese Festlegung der Variationen wird zu gebrauchen sein, wenn eine Oberfläche zu finden war, die mit einer gewissen Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehen ist, weil ja die Rechnung so bereitet werden muss, dass dieselbe Eigenschaft allen jener sehr nahen und variierten Oberfläche gleichermaßen zufällt. Weil des Weiteren in mit der Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehenen Kurven das Verhältnis der beiden Grenzen vorgeschrieben zu werden pflegt, dass sie entweder in gegebenen Punkten oder zu gegebenen gekrümmten Linien oder gar Oberflächen hin begrenzt werden, ist hier eine ähnliche Bedingung zuzulassen, dass die zu suchende Oberfläche überall bestimmt wird oder von einer gewissen gegebenen Oberfläche begrenzt wird; damit diesen letzten Bedingungen Rechnung getragen werden kann, ist es ganz und gar notwendig, dass allen drei Koordinaten allgemeinste voneinander in keinster Weise abhängende Variationen zugeteilt werden, damit sie darauf an äußerster Stelle an die Natur der begrenzenden Oberfläche angepasst werden können. Hier ist freilich zu gestehen, dass die Methode der Maxima und Minima bis jetzt kaum zu Untersuchungen dieser Art vorwärts bewegt wurde und große Schwierigkeiten auftauchen, um welche zu überkommen, um vieles größere Zuwächse der Analysis verlangt zu werden scheinen. Aber dieses Grundes wegen wird sich umso mehr zu bemühen sein, dass die Grundlagen dieser Methode, die im Variationskalkül enthalten sind, streng aufgestellt werden und zugleich klar und deutlich vorgelegt werden.

Bemerkung 2

§25 Ich halte es kaum von Nöten hier anzumerken, dass dieses Kalkül auf gleiche Weise auf mehr als drei Variablen ausgedehnt werden kann, auch wenn geometrische Fragen nicht weiter eine Erklärung liefern; denn die Analysis selbst ist nicht wie die Geometrie durch eine gewisse Anzahl an Dimensionen begrenzt zu werden anzusehen. Wann immer aber mehrere Variablen betrachtet werden, sollte vor allem erwägt werden, ob deren gegenseitige Relation mit nur einer einzigen Gleichung oder mit mehreren ausgedrückt wird; diese können so viele sein, die der Menge nur um die Einheit von der Anzahl der Variablen abweicht, in welchem Fall sich alle als Funktionen einer Variablen betrachten lassen. Wenn aber die Relation aus weniger Gleichungen besteht, werden die einzelnen Variablen Funktionen zweier oder mehrerer sein und in einem beliebigen Fall müssen auch die den einzelnen zugeteilten Variationen als Funktionen genauso vieler Variablen betrachtet werden, wenn wir freilich diese Rechnung sehr allgemein erledigen wollen.

Definition 5

§26 *Das Variationskalkül ist die Methode die Variation zu finden, welche ein aus wie vielen Variablen wie auch immer zusammengesetzter Ausdruck erhält, während den Variablen, entweder allen oder einigen, Variationen zugeteilt werden.*

Erläuterung

§27 In dieser Definition geschieht keine Erwähnung der Relation, welche wir bisher zwischen den Variablen gegeben zu sein angenommen haben; weil nämlich dieses Kalkül hauptsächlich im Finden dieser Relation selbst gelegen ist, die natürlich mit der Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehen sein soll, lässt sich ihr im Kalkül keinesfalls Rechnung tragen, sondern es muss eher so behandelt werden, als wenn die Variablen mit keiner Relation miteinander verbunden wären. Dieses Kalkül muss also so aufgebaut werden, dass, wenn den einzelnen Variablen, die in die Rechnung eingehen, irgendwelche Variationen zugeteilt werden, die daher abstammenden Variationen Ausdrücke jeder Art, die irgendwie aus diesen zusammengesetzt wurden, gefunden zu werden gelehrt werden; nachdem diese im Allgemeinen gefunden wurden, tauchen erst dann zu entwickelnde Fragen solcher Art auf, was für eine Relation zwischen den Variablen festgelegt werden muss, dass jene gefundene Variation entweder keine ist, wie es bei der Untersuchung der Maxima und Minima passiert, oder auf eine andere gewisse Art beschaffen ist, je nachdem was die Natur der Fragen verlangt. Wenn auf diese Weise die Vorschriften des Kalküls angegeben werden, steht nichts im Wege, dass auch Fragen solcher Art behandelt werden, in denen sofort eine gewisse Relation zwischen den Variablen als gegeben angenommen wird und die aus den Variationen der Variablen entstandene Variation eines gewissen aus ihnen gebildeten Ausdruckes verlangt wird. Daher wird eingesehen, dass dieses Kalkül auf sehr viele Fragen verschiedenster Art angewendet werden kann.

Korollar 1

§28 In diesem Kalkül zu behandelnde Fragen gehen also darauf zurück, dass nach Vorlegen irgendeines aus wie vielen Variablen auch immer irgendwie zusammengesetzten Ausdruckes sein Zuwachs bestimmt wird, wenn die einzelnen Variablen um ihre Variationen vermehrt werden.

Korollar 2

§29 Das Variationskalkül ist dem Differentialkalkül vollkommen ähnlich, während in jedem von beiden den Variablen unendlich kleine Zuwächse zugeteilt werden. Wie aber, wie wir schon bemerkt haben [§3, 4], die Variationen von Differentiationen abweichen und daher zugleich mit ihnen bestehen können, so ist der größte Unterschied zwischen jedem der beiden Kalküle dennoch anzuerkennen.

Bemerkung

§30 Aus den oben erwähnten Bemerkungen wird dieser Unterschied besonders klar; sobald nämlich das Kalkül auf eine gekrümmte Linie übertragen wird, die mit einer anderen ihr sehr nahen verglichen werden muss, schreiten wir durch die Differentiale hindurch von einem Punkt der Kurve aus zu anderen Punkten derselben Kurve fort; wann immer aber wir von dieser Kurve zu einer anderen ihr sehr nahen hinüber springen, geschieht der Übergang, sofern er unendlich klein ist, durch Variationen. Dasselbe geschieht bei auf anderen ihr sehr nahe bezogenen Oberflächen, wo die Differentiale in derselben Oberfläche aufgefasst werden, bei den Variationen hingegen von der einen zu einer anderen hinüber gesprungen wird. Die Begründung ist ganz und gar dieselbe, wenn die Sache analytisch betrachtet wird, ohne Beachtung auf die geometrische Figuren, wo immer die Variationen variabler Größen von ihren Differentialen sorgsam unterschieden werden müssen, für welches Ziel es gefällig sein wird, dass die Variationen mit einem verschiedenen Symbol gekennzeichnet werden.

Annahme

§31 *Wir werden im Nachfolgenden die Variation einer gewissen variablen Größe mit dem derselben Größe vorangestellten Buchstaben δ bezeichnen, sodass δx, δy, δz die Variationen der Größen x, y, z bezeichnen, und wenn V irgendein aus ihnen* *zusammengesetzter Ausdruck war, wird seine Variation von uns auf diese Weise δV gekennzeichnet werden.*

KOROLLAR 1

§32 Es bezeichnet also δx jenen unendlich kleinen Zuwachs, um welchen die Größe x vermehrt zu werden aufgefasst wird, sodass der variierte Wert desselben hervorgeht, aus welchem umgekehrt eingesehen wird, dass $x + \delta x$ der variierte Wert von x sein wird.

KOROLLAR 2

§33 Sofern also der Ausdruck V aus den Variablen x, y und z zusammengesetzt ist, wenn an deren Stelle die variierten Werte $x + \delta x$, $y + \delta y$ und $z + \delta z$ geschrieben werden und vom auf diese Weise für V resultierenden Wert V selbst subtrahiert wird, wird der Rest die Variation δV sein.

KOROLLAR 3

§34 Bisher verhält sich also alles genauso wie im Differentialkalkül, und wenn V irgendeine Funktion von x, y und z war, werde, nachdem ihre Differentiale auf gewohnte Weise genommen wurde, nur δ anstelle von d geschrieben und man wird ihre Variation δV haben.

BEMERKUNG 1

§35 Sooft also V irgendeine Funktion der variablen Größen x, y, z ist, wird ihre Variation daher nach denselben Regeln gefunden wie ihr Differential, woher das Variationskalkül vollkommen mit dem Differentialkalkül übereinstimmend erscheinen könnte, weil die Verschiedenheit des Zeichens von allzu geringer Bedeutung ist. Aber es ist genau darauf zu achten, dass hier nicht alle Größen, deren Variationen verlangt wurden, im Geschlecht der Funktionen erfasst werden können; deswegen habe ich auch in der Definition [§26] das Wort *Ausdruck* benutzt, welchem ich eine weit umfassendere Bedeutung attestiere. Wie sich nämlich nicht auf die gegenseitige Relation der Variablen blicken lässt, weil sie unbekannt ist, so werden Ausdrücke solcher Art oder Formeln, in welchen Differentiale der Variablen und auch Integrale eingehen, nicht weiter lediglich als Funktionen von Variablen betrachtet werden können und die Variation von Formeln, sowohl von Differentialen als auch von Integralen, erfordert spezielle Vorschriften; und so geht die ganze Aufgabe darauf zurück, dass wir lehren, wie die Variationen von Formeln jeder der beiden Arten gefunden werden muss, woher unser Traktat zweiteilig wird.

BEMERKUNG 2

§36 Aber im Traktat selbst entsteht der größte Unterschied aus der Anzahl der Variablen, wenn welche die zwei übersteigen, kaum erkannt wird, wie dieses Kalkül zu erledigen ist. Weil nämlich nach Einführen mehrerer Variablen auch die Betrachtung der Differentiale weit anders ausgedehnt wird, während meistens Differentiale von nur zwei Variablen so miteinander verglichen zu werden pflegen, als wenn die übrigen Variablen konstant blieben, wird auch bei den Variationen eine ähnliche Methode zu verwenden sein, wobei immer noch so große Schwierigkeiten auftauchen, dass es kaum klar ist, wie sie sich überkommen lassen; vor allem aber wird es gewiss nötig sein, dass die ersten Grundlagen dieses Kalküls entwickelt werden, sodass aus der tiefen Natur der Sache die Vorschriften des Kalküls hergeholt werden, worin meistens die größten Schwierigkeiten aufgefunden zu werden pflegen. Zuerst also werde ich versuchen dieses Kalkül auf nur zwei Variablen angewandt, wie es freilich bis jetzt behandelt zu werden pflegte, zu erklären, der ich dabei die Variationen von Differential- wie Integralformeln finden werde; dann aber, wenn etwas Licht aus dieser Behandlung selbst auf die Sache geworfen wurde, werde ich auch dazu fortschreiten, drei oder mehrere Variablen zu betrachten.

Kapitel 2
Über die Variation zwei Variablen involvierender Differentialformeln

Leonhard Euler

Theorem 1

§37 *Die Variation eines Differentials ist immer gleich dem Differential der Variation oder es ist* $\delta \mathrm{d}V = \mathrm{d}\delta V$, *was für eine Größe auch immer* V *war, die, während sie durch die Differentiale wächst, auch eine Variation erhält.*

Beweis

Die variable Größe V kann als Ordinate einer gewissen Kurve betrachtet werden, die bei ihren Differentialen durch die selbe Kurve hindurch fortschreitet, in ihren Variationen hingegen auf eine andere jener sehr nahe Kurve überspringt. Während sie aber zum nächsten Punkt derselben Kurve vorwärts bewegt wird, wird ihr Wert gleich $V + \mathrm{d}V$, der gleich V' sei, und daher ist dann $\mathrm{d}V = V' - V$; aber aus der Variation von $\mathrm{d}V$, das heißt $\delta \mathrm{d}V$, wird gleich $\delta V' - \delta V$ sein. Aber $\delta V'$ ist der nächste Wert, in welchen δV um sein Differential vermehrt übergeht, sodass $\delta V' = \delta V + \mathrm{d}\delta V$ oder $\delta V' - \delta V = \mathrm{d}\delta V$ ist, woher ersichtlich ist, dass $\delta \mathrm{d}V = \mathrm{d}\delta V$ sein wird oder die Variation des Differentials gleich dem Differential der Variation ist, genauso wie das Theorem versichert.

KOROLLAR 1

§38 Daher wird die Variation des zweiten Differentials $\mathrm{dd}V$ so bestimmt, dass gilt
$$\delta \mathrm{dd}V = \mathrm{d}\delta.\mathrm{d}V,$$
aber weil $\delta \mathrm{d}V = \mathrm{d}\delta V$ ist, wird Gleichheit zwischen diesen Formeln bestehen
$$\delta \mathrm{dd}V = \mathrm{d}\delta \mathrm{d}V = \mathrm{dd}\delta V.$$

KOROLLAR 2

§39 Auf die gleiche Weise wird für die Differentiale dritter Ordnung gelten
$$\delta \mathrm{d}^3 V = \mathrm{d}\delta \mathrm{dd}V = \mathrm{dd}\delta \mathrm{d}V = \mathrm{d}^3\delta V,$$
und für Differentiale vierter Ordnung wird sich die Variation so verhalten, dass gilt
$$\delta \mathrm{d}^4 V = \mathrm{d}\delta \mathrm{d}^3 V = \mathrm{dd}\delta \mathrm{dd}V = \mathrm{d}^3\delta \mathrm{d}V = \mathrm{d}^4\delta V,$$
und auf die gleiche Weise für höhere Grade.

KOROLLAR 3

§40 Wenn also die Variation eines Differentials irgendeines Grades verlangt wird, kann das Zeichen der Variation δ, wo auch immer es beliebt, zwischen die Differentiationszeichen d eingefügt werden; aber an die letzte Stelle gesetzt zeigt es auf, dass die Variation des Differentials eines gewissen Grades gleich dem Differential desselben Grades der Variation selbst ist.

KOROLLAR 4

§41 Weil also $\delta \mathrm{d}^n V = \mathrm{d}^n \delta V$ ist, wird die Sache immer darauf zurückgeführt, das Differentiale jeden Grades der Variation der Größe V oder von δV genommen werden können, und in dieser besonderen Reduktion ist das Vermögen dieses neuen Kalküls festzulegen.

§42 Die Kraft dieses Beweises besteht hauptsächlich darin, dass δV in $\delta V'$ übergeht, wenn V um sein Differential wächst, was freilich aus der Natur der Differentiale per se klar ist; dennoch wird es wiederum förderlich sein, es durch die Geometrie illustriert zu haben. Für irgendeine Kurve EF (Fig. 3) seien die Koordinaten $AX = x$ und $XY = y$; wenn wir auf dieser durch das unendlich kleine Intervall YY' hindurch fortschreiten, wird in den Differentialen gelten

$$AX' = x + \mathrm{d}x \quad \text{und} \quad X'Y' = y + \mathrm{d}y$$

und daher

$$\mathrm{d}x = AX' - AX \quad \text{und} \quad \mathrm{d}y = X'Y' - XY.$$

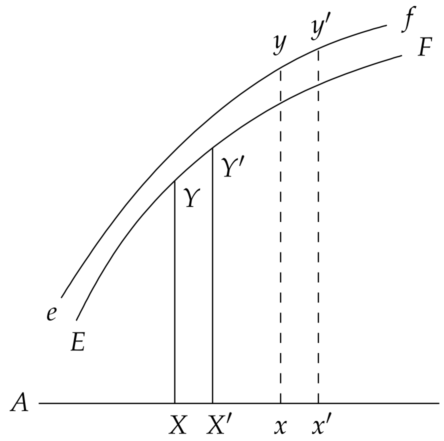

FIG. 3

Nun wollen wir uns eine andere jener sehr nahe Kurve ef vorstellen, deren Punkte y und y' mit den Punkten Y und Y' jener verglichen werden, zu welchen deshalb durch die Variationen der Übergang entstehe, und, nachdem auf die gleiche Weise Koordinaten genommen wurden, wird sein

$$Ax = x + \delta x \quad \text{und} \quad xy = y + \delta y$$

und

$$\delta x = Ax - AX \quad \text{und} \quad \delta y = xy - XY;$$

dann wird aber sein

$$Ax' = x + \mathrm{d}x + \delta(x + \mathrm{d}x) \quad \text{und} \quad x'y' = y + \mathrm{d}y + \delta(y + \mathrm{d}y),$$

sofern wir von Punkt Y' durch die Variation zum Punkt y' herüber springen. Aber zu demselben Punkt y' gelangen wird auch vom Punkt y aus durch Differentiation, woher dann berechnet wird

$$Ax' = x + \delta x + \mathrm{d}(x + \delta x) \quad \text{und} \quad x'y' = y + \delta y + \mathrm{d}(y + \delta y).$$

Nachdem diese Werte mit jenen zusammengebracht worden sind, geht hervor

$$x + \mathrm{d}x + \delta x + \delta \mathrm{d}x = x + \delta x + \mathrm{d}x + \mathrm{d}\delta x$$

und

$$y + \mathrm{d}y + \delta y + \delta \mathrm{d}y = y + \delta y + \mathrm{d}y + \mathrm{d}\delta y,$$

woher natürlich folgt, dass gelten wird

$$\delta \mathrm{d}x = \mathrm{d}\delta x \quad \text{und} \quad \delta \mathrm{d}y = \mathrm{d}\delta y.$$

Wenn wir dies aufmerksamer betrachten, erfahren wir, dass das Prinzip, auf welches der Beweis gestützt ist, darauf zurückgeht, dass, wenn die variable Größe zuerst durch Differentiation, darauf aber durch eine Variation vorwärts getragen wird, dasselbe hervorgeht, als wenn sie in umgekehrter Reihenfolge zuerst durch eine Variation, dann aber durch eine Differentiation vorwärts bewegt werden würde. Wie beispielsweise in der Figur vom Punkt Y aus zuerst durch Differentiation zu Y' gelangt wird, von da aus aber durch Variation zu y'; aber in umgekehrter Reihenfolge wird zuerst vom Punkt Y aus durch Variation zu y gelangt, von da aus aber durch Differentiation zum Punkt y', dasselbe wie zuvor.

BEMERKUNG 2

§43 Dieses Theorem erstreckt sich sehr weit; denn es ist nämlich nicht auf den Fall von zwei nur Variablen beschränkt, sondern ist auch mit der Wahrheit verträglich, wie viele Variablen auch immer in die Rechnung eingehen, weil ja im Beweis allein jener einen Variable, deren Differential wie eine Variation betrachtet wird, Rechnung getragen wird, ohne jegliche Beachtung der übrigen Variablen. Damit aber hier jeglichem Zweifel kein Platz eingeräumt wird, wollen wir irgendeine Oberfläche betrachten, von welcher ein gewisser Punkt Z (Fig. 4) durch die drei Koordinaten $AX = x$, $XY = y$ und $YZ = z$ bestimmt wird; wenn wir von diesem aus zu einem anderen sehr nahen Punkt Z' in derselben Oberfläche fortschreiten, werden diese Größen um ihre Differentiale anwachsen. Dann aber wollen wir eine andere sehr nahe Oberfläche auffassen, deren Punkte z und z' mit jenen Z und Z' verglichen werden, was durch eine Variation geschieht. Nach Festlegen von diesen ist klar, dass auf zweifache Weise zum Punkt z' gelangt werden kann, auf die eine durch die Variation vom Punkt Z' aus, auf die andere durch das Differential vom Punkt z aus, und so ist evident, dass gelten wird

$$\begin{aligned} Ax' &= AX' + \delta.AX' &&= Ax + \mathrm{d}.Ax, \\ x'y' &= X'Y' + \delta.X'Y' &&= xy + \mathrm{d}.xy, \\ y'z' &= Y'Z' + \delta.Y'Z' &&= yz + \mathrm{d}.yz, \end{aligned}$$

was auch über alle anderen auf diese Punkte zu beziehenden variablen Größen gilt.

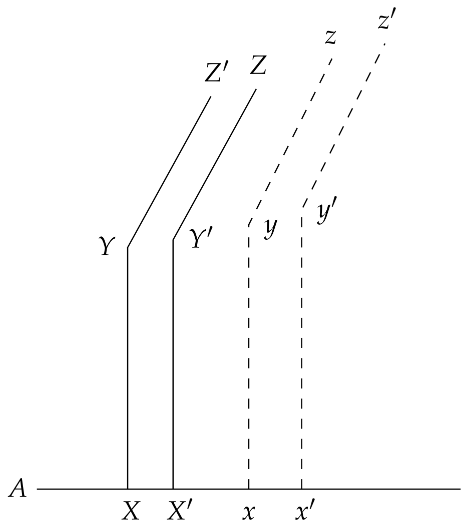

FIG. 4

Daher folgt aber ganz klar ersichtlich, dass gelten wird

$$\delta \mathrm{d}x = \mathrm{d}\delta x, \quad \delta \mathrm{d}y = \mathrm{d}\delta y, \quad \delta \mathrm{d}z = \mathrm{d}\delta z.$$

BEMERKUNG 3

§44 Es ist vollkommen bemerkenswert, dass im Fall Differentiale höherer Ordnung das Variationszeichen δ nach Belieben zwischen den Differentiationszeichen d geschrieben werden kann, und daher lässt sich einsehen, dass diese Vertauschbarkeit auch Geltung haben wird, auch wenn das Variationszeichen δ genauso wie das Differentiationszeichen d einige Male wiederholt wird, was vielleicht bei anderen Betrachtungen von Nutzen sein könnte. Aber beim gegenwärtigen Unterfangen kann die Wiederholung des Variationszeichen δ in keiner Weise auftreten, weil wir ja eine Linie oder Oberfläche nur mit einer einzigen anderen ihr sehr nahen vergleichen; auch wenn diese nämlich sehr allgemein betrachtet werden, dass sie alle möglichen ebenso sehr nahen in sich umfasst, wird sie dennoch wie eine einzige betrachtet und nicht, nachdem wir von der anfänglichen zur sehr nahen hinübergesprungen sind, ein neuer Übergang gestattet. Daher werden also Betrachtungen solcher Art, in welchen Variationen von Variationen zu suchen wären, ganz und gar ausgeschlossen. Umgekehrt aber müssen Differentiale jeder Ordnung von Variationen hier zugelassen werden, und weil in Differentialformeln, die freilich eine endliche Bedeutung haben, nur das Verhältnis der Differentiale betrachtet wird, die, wenn die zwei Variablen x und y sind, mit Festlegungen dieser Art

$$\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}p = q\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}q = r\mathrm{d}x \quad \text{etc.}$$

auf endliche Formen zurückgeführt zu werden pflegen, ist es hauptsächlich von Nöten, dass die Variationen dieser Größen p, q, r etc. angegeben werden.

PROBLEM 1

§45 *Nachdem von den zwei Variablen x und y die Variationen δx und δy gegeben wurden, die Variation der Differentialformel $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ zu bestimmen.*

LÖSUNG

Weil $\delta \mathrm{d}y = \mathrm{d}\delta y$ und $\delta \mathrm{d}x = \mathrm{d}\delta x$ ist, wird die gesuchte Variation δp durch die bekannten Differentiationsregeln gefunden, solange anstelle des Differentiationszeichen d das Variationszeichen δ geschrieben wird; weil daher entspringt

$$\delta p = \frac{\mathrm{d}x\delta\mathrm{d}y - \mathrm{d}y\delta\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x^2},$$

wird durch die zuvor bewiesene Umwandlung sein

$$\delta p = \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}\delta y - \mathrm{d}x\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x^2};$$

weil dort δx und δy die Variationen von x und y sind und daher $\delta x + \mathrm{d}\delta x$ und $\delta y + \mathrm{d}\delta y$ die Variationen von $x + \mathrm{d}x$ und $y + \mathrm{d}y$, ist zu bemerken, dass gelten wird, wie wir schon bemerkt haben [§37],

$$\mathrm{d}\delta x = \delta(x + \mathrm{d}x) - \delta x \quad \text{und} \quad \mathrm{d}\delta y = \delta(y + \mathrm{d}y) - \delta y.$$

Dasselbe wird aus den ersten Prinzipien gefunden; weil nämlich $p + \delta p$ der variierte Wert von p ist und er hervorgeht, wenn anstelle von x und y deren variierten Werte, die $x + \delta x$ und $y + \delta y$ sind, eingesetzt werden, wird gelten

$$p + \delta p = \frac{\mathrm{d}(y + \delta y)}{\mathrm{d}(x + \delta x)} = \frac{\mathrm{d}y + \mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x + \mathrm{d}\delta x},$$

woher wegen $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ wird

$$\delta p = \delta \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y + \mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x + \mathrm{d}\delta x} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}\delta y - \mathrm{d}y\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x^2},$$

weil im Nenner das Stück $\mathrm{d}x\mathrm{d}\delta x$ in Bezug auf $\mathrm{d}x^2$ verschwindet.

KOROLLAR 1

§46 Wenn, während wir durch die Differentiale hindurch fortschreiten, wir die ununterbrochen vermehrten Variablen x und y durch x', x'', x''' etc., y', y'', y''' etc. bezeichnen, dass gilt

$$x' = x + \mathrm{d}x \quad \text{und} \quad y' = y + \mathrm{d}y,$$

dann wird

$$\mathrm{d}\delta x = \delta x' - \delta x \quad \text{und} \quad \mathrm{d}\delta y = \delta y' - \delta y$$

sein, und daher

$$\delta p = \delta \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}x(\delta y' - \delta y) - \mathrm{d}y(\delta x' - \delta x)}{\mathrm{d}x^2}.$$

Korollar 2

§47 Weil ja die Variationen der beiden Variablen x und y in keinster Weise voneinander abhängen, sondern völlig unserem Belieben überlassen sind, wird, wenn wir x keine Variationen zuteilen, sodass gilt

$$\delta x = 0 \quad \text{und} \quad \delta x' = 0,$$

sein

$$\delta p = \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} = \frac{\delta y' - \delta y}{\mathrm{d}x}.$$

Korollar 3

§48 Wenn wir außerdem der einen Variable y die Variation δy zuteilen, dass $\delta y' = 0$ ist, wird $\delta p = -\frac{\delta y}{\mathrm{d}x}$ sein, welche Annahme keineswegs der Natur widerstrebt, weil sich die sehr nahe Kurve so mit der anfänglichen übereinstimmend annehmen lässt, dass sie nur in einem einzigen Punkt von ihr abweicht.

Bemerkung

§49 Für gewöhnlich pflegt bei der Lösung isoperimetrischer und anderer sich auf diese Art beziehender Probleme die variierte Kurve so übereinstimmend festgelegt zu werden, dass sie quasi nur in einem einzigen Element abweicht.

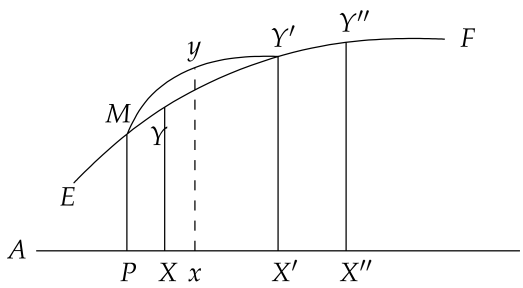

Fig. 5

Wenn so beispielsweise die Kurve EF (Fig. 5) ist, die sich einer gewissen Eigenschaft des Maximums oder Minimums erfreut, pflegt ein einziger Punkt Y zu einem sehr nahen Ort y bewegt zu werden, dass die variierte Kurve $EMyY'F$ nur im sehr kleinen Intervall MY' von der gesuchten abweicht, sodass nach Setzen von $AX = x$ und $XY = y$ für die variierte Kurve gilt

$$Ax = x + \delta x \quad \text{und} \quad xy - y + \delta y$$

oder

$$\delta x = Ax - AX \quad \text{und} \quad \delta y = xy - XY,$$

für die folgenden Punkte aber, zu welchen die Differentiale hinführen, überall gilt

$$\delta x' = 0, \quad \delta y' = 0, \quad \delta x'' = 0, \quad \delta y'' = 0 \quad \text{etc.},$$

und genauso für die vorhergehenden. Ja sogar es kann zum Vorteil der Rechnung keine Variation $Xx = \delta x$ genommen werden, dass die ganze Variation allein zum Element δy geführt wird, in welchen Fall man natürlich $\delta p = -\frac{\delta y}{\mathrm{d}x}$ haben wird, und diese einzige Variation genügt natürlich, um Probleme dieser Art, die freilich behandelt worden sind, aufzulösen.

Aber wenn, wie wir es hier unternehmen, diese Probleme weiter ausdehnen, dass die gesuchte Kurve um den Anfang und das Ende herum gewisse Bestimmungen erhalten kann, ist es natürlich notwendig, das Variationskalkül möglichst allgemein auszuführen und in allen Punkten der Kurve den Koordinaten unbestimmte Variationen zuzuteilen. Dies ist auch besonders notwendig, wenn wir Untersuchungen dieser Art auf nicht stetige gekrümmte Linien anwenden wollen.

PROBLEM 2

§50 *Nachdem von den zwei Variablen x und y die Variationen δx und δy gegeben worden sind, wenn $\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}p = q\mathrm{d}x$ gesetzt wird, die Variation der Größe q oder der Wert von δq zu finden.*

Lösung

Weil $q = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ ist, wird für den variierten Wert sein

$$q + \delta q = \frac{\mathrm{d}(p + \delta p)}{\mathrm{d}(x + \delta x)} = \frac{\mathrm{d}p + \mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}x + \mathrm{d}\delta x},$$

woher durch Hinfortschaffen der Größe q übrig bleibt

$$\delta q = \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}\delta p - \mathrm{d}p\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x^2},$$

welche Variation also auch aus der Differentiation der Formel $q = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ entsteht, wenn die Differentiation auf gewohnte Weise unternommen wird, anstelle des Differentiationszeichen d aber das Variationszeichen δ geschrieben wird; dort wird es zu erinnern förderlich sein, dass gilt

$$\delta\mathrm{d}x = \mathrm{d}\delta x \quad \text{und} \quad \delta\mathrm{d}p = \mathrm{d}\delta p.$$

Oben haben wir aber gefunden, dass wegen $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\delta p = \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}\delta y - \mathrm{d}y\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x^2}$$

ist, woher weiter durch eine übliche Differentiation der Wert von $\mathrm{d}\delta p$, natürlich das Differential von δp, berechnet wird.

Korollar 1

§51 Weil $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$ und $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = q$ ist, wird zuerst sein

$$\delta p = \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} - \frac{p\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x},$$

dann aber

$$\delta q = \frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}x} - \frac{q\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}.$$

Für den zukünftigen Gebrauch ist es aber besser, dass hier das Stück $\mathrm{d}\delta p$ beibehalten wird, als dass sein Wert aus der vorhergehenden Formel gefunden wird.

KOROLLAR 2

§52 Weil dennoch die erste durch Differentiation gibt

$$\mathrm{d}\delta p = \frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{dd}x\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{p\mathrm{dd}\delta x}{\mathrm{d}x} - q\mathrm{d}\delta x + \frac{p\mathrm{dd}x\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x^2},$$

geht nach Einsetzen dieses Wertes hervor

$$\delta q = \frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{dd}x\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x^3} - \frac{p\mathrm{dd}\delta x}{\mathrm{d}x^2} - \frac{2q\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x} + \frac{p\mathrm{dd}x\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x^3}.$$

KOROLLAR 3

§53 Wenn daher allein der Variable y Variationen zugeteilt werden, dass die Stücke δx und die, die daher deriviert werden, verschwinden, werden wir haben

$$\delta p = \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} \quad \text{und} \quad \delta q = \frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{dd}x\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x^3},$$

und wenn das Differential $\mathrm{d}x$ konstant angenommen wird, wird $\delta q = \frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2}$ sein.

BEMERKUNG 1

§54 Damit diese Dinge leichter verstanden werden, wollen wir in der Kurve EF (Fig. 5), die durch die Relation zwischen den Variablen $AX = x$ und $XY = y$ beschrieben wurde, mehrere Punkte Y, Y', Y'' etc. gemäß der Differentiale ununterbrochen nach vorne bewegt betrachten, dass gilt

$$AX = x, \quad AX' = x + \mathrm{d}x, \quad AX'' = x + 2\mathrm{d}x + \mathrm{dd}x,$$
$$AX''' = x + 3\mathrm{d}x + 3\mathrm{dd}x + \mathrm{d}^3x,$$

$$XY = y, \quad X'Y' = y + \mathrm{d}y, \quad X''Y'' = y + 2\mathrm{d}y + \mathrm{dd}y,$$
$$X'''Y''' = y + 3\mathrm{d}y + 3\mathrm{dd}y + \mathrm{d}^3y,$$

welche Differentiale jeder Ordnung anzeigenden so kürzer dargestellt werden

$$\begin{aligned} &AX = x, \quad AX' = x', \quad AX'' = x'', \quad AX''' = x''' \quad \text{etc.},\\ &XY = y, \quad X'Y' = y', \quad X''Y'' = y'', \quad X'''Y''' = y''' \quad \text{etc.}, \end{aligned}$$

welchen einzelnen ihre auf keine Weise voneinander abhängenden Variationen zugeteilt zu werden aufgefasst werden, sodass alle diese Variationen

$$\begin{aligned} &\delta x, \quad \delta x', \quad \delta x'', \quad \delta x''' \quad \text{etc.},\\ &\delta y, \quad \delta y', \quad \delta y'', \quad \delta y''' \quad \text{etc.}, \end{aligned}$$

die von unserem Belieben abhängen, als bekannt betrachtet werden können. Nachdem diese Dinge so festgelegt wurden, werden die Differentiale jeder Ordnung der Variationen auf diese Weise dargestellt werden, dass gilt

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}\delta x = \delta x' - \delta x, \quad \mathrm{dd}\delta x = \delta x'' - 2\delta x' + \delta x, \quad \mathrm{d}^3\delta x = \delta x''' - 3\delta x'' + 3\delta x' - \delta x,\\ &\mathrm{d}\delta y = \delta y' - \delta y, \quad \mathrm{dd}\delta y = \delta y'' - 2\delta y' + \delta y, \quad \mathrm{d}^3\delta y = \delta y''' - 3\delta y'' + 3\delta y' - \delta y. \end{aligned}$$

Wenn wir daher nun einen einzigen Punkt Y der Kurve annehmen variiert zu werden, wird gelten

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}\delta x = -\delta x, \quad \mathrm{dd}\delta x = +\delta x, \quad \mathrm{d}^3\delta x = -\delta x \quad \text{etc.},\\ &\mathrm{d}\delta y = -\delta y, \quad \mathrm{dd}\delta y = +\delta y, \quad \mathrm{d}^3\delta y = -\delta y \quad \text{etc.}, \end{aligned}$$

und daher

$$\delta p = -\frac{\delta y}{\mathrm{d}x} + \frac{p\delta x}{\mathrm{d}x}$$

und

$$\delta q = \frac{\delta y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{dd}x\delta y}{\mathrm{d}x^3} - \frac{p\delta x}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2q\delta x}{\mathrm{d}x} - \frac{p\mathrm{dd}x\delta x}{\mathrm{d}x^3},$$

wo nach Weglassen aller in Bezug auf die übrigen verschwindenden Anteile sein wird

$$\delta q = \delta y \cdot \frac{1}{\mathrm{d}x^2} - \delta x \cdot \frac{p}{\mathrm{d}x^2}.$$

Wenn schließlich allein der Ordinate $XY = y$ eine Variation zugeteilt wird, wird man haben

$$\delta p = -\frac{1}{\mathrm{d}x}\delta y \quad \text{und} \quad \delta q = \frac{1}{\mathrm{d}x^2}\delta y.$$

Bemerkung 2

§55 Daher ist klar, wenn die Variation in einem einzigen Punkt der Kurve festgelegt wird, dass im großen Maße gegen die gebräuchlichen Prinzipien der Differentiale verstoßen wird, weil die oberen Differentiale von Variationen in Bezug auf die unteren keinesfalls verschwinden, sondern ununterbrochen denselben Wert beibehalten und daher die Variation der Größen p und q ins Unendliche wachsen, wenn freilich unendlich kleine δx und δy aus derselben Ordnung wie die Differentiale $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ angenommen werden. Ja es ist daher sogar in der Rechnung besonders dafür zu sorgen, dass wir nicht in riesige Fehler gestürzt werden, weil die Vorschriften des Kalküls auf das Gesetz der Fortsetzung gestützt ist, nach welchem gekrümmte Linien durch einen ununterbrochenen Fluss des Punktes beschrieben zu werden aufgefasst werden, sodass in deren Krümmung niemals ein Sprung erkannt wird. Wenn daher aber ein Punkt Y der Kurve (Fig. 5) nach y geführt wird, wobei der übrige Verlauf der Kurve außer den quasi zwei Elementen My und yY' unverändert gelassen wurde, ist es ersichtlich, dass der Krümmung eine riesige Unregelmäßigkeit aufgeprägt wird, wodurch die gewöhnlichen Rechenregeln nicht weiter verwendet werden können. Um diesen Umstand entgegenzuwirken, wird es ein sehr sicheres Hilfsmittel sein, dass den einzelnen Punkten zumindest im Geiste Variationen zugeteilt werden, die in einem gewissen Gesetz der Fortsetzung enthalten sind, und nicht zuvor eine Unregelmäßigkeit in der Rechnung zugelassen wird, wie alle Differentiationen und Integrationen durchgeführt worden sind, und auf diese Weise zumindest eine Gattung der Kontinuität in der Rechnung beibehalten wird. Obwohl sich also die Differentiale der Variationen

$$\mathrm{d}\delta y, \quad \mathrm{dd}\delta y, \quad \mathrm{d}^3\delta y \quad \text{etc.},$$

genauso

$$\mathrm{d}\delta x, \quad \mathrm{dd}\delta x, \quad \mathrm{d}^3\delta x \quad \text{etc.}$$

unter Umständen in der gemachten Annahme auf einfachere Variationen zurückfahren lassen, hilft es dennoch, dass jene Formen beibehalten werden und sie auf die folgenden Integrationen angewendet werden; und darauf gehen auch die Operationen zurück, die ich einst, nachdem ich denselben Gegenstand über das Finden mit der Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehener Kurven behandelt hatte, zu erledigen gelehrt hatte.

Problem 3

§56 *Nachdem von den zwei Variablen x und y die Variationen δx und δy gegeben wurden, die Variationen der Verhältnisse zwischen Differentialen irgendeines Grades zu finden.*

Lösung

Die Frage geht darauf zurück, dass nachdem ununterbrochen festgelegt wurde

$$\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}p = q\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}q = r\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}r = s\mathrm{d}x \quad \text{etc.},$$

die Variationen der Größen p, q, r, s etc. angegeben werden, weil auf diese Größen alle Verhältnisse von Differentialen irgendeiner Ordnung, die freilich in endlichen Werten enthalten sind, zurückgeführt werden. Und über die zwei ersten von diesen haben wir freilich schon gesehen, dass gilt

$$\delta p = \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} - \frac{p\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x} \quad \text{und} \quad \delta q = \frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}x} - \frac{q\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}.$$

Weil also weiter ist

$$r = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x} \quad \text{und} \quad s = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} \quad \text{etc.},$$

werden deren Variationen auf gleiche Weise durch die Differentiationsregeln gefunden

$$\delta r = \frac{\mathrm{d}\delta q}{\mathrm{d}x} - \frac{r\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}, \quad \delta s = \frac{\mathrm{d}\delta r}{\mathrm{d}x} - \frac{s\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x} \quad \text{etc.},$$

wo, wenn es beliebt, anstelle von $\mathrm{d}\delta p$, $\mathrm{d}\delta q$, $\mathrm{d}\delta r$ etc. die Differentiale der Variationen δp, δq, δr etc., die zuvor gefunden worden, eingesetzt werden. Dies würde aber nicht nur zu allzu langen Formeln führen, sondern ist auch, wie aus dem Folgenden klar werden wird, nicht einmal nötig, weil daher um vieles leichter alle Reduktionen, die von Nöten sein werden, durchgeführt werden können.

KOROLLAR 1

§57 Wenn allein der Variable y Variationen zugeteilt werden oder, während die Abszissen x dieselben bleiben, nur die Ordinaten y um ihre Variationen vermehrt werden, werden wir haben

$$\delta p = \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}, \quad \delta q = \frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}x}, \quad \delta r = \frac{\mathrm{d}\delta q}{\mathrm{d}x}, \quad \delta s = \frac{\mathrm{d}\delta r}{\mathrm{d}x} \quad \text{etc.}$$

KOROLLAR 2

§58 Wenn daher außerdem alle Zuwächse dx von x gleich angenommen werden oder das Element dx konstant gesetzt wird, wird nach Einsetzen der Differentiale der vorhergehenden Formeln in den Folgenden, erhalten werden

$$\delta p = \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}, \quad \delta q = \frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2}, \quad \delta r = \frac{\mathrm{d}^3\delta y}{\mathrm{d}x^3}, \quad \delta s = \frac{\mathrm{d}^4\delta y}{\mathrm{d}x^4} \quad \text{etc.}$$

KOROLLAR 3

§59 Wenn allein den Abszissen x Variationen zugeteilt werden, dass die Variation δy mit allen derivierten verschwindet, und zugleich das Element dx konstant genommen wird, werden sich die einzelnen Variationen so verhalten

$$\begin{aligned}
\delta p &= -\frac{p\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}, \\
\delta q &= -\frac{p\mathrm{dd}\delta x}{\mathrm{d}x^2} - \frac{2q\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}, \\
\delta r &= -\frac{p\mathrm{d}^3\delta x}{\mathrm{d}x^3} - \frac{3q\mathrm{dd}\delta x}{\mathrm{d}x^2} - \frac{3r\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}, \\
\delta s &= -\frac{p\mathrm{d}^4\delta x}{\mathrm{d}x^4} - \frac{4q\mathrm{d}^3\delta x}{\mathrm{d}x^3} - \frac{6r\mathrm{dd}\delta x}{\mathrm{d}x^2} - \frac{4s\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x},
\end{aligned}$$

etc.

Korollar 4

§60 Auch wenn also in diesem Fall das Element dx konstant angenommen wird, tauchen hier dennoch Differentiale jeder Ordnung der Variation δx auf; die Begründung von dieser Sache ist die, dass die Variationen der ununterbrochen weiter vorwärts bewegten Werte von x, also x', x'' etc. in keinster Weise von den Differentialen abzuhängen festgelegt werden.

Bemerkung

§61 Wann immer es aber gefiel, allein der Variable x Variationen zuzuteilen, dann ist es insgesamt besser, dass die Variablen x und y miteinander vertauscht werden und besser Festlegungen dieser Art zu gebrauchen

$$\mathrm{d}x = p\mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}p = q\mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}q = r\mathrm{d}y \quad \text{etc.},$$

mit welchen die Gattungen der Differentiale beseitigt werden; dann aber, nach Annahme eines konstanten Elements dy, werden die gleichen, aber einfachere, Formeln für die Variationen der Größen p, q, r etc. gefunden wie in Korollar 2. Damit im Übrigen die Rechnung auf alle Fälle immer angewendet werden kann, ist es immer förderlich, dass jeder der beiden Variablen ihre Variationen zugeteilt werden; auch wenn nämlich dann um vieles komplexere Formeln hervorgehen, besonders wenn sie entwickelt werden, bringen sie dennoch beim Durchführen der Rechnung so außerordentliche Vorteile und Verkürzungen mit sich, dass am Ende die Rechnung kaum aufwendiger wird und keinen Überdruss an Länge schafft. Wir wollen also zu allgemeineren sich auf dieses Kapitel beziehenden Problemen fortschreiten.

Problem 4

§62 *Nachdem von den zwei Variablen x und y die Variationen δx und δy gegeben wurden, die Variation einer endlichen Formel V, so aus jenen Variablen selbst wie deren Differentialen irgendeiner Ordnung zusammengesetzt, zu finden.*

Lösung

Weil V eine Größe ist, die einen endlichen Wert hat, werden durch Festlegen von

$$\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}p = q\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}q = r\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}r = s\mathrm{d}x \quad \text{etc.}$$

die Differentiale daher beseitigt werden und es wird für V eine aus den endlichen Größen x, y, p, q, r, s etc. gebildete Funktion hervorgehen. Wie auch immer also die Art der Zusammensetzung ist, ihr Differential wird immer eine Form dieser Art haben

$$\mathrm{d}V = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + S\mathrm{d}s + \text{etc.},$$

während die Anzahl dieser Glieder umso größer wird, umso höhere Differentiale in V eingehen. Wenn daher aber die Variation δV dieser Formel V zu suchen war, wird sie erhalten, wenn anstelle der variablen Größen x, y, p, q, r etc. dieselben um ihre Variationen vermehrt eingesetzt werden und von der resultierenden Form selbst die Größe V weggenommen wird, woher eingesehen wird, dass die Variation mit Hilfe der üblichen Differentiation gefunden wird, nachdem nur das Differentialzeichen d in das Variationszeichen δ verwandelt wurde. Daher, weil das Differential schon oben dargeboten wurde, werden wir die gesuchte Variation erhalten

$$\delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + S\delta s + \text{etc.};$$

wie aber die Variationen δp, δq, δr, δs, etc. durch die angenommenen Variationen δx und δy bestimmt werden, ist schon oben [§56] gezeigt worden.

Korollar 1

§63 Wenn wir hier die zuvor gefundenen Werte einsetzen, werden wir die gesuchte Variation so ausgedrückt erhalten

$$\begin{aligned}\delta V = M\delta x + N\delta y &+ \frac{1}{\mathrm{d}x}\left(P\mathrm{d}\delta y + Q\mathrm{d}\delta p + R\mathrm{d}\delta q + S\mathrm{d}\delta r + \text{etc.}\right)\\ &- \frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}\left(Pp + Qq + Rr + Ss + \text{etc.}\right).\end{aligned}$$

Korollar 2

§64 Wenn der Variable x überhaupt keine Variation zugeteilt wird und darüber hinaus das Element $\mathrm{d}x$ konstant angenommen wird, dann wird die Variation der vorgelegten Größe V so ausgedrückt hervorgehen

$$\delta V = N\delta y + \frac{P\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} + \frac{Q\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{R\mathrm{d}^3\delta y}{\mathrm{d}x^3} + \frac{S\mathrm{d}^4\delta y}{\mathrm{d}x^4} + \text{etc.}$$

Bemerkung

§65 In diesen Formen wird zumindest eine Gattung der Homogenität in den Differentialen erblickt, wenn freilich δx und δy zur Ordnung der Differentiale gezählt werden; dies würde sich weit anders ereignen, wenn wir in dem Fall, in dem ein einziger Punkt der Kurve variiert wird, sofort anstelle der Differentiale der Variationen die oben [§54] dargebotenen Werte einsetzen wollten, auf welche Weise natürlich die Idee der Integration, welcher diese Formeln darauf bedürfen, ausgeschlossen werden würde. Im Übrigen ist klar, wie der Fund von Variationen auf die übliche Differentiation zurückgeführt wird, während der ganze Unterschied nur darin gelegen ist, dass anstelle der Variationen δp, δq, δr etc. die schon zuvor angegebenen Werte, welche selbst wir freilich durch die übliche Differentiation gefunden haben, eingesetzt werden. Es wird aber gefällig sein, dass diese Operation an einigen Beispielen illustriert wird, damit umso deutlicher die Gestalt dieser ganzen Behandlung erkannt wird.

Beispiel 1

§66 *Die Variation der Formel $\frac{y\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$, die die Subtangente ausdrückt, ist zu finden.*

Wegen $\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x$ wird diese Formel $\frac{y}{p}$, woher ihre Variation $\frac{\delta y}{p} - \frac{y\delta p}{pp}$ ist, wo sie, nach Einsetzen des Wertes anstelle von δp, wird

$$\frac{\delta y}{p} - \frac{y\mathrm{d}\delta y}{pp\mathrm{d}x} + \frac{y\mathrm{d}\delta x}{p\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\delta y - \frac{y\mathrm{d}x}{\delta y^2}\mathrm{d}\delta y + \frac{y}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}\delta x,$$

welche letzte Formel unmittelbar aus der Differentiation der vorgelegten Formel entsteht.

Beispiel 2

§67 *Die Variation der Formel, die die Tangente selbst ausdrückt,* $\frac{y\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{\mathrm{d}y}$, *ist zu finden.*

Für die Festlegung $\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x$ liefert diese endliche Form $\frac{y}{p}\sqrt{1+pp}$, woher die gesuchte Variation diese ist

$$\frac{\delta y}{p}\sqrt{1+pp} - \frac{y\delta p}{pp\sqrt{1+pp}},$$

die in diese verwandelt wird

$$\frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{\mathrm{d}y}\delta y - \frac{y\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y^2\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}\left(\mathrm{d}x\mathrm{d}\delta y - \mathrm{d}y\mathrm{d}\delta x\right).$$

Beispiel 3

§68 *Die Variation der Formel, die den Krümmungsradius ausdrückt,* $\frac{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}\mathrm{d}y}$, *ist zu bestimmen.*

Für $\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}p = q\mathrm{d}x$ gesetzt geht diese Formel in diese über $\frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{q}$, deren Variation deshalb ist

$$\frac{3p\delta p}{q}\sqrt{1+pp} - \frac{\delta q}{qq}(1+pp)^{\frac{3}{2}},$$

wo ich mich freilich mit der Substitution der zuvor gefundenen Werte nicht weiter aufhalte.

Problem 5

§69 *Nachdem von den zwei variablen Größen x und y die Variationen δx und δy gegeben wurden, die Variation der Formel, so aus jenen Variablen wie deren Differentialen irgendeiner Ordnung zusammengesetzt, ob sie unendlich oder unendlich klein war, ausfindig zu machen.*

LÖSUNG

Nachdem wie bisher $\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}p = q\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}q = r\mathrm{d}x$, etc. gesetzt wurde, wird die Formel immer auf eine Form dieser Art $V\mathrm{d}x^n$ zurückgeführt werden, wo V eine endliche Funktion der Größen x, y, p, q, r, etc. ist, der Exponent n aber entweder positiv oder negativ ist, sodass im ersten Fall die Formel unendlich klein ist, im zweiten hingegen unendlich groß. Wir wollen also festlegen, dass die gewöhnliche Differentiation gegeben ist

$$\mathrm{d}V = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + \text{etc.},$$

woher man zugleich ihre Variation hat. Weil also die Variation der vorgelegten Form diese ist

$$nV\mathrm{d}x^{n-1}\mathrm{d}\delta x + \mathrm{d}x^n\delta V,$$

wird diese Variation, die wir suchen, natürlich sein

$$nV\mathrm{d}x^{n-1}\mathrm{d}\delta x + \mathrm{d}x^n\left(M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}\right),$$

wo aus dem Oberen [§56] diese Werte eingesetzt werden müssen

$$\begin{aligned} \delta p &= \frac{\mathrm{d}\delta y - p\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}, \quad & \delta q &= \frac{\mathrm{d}\delta p - q\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}, \\ \delta r &= \frac{\mathrm{d}\delta q - r\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}, \quad & \delta s &= \frac{\mathrm{d}\delta r - s\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}, \end{aligned}$$

$$\text{etc.}$$

Weil diese Dinge per se ersichtlich sind, bedürfen sie keiner weiteren Erklärung und zugleich scheint dieses Kapitel vollkommen abgeschlossen.

Kapitel 3
Über die Variation zwei Variablen involvierender einfacher Integralformeln

Leonhard Euler

Definition 6

§70 *Einfach nenne ich hier eine Integralformel, die keine anderen Integrale in sich involviert, sondern einfach ein Integral einer Differentialformel darstellt, die außer den zwei Variablen irgendwelche Differentiale derer umfasst.*

Korollar 1

§71 Wenn also x und y die zwei Variablen sind, wird die Integralformel $\int W$ einfach sein, wenn der Ausdruck W außer diesen Variablen nur deren Differentiale, von welcher Ordnung auch immer sie waren, enthält und nicht zusätzlich andere Integralformeln in sich verwickelt.

Korollar 2

§72 Wenn wir daher also festlegen

$$\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}p = q\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}q = r\mathrm{d}x \quad \text{etc.},$$

sodass die Gattung der Differentiale beseitigt wird, weil ja die Integration eine Differentialformel verlangt, wird jener Ausdruck W immer auf eine Form dieser Art $V\mathrm{d}x$ zurückgeführt werden, während V eine Funktion der Größen x, y, p, q etc. ist.

Korollar 3

§73 Weil also eine einfache Integralformel von dieser Art $\int V\mathrm{d}x$ ist, wo V eine Funktion der Größen x, y, p, q, r etc. ist, wird ihre Gestalt am angenehmsten ihr Differential darstellen, wenn wir sagen

$$\mathrm{d}V = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + \text{etc.}$$

zu sein.

Bemerkung

§74 Ich unterscheide hier einfache Integralformeln von zusammengesetzten, in denen die Integration von Differentialformeln solcher Art vorgelegt wird, die schon selbst eine oder mehrere Integralformeln involvieren. Wie wenn beispielsweise der Buchstabe s das Integral

$$\int \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \int \mathrm{d}x\sqrt{1+pp}$$

bezeichnet und die Größe V außer jenen Größen auch noch dieses s involviert, wird die Integralformel $\int V\mathrm{d}x$ mit Recht als zusammengesetzt angesehen; deren Variation erfordert besondere darauf [Kap. IV] zu erläuternde Vorschriften. In diesem Kapitel habe ich aber beschlossen, zuerst die Methode, die Variationen einfacher Integralformeln zu finden, anzugeben.

Theorem 2

§75 *Die Variation der Integralformel $\int W$ ist immer gleich dem Integral der Variation derselben Differentialformel, deren Integration vorgelegt wird, oder es ist*

$$\delta \int W = \int \delta W.$$

Beweis

Weil die Variation der Übertrag ist, um welchen der variierte Wert einer Größe ihren natürlichen Wert übersteigt, wollen wir den variierten Wert der vorgelegten Formel $\int W$ betrachten, welchen sie erhält, wenn anstelle der Variablen x und y die Werte derselben um ihre Variationen δx und δy vermehrt eingesetzt werden. Weil aber dann die Größe W in $W + \delta W$ übergeht, wird der variierte Wert der vorgelegten Form dieser sein

$$\int (W + \delta W) = \int W + \int \delta W;$$

daher, weil gilt

$$\delta \int W = \int (W + \delta W) - \int W,$$

werden wir haben

$$\delta \int W = \int \delta W,$$

woher klar ist, dass die Variation des Integrals gleich dem Integral der Variation wird. Dasselbe kann aber auch auf diese Weise gezeigt werden. Es werde $\int W = w$ gesetzt, sodass die Variation δw zu suchen ist. Weil also nach Nehmen von Differentialen $\mathrm{d}w = W$ ist, werden nur die Variationen genommen und es wird sein

$$\delta \mathrm{d}w = \delta W = \mathrm{d}\delta w$$

wegen $\delta \mathrm{d}w = \mathrm{d}\delta w$. Nun aber liefert die Gleichung $\mathrm{d}\delta w = \delta W$ erneut integriert

$$\delta w = \int \delta W = \delta \int W.$$

Korollar 1

§76 Nachdem also diese Integralformel $\int V\mathrm{d}x$ vorgelegt wurde, wird ihre Variation $\delta \int V\mathrm{d}x$ gleich

$$\int \delta (V\mathrm{d}x) = \int (V\delta \mathrm{d}x + \mathrm{d}x\delta V)$$

sein und daher wird man wegen $\delta \mathrm{d}x = \mathrm{d}\delta x$ haben

$$\delta \int V\mathrm{d}x = \int V\mathrm{d}\delta x + \int \mathrm{d}x\delta V.$$

KOROLLAR 2

§77 Für $\delta x = w$ gesetzt, sodass $\mathrm{d}\delta x = \mathrm{d}w$ ist, weil gilt

$$\int V\mathrm{d}w = Vw - \int w\mathrm{d}V,$$

wird sich im ersten Glied des Differentials der Variation entledigt und es wird werden

$$\delta \int V\mathrm{d}x = V\delta x - \int \mathrm{d}V\delta x + \int \mathrm{d}x\delta V,$$

wo der erste Teil von der Integration frei ist.

BEMERKUNG

§78 Wie wir oben [§37] gezeigt haben, dass die Differentiationszeichen d, die einem Ausdruck vorangestellt wurden, mit dem Variationszeichen δ nach Belieben vertauscht werden können, so sehen wir nun, dass das Integrationszeichen $\int$ mit dem Variationszeichen δ vertauscht werden kann, weil ja gilt

$$\delta \int W = \int \delta W.$$

Und dies ist auch für wiederholte Integrationen klar, dass, wenn eine solche Formel $\int\int W$ vorgelegt war, ihre Variation auf diese Weisen dargeboten werden kann

$$\delta \int\int W = \int \delta \int W = \int\int \delta W,$$

und daher wird die Variation von Integralformeln auf Variationen von Ausdrücken, die weiter keine Integrationen involvieren, zurückgeführt, für das Finden welcher bereits oben Vorschriften angegeben worden sind.

PROBLEM 6

§79 *Nachdem von den zwei Variablen x und y die Variationen δx und δy vorgelegt wurden, wenn nach Festlegen von*

$$\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}p = q\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}q = r\mathrm{d}x \quad \textit{etc.}$$

V irgendeine Funktion der Größen x, y, p, q, r etc. war, die Variation der Integralformel $\int V\mathrm{d}x$ zu finden.

LÖSUNG

Gerade haben wir gesehen [§77], dass die Variation dieser Integralformel so ausgedrückt wird, dass gilt

$$\delta \int V \mathrm{d}x = V \delta x - \int \mathrm{d}V \delta x + \int \mathrm{d}x \delta V.$$

Um nun die Variation δV zu finden, weil V eine Funktion der Größen x, y, p, q, r etc. ist, wollen wir ihr Differential festlegen zu sein

$$\mathrm{d}V = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + \text{etc.},$$

und auf die gleiche Weise wird ihre Variation so ausgedrückt sein

$$\delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.},$$

nach Einsetzen welcher Werte wir die gesuchte Variation erhalten

$$\begin{aligned}\delta \int V \mathrm{d}x = V\delta x &+ \int \mathrm{d}x\,(M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.})\\ &- \int \delta x\,(M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + \text{etc.})\,;\end{aligned}$$

weil sich dort die von M abhängenden Anteile gegenseitig aufheben, wird, nachdem die Teile gemäß der Buchstaben N, P, Q, R etc. getrennt wurden, die Variation sein

$$\begin{aligned}\delta \int V \mathrm{d}x = V\delta x &+ \int N\,(\mathrm{d}x\delta y - \mathrm{d}y\delta x) + \int P\,(\mathrm{d}x\delta p - \mathrm{d}p\delta x)\\ &+ \int Q\,(\mathrm{d}x\delta q - \mathrm{d}q\delta x) + \int R\,(\mathrm{d}x\delta r - \mathrm{d}r\delta x)\\ &+ \text{etc.},\end{aligned}$$

wo, wie wir oben [§56] gefunden haben, ist

$$\mathrm{d}x\delta p = \mathrm{d}\delta y - p\mathrm{d}\delta x, \quad \mathrm{d}x\delta q = \mathrm{d}\delta p - q\mathrm{d}\delta x, \quad \mathrm{d}x\delta r = \mathrm{d}\delta q - r\mathrm{d}\delta x \quad \text{etc.},$$

nach Einsetzen welcher Werte wegen $\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x$ erhalten wird

$$\begin{aligned}\delta \int V \mathrm{d}x = V\delta x &+ \int N\mathrm{d}x\,(\delta y - p\delta x) + \int P\mathrm{d}.\,(\delta y - p\delta x)\\ &+ \int Q\mathrm{d}.\,(\delta p - q\delta x) + \int R\mathrm{d}.\,(\delta q - r\delta x)\\ &+ \text{etc.}\end{aligned}$$

Um diesen Ausdruck weiter zu reduzieren, werde bemerkt, dass gilt

$$\begin{aligned}
\delta p - q\delta x &= \frac{\mathrm{d}\delta y - p\mathrm{d}\delta x - \mathrm{d}p\delta x}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}.\,(\delta y - p\delta x)}{\mathrm{d}x}, \\
\delta q - r\delta x &= \frac{\mathrm{d}\delta p - q\mathrm{d}\delta x - \mathrm{d}q\delta x}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}.\,(\delta p - q\delta x)}{\mathrm{d}x}, \\
\delta r - s\delta x &= \frac{\mathrm{d}\delta q - r\mathrm{d}\delta x - \mathrm{d}r\delta x}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}.\,(\delta q - r\delta x)}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}$$

etc.,

womit jede Formel auf die vorhergehende zurückgeführt wird; daher, wenn wir der Kürze wegen $\delta y - p\delta x = w$ setzen, wird es sein wie folgt

$$\begin{aligned}
\delta y - p\delta x &= w, \\
\delta p - q\delta x &= \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}, \\
\delta q - r\delta x &= \frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}, \\
\delta r - s\delta x &= \frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}$$

etc.

Und so, nachdem die Variationen der derivierten Buchstaben p, q, r etc. aus der Rechnung ausgeschlossen wurden, wird die gesuchte Variation sein

$$\begin{aligned}
\delta\int V\mathrm{d}x = V\delta x + \int N\mathrm{d}xw + \int P\mathrm{d}w + \int Q\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \int R\mathrm{d}.\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \\
+ \int S\mathrm{d}.\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{1}{\mathrm{d}x}.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \int T\mathrm{d}.\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \text{etc.},
\end{aligned}$$

das Bildungsgesetz welcher Progression offenbar ist, Differentiale welchen Grades auch immer in die Form V eingehen.

KOROLLAR 1

§80 Der erste Teil dieser Variation $V\delta x$ ist also frei vom Integrationszeichen und involviert daher allein die Variation δx, aber die übrigen Teile enthalten jede von beiden immer zusammengenommen und im Buchstaben $w = \delta y - p\delta x$ erfasst.

KOROLLAR 2

§81 Der zweite Teil

$$\int N\mathrm{d}x \cdot w = \int Nw\mathrm{d}x$$

kann nicht bequemer ausgedrückt werden, der dritte $\int P\mathrm{d}w$ scheint aber gefälliger so ausgedrückt werden zu können, dass

$$\int P\mathrm{d}w = Pw - \int w\mathrm{d}P$$

ist und hinter dem Integralzeichen nur die Größe w selbst gefunden wird.

KOROLLAR 3

§82 Der vierte Teil $\int Q\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$ wird auf die gleiche Weise auf

$$Q\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} - \int \mathrm{d}Q\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$$

zurückgeführt und dieses letzte Glied, weil $\int \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}w$ ist, liefert weiter

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}w - \int w\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x},$$

sodass der vierte Teil in diese Glieder aufgelöst wird

$$Q\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}w + \int w\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}.$$

KOROLLAR 4

§83 Der fünfte Teil

$$\int R\mathrm{d}.\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$$

wird zuerst auf diesen zurückgeführt

$$R\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} - \int \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x},$$

dann aber das zweite Glied auf

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} - \int \frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} \cdot \mathrm{d}w$$

und dieses schließlich weiter auf

$$\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} \cdot w - \int w\mathrm{d}.\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x},$$

sodass dieser fünfte Teil nun so ausgedrückt wird

$$R\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} \cdot w - \int w\mathrm{d}.\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}.$$

Korollar 5

§84 Auf die gleiche Weise wird der sechste Teil

$$\int S\mathrm{d}.\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$$

so ausgedrückt gefunden

$$S\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} \cdot w$$
$$+ \int w\mathrm{d}.\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}.$$

Problem 7

§85 *Nach Festlegen von* $\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}p = q\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}q = r\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}r = s\mathrm{d}x$ *etc., wenn* V *irgendeine Funktion der Größen* x, y, p, r, s *etc. war, sodass gilt*

$$\mathrm{d}V = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + S\mathrm{d}s + etc.,$$

die Variation der Integralformel $\int V\mathrm{d}x$*, die aus der Variation jeder der beiden Variablen* x *und* y *entsteht, so auszudrücken, dass unter dem Integralzeichen keine Differentiale von Variationen auftauchen.*

LÖSUNG

In den Korollaren des vorhergehenden Problems ist schon alles zu diesem Zweck vorbereitet worden, sodass nichts anderes von Nöten ist, außer dass die Transformationen der einzelnen Teile in Ordnung gebracht werden, wonach Teile zweifacher Art erhalten werden, während eine die Integralformeln enthält, welche sich freilich alle zu derselben Summe sammeln lassen, die andere aber die absoluten Teile, welche wir so in Glieder aufteilen werden, dass sie gemäß den Variationen δx und δy selbst und deren Differentialen jeder Ordnung fortschreiten. Nachdem aber der Kürze wegen die Formel $\delta y - p\delta x = w$ gesetzt wurde, wird sich die gesuchte Variation so verhalten

$$
\begin{aligned}
&\delta \int V \mathrm{d}x \\
= &\int w \mathrm{d}x \quad \left(N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} - \text{etc.}\right) \\
&+ \; V\delta x \; + w\left(P - \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} + \text{etc.}\right) \\
&\qquad\qquad + \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\left(Q - \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} - \text{etc.}\right) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\left(R - \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} + \text{etc.}\right) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\left(S - \text{etc.}\right) \\
&\qquad\qquad + \text{etc.},
\end{aligned}
$$

die Gestalt welcher Form aus der Betrachtung allein sofort klar ist, sodass eine weitere Illustration nicht von Nöten ist.

KOROLLAR 1

§86 Dieser Ausdruck wird um Vieles vereinfacht, wenn das Element $\mathrm{d}x$ konstant genommen wird, wodurch freilich die Allgemeinheit des Ausdrucks in keinster Weise eingeschränkt wird; dann wird nämlich werden

$$\begin{aligned}\delta\int V\mathrm{d}x = \int w\mathrm{d}x\left(N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}^4S}{\mathrm{d}x^4} + \text{etc.}\right)\\
+V\delta x + w\left(P - \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}R}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}\right)\\
+\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\left(Q - \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}S}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.}\right)\\
+\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2}\left(R - \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} + \text{etc.}\right)\\
+\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3}\left(S - \text{etc.}\right)\\
+\text{etc.}\end{aligned}$$

KOROLLAR 2

§87 Wenn die Frage über eine gekrümmte Linie gestellt wird, vereinigt der erste Integralteil den Wert durch die ganze Kurve hindurch von Anfang an bis hin zur Grenze, wo die die Koordinaten x und y bestehen, und umfasst zugleich alle in den einzelnen Punkten getätigten Variationen, während die übrigen absoluten Teile nur durch die in den Extremitäten gemachten Variationen bestimmt werden.

KOROLLAR 3

§88 Wenn wir die durch x und y bestimmte Kurve als gegeben ansehen und eine andere von ihr unendlich wenig abweichende Kurve betrachtet wird, während in den einzelnen Punkten jeder der beiden Koordinaten irgendwelche Variationen zugeteilt werden, zeigt der gefundene Ausdruck auf, wie sehr der aus der variierten Kurve errechnete Wert der Integralformel $\int V\mathrm{d}x$ denselben aus der Kurve selbst entnommenen Wert übersteigt.

KOROLLAR 4

§89 Weil $w = \delta y - p\delta x$ ist, ist klar, dass diese Größe w verschwindet, wenn in den einzelnen Punkten die Variationen δx und δy so angenommen werden, dass gilt

$$\delta y : \delta x = p : 1 = \mathrm{d}y : \mathrm{d}x.$$

In diesem Fall weicht also die variierte Kurve überhaupt nicht von der gegebenen Kurve ab und die ganze Variation der Formel $\int V \mathrm{d}x$ wird auf $V\delta x$ zurückgeführt.

Bemerkung 1

§90 Diese für die Integralformel $\int V \mathrm{d}x$ gefundene Variation liefert sofort die Regel, die ich einst für das Finden einer Kurve angegeben habe, in welcher der Wert derselben Integralformel maximal oder minimal ist. Jene Regel erfordert nämlich, dass dieser Ausdruck

$$N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}^4S}{\mathrm{d}x^4} - \text{etc.}$$

gleich Null gesetzt wird. Hier ist aber sofort ersichtlich, dass dafür, dass die Variation der Formel $\int V \mathrm{d}x$ verschwindet, wie es auch die Natur der Maxima und Minima erfordert, vor Allem verlangt wird, dass der erste im Integralzeichen enthaltene Teil verschwindet, woher

$$N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}^4S}{\mathrm{d}x^4} - \text{etc.} = 0$$

wird. Außerdem aber müssen auch die absoluten Teile gleich Null werden, worin die Anpassung an jede der beiden Grenzen der Kurve enthalten ist. Denn die Natur der Kurve selbst wird durch jene Gleichung ausgedrückt; weil diese wegen der Differentiale höheren Grades genauso viele Integrationen und genauso viele beliebige Konstanten verwickelt, werden jene absoluten Teile zur Bestimmung dieser Konstanten dienen, sodass am Anfang wie am Ende die gesuchte Kurve gewissen Bedingungen gehorcht, wie beispielsweise zu gegebenen gekrümmten Linien hin beschränkt wird. Und wenn jene Gleichung eine differentiale vierter oder gar höherer Ordnung war, wird auch die Anzahl der absoluten Teile vermehrt werden, mit welchen bewirkt werden kann, dass die gesuchte Kurve nicht nur auf beiden Seiten zu gegebenen gekrümmten Linien hin begrenzt wird, sondern ebendort auch eine gewisse Ausrichtung, ja sogar, wenn sie zu höheren Differentialen ansteigt, ein gewisses Gesetz der Krümmung vorgeschrieben werden kann. Bei der Anpassung pflegt es aber immer sehr schön zu passieren, dass die Gestalt der Fragen selbst Bedingungen solcher Art involviert, denen durch die absoluten Anteile sehr angenehm Genüge geleistet werden kann.

BEMERKUNG 2

§91 Wie große Geheimnisse aber in dieser Form, die wir für die Variation der Integralformel $\int V\mathrm{d}x$ gefunden haben, verborgen liegen, lässt sich bei ihrer Anwendung auf Maxima und Minima um vieles erhellender aufzeigen; ich bemerke hier nur, dass der Integralteil notwendigerweise in diese Variation eingeht. Weil wir nämlich die Sache im weitesten Sinne aufgefasst haben, dass wir in den einzelnen Punkten der Kurve jeder der beiden Variablen x und y irgendwelche nach keinem Gesetz miteinander verbundenen Variationen zuteilen, kann es ganz und gar nicht geschehen, dass die Variation, die der ganzen Kurve entspricht, nicht zugleich von allen dazwischenliegenden Variationen abhängt, nachdem welche anders festgelegt wurden, es natürlich von Nöten ist, dass daher die Variation der ganzen Kurve eine Veränderung erfährt. Und hauptsächlich darin weicht die Variation von Integralformeln von der Variation von Ausdrücken solcher Art ab, wie wir sie im oberen Kapitel behandelt haben, die alleinig von der den letzten Elementen zugeteilten Variation abhängt. Daraus folgt klar ersichtlich, wenn die Größe V unter Umständen so beschaffen war, dass die Differentialformel $V\mathrm{d}x$ eine Integration zulässt, wobei keine Relation zwischen den Variablen x und y festgelegt wurde, und so die Integralformel $\int V\mathrm{d}x$ eine absolute Funktion der Größen x, y, p, q, r etc. sei, dass dann auch ihre Variation nur von der Variation der äußersten Elemente abhängen kann und so der Integralteil der Variation vollkommen verschwinden muss, woher das folgende außergewöhnliche Theorem gefolgert wird.

THEOREM 3

§92 *Wenn nach Setzen von $\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}p = q\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}q = r\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}r = s\mathrm{d}x$ etc. V eine Funktion solcher Art von x, y, p, q, r, s etc. war, dass, nachdem ihr Differential*

$$\mathrm{d}V = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + S\mathrm{d}s + etc.$$

gesetzt wurde,

$$N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}^4S}{\mathrm{d}x^4} - etc. = 0$$

war, dann wird für konstant angenommenes Element $\mathrm{d}x$ *die Differentialformel* $V\mathrm{d}x$ *per se integrierbar sein, wobei keine Relation zwischen den Variablen* x *und* y *festgelegt wurde, und ebenso umgekehrt.*

BEWEIS

Wenn galt

$$N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}^4S}{\mathrm{d}x^4} - \text{etc.} = 0,$$

dann verwickelt die Variation der Integralformel $\int V\mathrm{d}x$ eine Integralformel und hängt daher für jede Lage der Koordinaten x und y allein von den Variationen, die selbigen an der äußersten Grenze zugeteilt werden, ab, was keineswegs geschehen könnte, wenn sich die Formel $V\mathrm{d}x$ einer Integration widersetzte, deshalb weil dann die Variation darüber hinaus von allen dazwischen liegenden Variationen zugleich notwendigerweise abhinge; daher folgt, sooft jene Gleichung Geltung hat, dass genauso oft die Formel $V\mathrm{d}x$ eine Integration zulässt, sodass $\int V\mathrm{d}x$ eine gewisse und bestimmte Funktion der Größen x, y, p, q, r, s etc. sein wird. Sooft aber umgekehrt die Differentialformel $V\mathrm{d}x$ eine Integration zulässt und ihr Integral $\int V\mathrm{d}x$ deshalb eine tatsächliche Funktion der Größen x, y, p, q, r, s etc. ist, sooft hängt auch ihre Variation nur von äußersten Variationen von x und y ab und die dazwischen liegenden Variationen können sie in keinster Weise beeinflussen. Daher ist es nötig, dass der oben gefundene Integralteil der Variation verschwindet, was nicht geschehen kann, wenn nicht galt

$$N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}^4S}{\mathrm{d}x^4} - \text{etc.} = 0,$$

und so ist auch die Umkehrung des vorgelegten Theorems mit der Wahrheit verträglich.

KOROLLAR 1

§93 Man bestaune also dieses wunderbare Kriterium, mit dessen Hilfe eine Differentialformel von zwei Variablen, Differentiale welchen Grades auch immer in sie eingehen, beurteilt werden kann, ob sie integrierbar ist oder nicht. Es erstreckt sich also um vieles weiter als jenes hinreichend bekannte Kriterium, mit welchem die Integrierbarkeit von Differentialformeln ersten Grades erkannt zu werden pflegt.

Korollar 2

§94 Wenn zuerst also die Größe V nur eine Funktion von x und y, die kein Verhältnis von Differentialen involviert, ist, sodass gilt

$$\mathrm{d}V = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y,$$

dann lässt die Differentialformel $V\mathrm{d}x$ keine Integration zu, wenn nicht $N = 0$ ist, das heißt, wenn nicht V eine Funktion nur von x ist; dies ist freilich per se klar.

Korollar 3

§95 Nachdem aber eine Differentialformel dieser Art vorgelegt wurde $v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y$, gibt sie mit der Form $V\mathrm{d}x$ verglichen $V = v + pu$ wegen $\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x$ und daher

$$M = \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) + p\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right), \quad N = \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right) + p\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right) \quad \text{und} \quad P = u,$$

weil ja die Größen v und u keine Differentiale zu verwickeln angenommen werden. Es wird also sein

$$\mathrm{d}P = \mathrm{d}u = \mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + \mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right).$$

Daher, weil das Kriterium der Integrierbarkeit erfordert, dass gilt

$$N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = 0,$$

wird für diesen Fall sein

$$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right) + p\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right) - \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) - p\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right) = 0$$

oder

$$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right),$$

was das schon für gewöhnlich bekannte Kriterium ist.

BEMERKUNG 1

§94 Der Beweis dieses Theorems ist ganz und gar einzigartig, weil er aus der Lehre der Variationen hergeholt ist, die dennoch von diesem Gegenstand völlig verschieden ist; aber es steht kaum ein anderer Weg offen, zu seinem Beweis zu gelangen. Darauf ist aber hier die genauere Erkenntnis der Funktionen sorgsam zu bemerken, mit welcher wir gezeigt haben, dass die Integralformel $\int V\mathrm{d}x$ keinesfalls wie eine Funktion der Größen x, y, p, q, r etc. betrachtet werden kann, wenn sie nicht tatsächlich eine Integration zulässt. Denn die Natur von Funktionen hat immer diese hinzugefügte Eigenschaft, dass, sobald wie den Größen, die in sie eingehen, bestimmte Werte zugeteilt werden, die aus ihnen gebildete Funktion selbst einen bestimmten Wert erhält; wie beispielsweise die Funktion xy, wenn wir $x = 2$ und $y = 3$ setzen, den Wert 6 annimmt. Weit anders aber ereignet es sich bei der Integralformel $\int y\mathrm{d}x$, deren Wert für den Fall $x = 2$ und $y = 3$ keinesfalls angegeben werden kann, wenn nicht zwischen y und x eine gewisse Relation festgelegt wird; dann aber geht die Formel in eine Funktion einer einzigen Variable über. Die Natur von Integralformeln, die nicht integriert werden können, muss sorgfältig von der Natur der Funktionen unterschieden werden, weil Funktionen, sobald wie den variablen Größen, aus denen sie zusammengesetzt werden, bestimmte Werte zugeteilt werden, dann selbst auch bestimmte Werte erhalten, auch wenn die Variablen auf keine Weise voneinander abhängen; dies geschieht in keinster Weise bei Integralformeln, deren Bestimmung natürlich alle Zwischenwerte zugleich einschließt. Besonders ist aber die Lehre über Maxima und Minima aber auf diesen Unterschied ist gestützt, auf welche wir hier achten, wo Formeln, denen die Eigenschaft des Maximums oder Minimums zukommen muss, notwendigerweise Integrale solcher Art sein müssen, die per se keine Integration zulassen.

BEMERKUNG 2

§97 Zur größeren Illustration des Theorems wollen wir eine Integralformel $\int V\mathrm{d}x$ solcher Art betrachten, die per se integrierbar ist, und wir wollen eines Beispiels wegen

$$\int V\mathrm{d}x = \frac{x\mathrm{d}y}{y\mathrm{d}x} = \frac{xp}{y}$$

festlegen, so dass gilt

$$V = \frac{p}{y} - \frac{xpp}{yy} + \frac{xq}{y}$$

und daher diese Integralformel

$$\left(\frac{p}{y} - \frac{xpp}{yy} + \frac{xq}{y}\right) \mathrm{d}x$$

absolut integrierbar ist, und wir sollen sehen, ob unser Theorem diese Integrierbarkeit aufzeigt.

Wir wollen also die Größe V differenzieren und nach Vergleichen des Differentials mit der Form

$$\mathrm{d}V = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q$$

werden wir erhalten

$$M = -\frac{pp}{yy} + \frac{q}{y}, \quad N = -\frac{p}{yy} + \frac{2xpp}{y^3} - \frac{xq}{yy}, \quad P = \frac{1}{y} - \frac{2xp}{yy} \quad \text{und} \quad Q = \frac{x}{y}.$$

Weil nun gemäß des Theorems werden muss

$$N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2} = 0,$$

berechnen wir zuerst durch Differenzieren

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = -\frac{3p}{yy} + \frac{4xpp}{y^3} - \frac{2xq}{yy} \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{y} - \frac{xp}{yy},$$

dann aber

$$\frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{2p}{yy} + \frac{2xpp}{y^3} - \frac{xq}{yy}.$$

Also ist

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{p}{yy} + \frac{2xpp}{y^3} - \frac{xq}{yy},$$

welchem Wert die Größe N natürlich gleich ist.

Bemerkung 3

§98 Wann immer im Übrigen die Differentialformel $V\mathrm{d}x$ die Integration per se zulässt und daher nach Festlegen von

$$\mathrm{d}V = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + \text{etc.}$$

gemäß des Theorems gilt

$$N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}^4S}{\mathrm{d}x^4} - \text{etc.} = 0,$$

werden daher andere bemerkenswerte Folgerungen abgeleitet. Weil nämlich zuerst durch Multiplizieren mit $\mathrm{d}x$ und Integrieren wird

$$\int N\mathrm{d}x - P + \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{dd}R}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x^3} - \text{etc.} = A,$$

ist klar, dass auch die Formel $N\mathrm{d}x$ uneingeschränkt integrierbar ist. Weil darauf weiter wird

$$\int \mathrm{d}x\left(\int N\mathrm{d}x - P\right) + Q - \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}S}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.} = Ax + B,$$

lässt auch die Formel

$$\mathrm{d}x\left(\int N\mathrm{d}x - P\right)$$

eine Integration zu. Danach wird auch auf die gleiche Weise diese Form integrierbar sein

$$\mathrm{d}x\left(\int \mathrm{d}x\left(\int N\mathrm{d}x - P\right) + Q\right),$$

dann aber auch diese

$$\mathrm{d}x\left(\int \mathrm{d}x\left(\int \mathrm{d}x\left(\int N\mathrm{d}x - P\right) + Q\right) - R\right)$$

und so weiter. Daher folgern wir das nachstehende nicht weniger bemerkenswerte und in der Praxis äußerst nützliche Theorem.

Theorem 4

§99 *Wenn nach Festlegen von* $\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}p = q\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}q = r\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}r = s\mathrm{d}x$ *etc. eine Funktion solcher Art von* x, y, p, q, r, s *etc. war, dass die Differentialformel* $V\mathrm{d}x$ *per se integrierbar ist, dann werden auch nach Festlegen von*

$$\mathrm{d}V = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + S\mathrm{d}s + \mathit{etc.}$$

die folgenden Differentialformeln per se eine Integration zulassen:

I. *Die Formel* $N\mathrm{d}x$ *wird per se integrierbar sein, dann wird nach Festlegen von* $P - \int N\mathrm{d}x = \mathfrak{P}$*:*

II. *Die Formel* $\mathfrak{P}\mathrm{d}x$ *per se integrierbar sein; weiter wird nach Festlegen von* $Q - \int \mathfrak{P}\mathrm{d}x = \mathfrak{Q}$*:*

III. *Die Formel* $\mathfrak{Q}\mathrm{d}x$ *per se integrierbar sein; darauf wird nach Festlegen von* $R - \int \mathfrak{Q}\mathrm{d}x = \mathfrak{R}$*:*

IV. *Die Formel* $\mathfrak{R}\mathrm{d}x$ *per se integrierbar sein; weiter wird nach Festlegen von* $S - \int \mathfrak{R}\mathrm{d}x = \mathfrak{S}$*:*

V. *Die Formel* $\mathfrak{S}\mathrm{d}x$ *per se integrierbar sein und so weiter.*

Beweis

Die Gültigkeit dieses Theorems ist schon im vorhergehenden Paragraph aufgezeigt worden, woher zugleich klar ist, wenn alle diese Formeln eine Integration zulassen, dass auch die anfängliche $V\mathrm{d}x$ uneingeschränkt integrierbar sein wird.

Korollar 1

§100 Weil V eine Funktion dieser Größen ist

$$x, \quad y, \quad p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad q = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \quad r = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x} \quad \text{etc.},$$

können die durch Differentiation derivierten Größen M, N, P, Q, R etc. daher auch so dargeboten werden, dass gilt

$$M = \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right), \quad N = \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right), \quad P = \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}\right), \quad Q = \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}\right) \quad \text{etc.},$$

woher wegen der ersten Formel klar ist, wenn die Formel $V\mathrm{d}x$ integrierbar war, dass dann auch die Formel $(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y})\mathrm{d}x$ integrierbar sein wird.

KOROLLAR 2

§101 Darauf werden also auch derselben Begründung wegen diese Formel $(\frac{\mathrm{dd}V}{\mathrm{d}y^2})\mathrm{d}x$ und daher weiter diese $(\frac{\mathrm{d}^3V}{\mathrm{d}y^3})\mathrm{d}x$, $(\frac{\mathrm{d}^4V}{\mathrm{d}y^4})\mathrm{d}x$ etc. alle per se eine Integration zulassen.

KOROLLAR 3

§102 Weil nur so viele Buchstaben P, Q, R etc. vorhanden sind, Differentiale wie vielten Grades in der Formel $V\mathrm{d}x$ gefunden werden, und auch alle folgenden verschwinden, müssen die daher derivierten germanischen Buchstaben $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ etc. schließlich verschwinden oder in Funktionen der Größe x allein übergehen, weil anderenfalls die folgenden Integrationen nicht stattfinden könnten.

BEISPIEL

§103 *Es sei V eine Funktion solcher Art, dass sein wird*

$$\int V\mathrm{d}x = \frac{y(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)^{\frac{3}{2}}}{x\mathrm{d}x\mathrm{dd}y}.$$

Nach den Substitutionen

$$\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}p = q\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}q = r\mathrm{d}x$$

wird für dieses Beispiel die Funktion V so ausgedrückt werden

$$V = \frac{p(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xq} - \frac{y(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xxq} + \frac{3yp\sqrt{1+pp}}{x} - \frac{yr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xqq},$$

woher wir durch Differentation die folgenden Werte erhalten

$$\begin{aligned}
N &= -\frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xxq} + \frac{3p\sqrt{1+pp}}{x} - \frac{r(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xqq},\\
P &= \frac{(1+4pp)\sqrt{1+pp}}{xq} - \frac{3yp\sqrt{1+pp}}{xxq} + \frac{3y(1+2pp)}{x\sqrt{1+pp}} - \frac{3ypr\sqrt{1+pp}}{xqq},\\
Q &= -\frac{p(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xqq} + \frac{y(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xxqq} + \frac{2yr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xq^3},\\
R &= -\frac{y(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xqq}.
\end{aligned}$$

Nun muss also zuerst die Formel $N\mathrm{d}x$ integrierbar sein oder aber

$$-\frac{\mathrm{d}x(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xxq} + \frac{3p\mathrm{d}x\sqrt{1+pp}}{x} - \frac{\mathrm{d}q(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xqq},$$

woher sofort klar ist, dass dieses Integral sein wird

$$\int N\mathrm{d}x = \frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xq}.$$

Nun erhalten wir für die zweite Formel daher

$$\mathfrak{P} = P - \int N\mathrm{d}x = \frac{3pp\sqrt{1+pp}}{xq} - \frac{3yp\sqrt{1+pp}}{xxq} + \frac{3y(1+2pp)}{x\sqrt{1+pp}} - \frac{3ypr\sqrt{1+pp}}{xqq},$$

sodass diese Formel zu integrieren ist

$$\mathfrak{P}\mathrm{d}x = \frac{3p\mathrm{d}y\sqrt{1+pp}}{xq} - \frac{3yp\mathrm{d}x\sqrt{1+pp}}{xxq} + \frac{3y\mathrm{d}x(1+2pp)}{x\sqrt{1+pp}} - \frac{3yp\mathrm{d}q\sqrt{1+pp}}{xqq},$$

deren Integral oder zumindest ein Teil von diesem aus dem letzten Glied natürlich mit $\frac{3yp\sqrt{1+pp}}{xq}$ berechnet wird; weil deren Differential die ganze Formel ausschöpft, wird sein

$$\int \mathfrak{P}\mathrm{d}x = \frac{3yp\sqrt{1+pp}}{xq}.$$

Nun werden wir für die dritte Formel haben

$$\mathfrak{Q} = Q - \int \mathfrak{P}\mathrm{d}x = -\frac{p(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xqq} + \frac{y(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xxqq} + \frac{2yr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xq^3} - \frac{3yp\sqrt{1+pp}}{xq},$$

woher durch Multiplizieren mit $\mathrm{d}x$ wegen $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}p}{q}$ im letzten Glied wird

$$\mathfrak{Q}\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}y(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xqq} + \frac{y\mathrm{d}x(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xxqq} + \frac{2y\mathrm{d}q(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xq^3} - \frac{3yp\mathrm{d}p\sqrt{1+pp}}{xqq},$$

deren vorletztes Glied dieses Integral aufzeigt

$$\int \mathfrak{Q}\mathrm{d}x = -\frac{y(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{xqq}.$$

Die vierte Formel wird weiter so beschaffen sein

$$\mathfrak{R} = R - \int \mathfrak{Q}\mathrm{d}x = 0,$$

woher ersichtlich ist, dass nicht nur allein diese $\mathfrak{R}\mathrm{d}x$, sondern auch alle folgenden integrierbar sein werden.

Bemerkung

§104 Diese Theoreme scheine umso schöner, weil deren Beweis auf ein Prinzip solcher Art gestützt wird, dessen Art davon völlig fremd ist, deshalb weil bei diesen Wahrheiten nicht weiter eine Spur der Variationen zu finden ist; daher besteht kein Zweifel, dass der Beweis auch aus einer anderen natürlicheren Quelle geschöpft werden kann [§96].

Kapitel 4
Über die Variation zwei Variablen involvierender zusammengesetzter Integralformeln

Leonhard Euler

Problem 8

§105 *Wenn nach Setzen von $v = \int \mathfrak{V} \mathrm{d}x$, während $\mathfrak{V}$ irgendeine Funktion der zwei Variablen x, y und deren Differentialen*

$$\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}p = q\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}q = r\mathrm{d}x \quad \textit{etc.}$$

ist, V irgendeine Funktion von v bezeichnet, die Variation der zusammengesetzten Integralformel $\int V\mathrm{d}x$ zu finden.

Lösung

Weil die Größe v selbst eine Integralformel $\int \mathfrak{V}\mathrm{d}x$ ist, ist die Formel $\int V\mathrm{d}x$ natürlich zusammengesetzt. Weil also die Funktion V allein die Größe v zu involvieren festgelegt wird, wollen wir $\mathrm{d}V = L\mathrm{d}v$ setzen; dann aber wird für die Funktion $\mathfrak{V}$ ihr Differential sein

$$\mathrm{d}\mathfrak{V} = \mathfrak{M}\mathrm{d}x + \mathfrak{N}\mathrm{d}y + \mathfrak{P}\mathrm{d}p + \mathfrak{Q}\mathrm{d}q + \mathfrak{R}\mathrm{d}r + \text{etc.}$$

Weil nach Festlegen dieser die gesuchte Variation

$$\delta \int V\mathrm{d}x = \int \delta(V\mathrm{d}x) = \int (\delta V\mathrm{d}x + V\mathrm{d}\delta x)$$

ist, ist durch die oben [§77] verwendete Reduktion

$$\delta\int V\mathrm{d}x = V\delta x + \int(\mathrm{d}x\delta V - \mathrm{d}V\delta x)\,.$$

Weil aber per Annahme $\mathrm{d}V = L\mathrm{d}v$ ist, wird für die Variation $\delta V = L\delta v$ sein; aber wegen $v = \int \mathfrak{V}\mathrm{d}x$ wird zuerst $\mathrm{d}v = \mathfrak{V}\mathrm{d}x$ und daher $\mathrm{d}V = L\mathfrak{V}\mathrm{d}x$ sein, dann aber

$$\delta v = \delta\int\mathfrak{V}\mathrm{d}x = \mathfrak{V}\delta x + \int(\mathrm{d}x\delta\mathfrak{V} - \mathrm{d}\mathfrak{V}\delta x)$$

und darum

$$\delta V = L\mathfrak{V}\delta x + L\int(\mathrm{d}x\delta\mathfrak{V} - \mathrm{d}\mathfrak{V}\delta x),$$

und daher

$$\delta\int V\mathrm{d}x = V\delta x + \int\left(L\mathfrak{V}\mathrm{d}x\delta x + L\mathrm{d}x\int(\mathrm{d}x\delta\mathfrak{V} - \mathrm{d}\mathfrak{V}\delta x) - L\mathfrak{V}\mathrm{d}x\delta x\right)$$

oder

$$\delta\int V\mathrm{d}x = V\delta x + \int L\mathrm{d}x\int(\mathrm{d}x\delta\mathfrak{V} - \mathrm{d}\mathfrak{V}\delta x)\,.$$

Aus dem vorhergehenden Kapitel [§86] ist aber klar, dass gilt

$$\begin{aligned}\int(\mathrm{d}x\delta\mathfrak{V} - \mathrm{d}\mathfrak{V}\delta x) &= \delta\int\mathfrak{V}\mathrm{d}x - \mathfrak{V}\delta x\\ &= \int w\mathrm{d}x\left(\mathfrak{N} - \frac{\mathrm{d}\mathfrak{P}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}^4 S}{\mathrm{d}x^4} - \text{etc.}\right)\\ &\quad + w\left(\mathfrak{P} - \frac{\mathrm{d}\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3\mathfrak{S}}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}\right)\\ &\quad + \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\left(\mathfrak{Q} - \frac{\mathrm{d}\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}\mathfrak{S}}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.}\right)\\ &\quad + \frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2}\left(\mathfrak{R} - \frac{\mathrm{d}\mathfrak{S}}{\mathrm{d}x} + \text{etc.}\right)\\ &\quad + \text{etc.}\end{aligned}$$

nachdem das Element $\mathrm{d}x$ konstant angenommen wurde und der Kürze wegen daher $w = \delta y - p\delta x$ gesetzt wurde.

Aber weil daher die Substitution nur Mühe verursacht, wird es besser sein, die Sache aus der ersten Quelle herzuholen. Weil also aus dem Differential und der Variation der Größe $\mathfrak{V}$ wird

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x\delta\mathfrak{V} - \mathrm{d}\mathfrak{V}\delta x =&\mathrm{d}x\,(\mathfrak{M}\delta x + \mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.})\\ &-\delta x\,(\mathfrak{M}\mathrm{d}x + \mathfrak{N}\mathrm{d}y + \mathfrak{P}\mathrm{d}p + \mathfrak{Q}\mathrm{d}q + \mathfrak{R}\mathrm{d}r + \text{etc.})\,,\end{aligned}$$

wird wegen

$$\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}p = q\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}q = r\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}r = s\mathrm{d}x \quad \text{etc.}$$

dann sein

$$\mathrm{d}x\delta\mathfrak{B} - \mathrm{d}\mathfrak{B}\delta x = \mathfrak{N}\mathrm{d}x\,(\delta y - p\delta x) + \mathfrak{P}\mathrm{d}x\,(\delta p - q\delta x) + \mathfrak{Q}\mathrm{d}x\,(\delta q - r\delta x) + \text{etc.}$$

Aber wegen des konstanten dx aus §79 wird sein

$$\delta y - p\delta x = w, \;\; \delta p - q\delta x = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}, \;\; \delta q - r\delta x = \frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2}, \;\; \delta r - s\delta x = \frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3}, \;\; \text{etc.},$$

und so wird man haben

$$\mathrm{d}x\delta\mathfrak{B} - \mathrm{d}\mathfrak{B}\delta x = \mathfrak{N}w\mathrm{d}x + \mathfrak{P}\mathrm{d}w + \mathfrak{Q}\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x} + \mathfrak{R}\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^2} + \mathfrak{S}\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.},$$

dessen Integral freilich den oberen Ausdruck liefert. Es werde nun das Integral $\int L\mathrm{d}x = I$ gesetzt und es wird sein

$$\delta\int V\mathrm{d}x = V\delta x + I\int(\mathrm{d}x\delta\mathfrak{B} - \mathrm{d}\mathfrak{B}\delta x) - \int I\,(\mathrm{d}x\delta\mathfrak{B} - \mathrm{d}\mathfrak{B}\delta x)\,.$$

Nun wird aber leicht [§81-85] berechnet, dass gelten wird

$$\begin{aligned}\int I\,(\mathrm{d}x\delta\mathfrak{B} - \mathrm{d}\mathfrak{B}\delta x) = \int w\mathrm{d}x & \left(I\mathfrak{N} - \frac{\mathrm{d}.I\mathfrak{P}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}.I\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3.I\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}\right)\\ & + w\left(I\mathfrak{P} - \frac{\mathrm{d}.I\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}.I\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x^2} + \text{etc.}\right)\\ & + \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\left(I\mathfrak{Q} - \frac{\mathrm{d}.I\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x} + \text{etc.}\right)\\ & + \text{etc.},\end{aligned}$$

woher nach der Substitution die gesuchte Variation gefolgert wird

$$\begin{aligned}
\delta \int V \mathrm{d}x = V\delta x + I \int w \mathrm{d}x & \left(\mathfrak{N} - \frac{\mathrm{d}\mathfrak{P}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \right) \\
& - \int w \mathrm{d}x \left(I\mathfrak{N} - \frac{\mathrm{d}.I\mathfrak{P}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}.I\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3.I\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \right) \\
& + Iw \left(\mathfrak{P} - \frac{\mathrm{d}\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3\mathfrak{S}}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \right) \\
& - w \left(I\mathfrak{P} - \frac{\mathrm{d}.I\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}.I\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3.I\mathfrak{S}}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \right) \\
& - \frac{I\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \left(\mathfrak{Q} - \frac{\mathrm{d}\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}\mathfrak{S}}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.} \right) \\
& - \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \left(I\mathfrak{Q} - \frac{\mathrm{d}.I\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}.I\mathfrak{S}}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.} \right) \\
& + \frac{I\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} \left(\mathfrak{R} - \frac{\mathrm{d}\mathfrak{S}}{\mathrm{d}x} + \text{etc.} \right) \\
& - \frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} \left(I\mathfrak{R} - \frac{\mathrm{d}.I\mathfrak{S}}{\mathrm{d}x} + \text{etc.} \right) \\
& + \frac{I\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} \left(\mathfrak{S} - \text{etc.} \right) \\
& - \frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} \left(I\mathfrak{S} - \text{etc.} \right) \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Wenn hier die zwei ersten differentierten Teil wiederum integriert werden, werden wir nach Reduktion der Übrigen, indem wir anstelle von dI wieder den Wert Ldx einsetzen, erhalten

$$\begin{aligned}\delta \int V\mathrm{d}x = V\delta x &+ \int L\mathrm{d}x \int w\mathrm{d}x \left(\mathfrak{N} - \frac{\mathrm{d}\mathfrak{P}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}\right)\\
&+ \int w\mathrm{d}x \left(L\mathfrak{P} - \frac{L\mathrm{d}\mathfrak{Q} + \mathrm{d}.L\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x} + \frac{L\mathrm{dd}\mathfrak{R} + \mathrm{d}.L\mathrm{d}\mathfrak{R} + \mathrm{dd}.L\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.}\right)\\
&+ w\left(L\mathfrak{Q} - \frac{L\mathrm{d}\mathfrak{R} + \mathrm{d}.L\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x} + \frac{L\mathrm{dd}\mathfrak{S} + \mathrm{d}.L\mathrm{d}\mathfrak{S} + \mathrm{dd}.L\mathfrak{S}}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.}\right)\\
&+ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\left(L\mathfrak{R} - \frac{L\mathrm{d}\mathfrak{S} + \mathrm{d}.L\mathfrak{S}}{\mathrm{d}x} + \text{etc.}\right)\\
&+ \frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2}\left(L\mathfrak{S} - \text{etc.}\right)\\
&+ \text{etc.,}\end{aligned}$$

welche Form die einfachste und zum Gebrauch am meisten geeignetste zu sein scheint.

KOROLLAR 1

§106 Wenn eine Relation solcher Art zwischen x und y gesucht wird, dass das Integral $\int V\mathrm{d}x$ ein Maximum oder Minimum wird, müssen die Integralanteile der Variation gleich Null werden; dies kann im Allgemeinen nicht geschehen, sondern es muss auf die Grenze, bis wohin auch das Integral $\int V\mathrm{d}x$ erstreckt wird, geachtet werden; wenn wir für diese festlegen, dass $I = \int L\mathrm{d}x = A$ wird, folgern wir aus der ersten Form diese Gleichung

$$0 = (A - I)\mathfrak{N} - \frac{\mathrm{d}.(A-I)\mathfrak{P}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}.(A-I)\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3.(A-I)\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}$$

KOROLLAR 2

§107 Wie auch immer aber diese Gleichung für jeden sich ergebenden Fall behandelt wird, es ist immer schließlich dorthin zu gelangen, dass die Integralformel $I = \int L\mathrm{d}x$ durch Differentiation beiseite geschafft wird, mit welcher Operation zugleich die Größe A herausgestoßen zu werden ersichtlich ist; und so wird die resultierende Gleichung nicht weiter von der Integrationsgrenze abhängen.

Korollar 3

§108 Wenn wir daher im Allgemeinen für die zu findende Variation der Integralformel $\int V\mathrm{d}x$ den dem ganzen Integral $\int L\mathrm{d}x = I$ entsprechenden Wert gleich A setzen, wird die gesuchte Variation so ausgedrückt werden

$$\begin{aligned}
&\delta \int V\mathrm{d}x = V\delta x \\
&+ \int w\mathrm{d}x \left((A-I)\mathfrak{N} - \frac{\mathrm{d}.(A-I)\mathfrak{P}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}.(A-I)\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3.(A-I)\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \right) \\
&+ w \left(L\mathfrak{Q} - \frac{L\mathrm{d}\mathfrak{R} + \mathrm{d}.L\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x} + \frac{L\mathrm{dd}\mathfrak{S} + \mathrm{d}.L\mathrm{d}\mathfrak{S} + \mathrm{dd}.L\mathfrak{S}}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.} \right) \\
&+ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \left(L\mathfrak{R} - \frac{L\mathrm{d}\mathfrak{S} + \mathrm{d}.L\mathfrak{S}}{\mathrm{d}x} + \text{etc.} \right) \\
&+ \frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} \left(L\mathfrak{S} - \text{etc.} \right) \\
&+ \text{etc.},
\end{aligned}$$

wo $A - I$ der Wert der Integralformel $\int L\mathrm{d}x$ ist, der von der äußersten Integrationsgrenze aus bis hinzu einen gewissen Mittelpunkt in rückwärtiger Richtung genommen wurde.

Bemerkung

§109 In der Lösung dieses Problems offenbart sich eine Abkürzung, mit welcher auch die im oberen Kapitel verwendete Analysis nicht unwesentlich zusammengezogen werden kann. Weil wir nämlich dort [§79] zu dieser Formel gelangt waren

$$\delta \int V\mathrm{d}x = V\delta x + \int (\mathrm{d}x\delta V - \mathrm{d}V\delta x),$$

wird wegen

$$\mathrm{d}V = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + \text{etc.}$$

und

$$\delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}$$

sein

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,(M + Np + Pq + Qr + Rs + \text{etc.}),$$

und daher wird gefolgert

$$\mathrm{d}x\delta V - \mathrm{d}V\delta x = \mathrm{d}x\left(N(\delta y - p\delta x) + P(\delta p - q\delta x) + Q(\delta q - r\delta x) + \text{etc.}\right).$$

Wenn nun der Kürze wegen $\delta y - p\delta x = w$ gesetzt wird, wird durch Differentieren sein

$$\delta(p\mathrm{d}x) - q\mathrm{d}x\delta x - p\delta\mathrm{d}x = \mathrm{d}w;$$

aber es ist

$$\delta(p\mathrm{d}x) = p\mathrm{d}\delta x + \delta p\mathrm{d}x,$$

also

$$\delta p - q\delta x = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}.$$

Auf die gleiche Weise wird, indem diese Formel differentiert wird, wegen $\mathrm{d}p = q\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}q = r\mathrm{d}x$ sein

$$q\mathrm{d}\delta x + \delta q\mathrm{d}x - q\mathrm{d}\delta x - \mathrm{d}q\delta x = \mathrm{d}x(\delta q - r\delta x) = \mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x},$$

woher klar ist, dass für $\delta y - p\delta x = w$ gesetzt sein wird

$$\delta p - q\delta x = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}, \quad \delta q - r\delta x = \frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\cdot\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x^2}$$

und für konstant genommenes $\mathrm{d}x$

$$\delta r - s\delta x = \frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3}$$

etc.

Deshalb wird sein

$$\mathrm{d}x\delta V - \mathrm{d}V\delta x = \mathrm{d}x\left(Nw + \frac{P\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{Q\mathrm{d}\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{R\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3} + \frac{S\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} + \text{etc.}\right),$$

wenn freilich das Differential $\mathrm{d}x$ konstant angenommen wird.

PROBLEM 9

§110 *Wenn $v = \int \mathfrak{V} \mathrm{d}x$ war, während gilt*

$$\mathrm{d}\mathfrak{V} = \mathfrak{M}\mathrm{d}x + \mathfrak{N}\mathrm{d}y + \mathfrak{P}\mathrm{d}p + \mathfrak{Q}\mathrm{d}q + \mathfrak{R}\mathrm{d}r + etc.,$$

dann aber V irgendeine Funktion nicht nur der Größen

$$x, \quad y, \quad p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad q = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \quad r = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x} \quad etc.$$

ist, sondern auch die Integralformel $v = \int \mathfrak{V}\mathrm{d}x$ verwickelt, die Variation der zusammengesetzten Integralformel $\int V\mathrm{d}x$ zu finden.

LÖSUNG

Weil ja V eine Funktion der Größen v, x, y, p, q, r, s etc. ist, werde ihr Differential genommen, das dieses sei

$$\mathrm{d}V = L\mathrm{d}v + M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + \text{etc.},$$

und man wird die Variation von V so ausgedrückt haben

$$\delta V = L\delta v + M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.};$$

dann werde aber bemerkt, dass wegen

$$\mathrm{d}v = \mathfrak{V}\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}y = p\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}p = q\mathrm{d}x \quad \text{etc.}$$

auch gilt

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,(L\mathfrak{V} + M + Np + Pp + Qr + Rs + \text{etc.})$$

und

$$\delta\mathfrak{V} = \mathfrak{M}\delta x + \mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.}$$

Außerdem haben wir

$$\delta v = \int (\mathfrak{V}\mathrm{d}\delta x + \mathrm{d}x\delta\mathfrak{V}) = \mathfrak{V}\delta x + \int (\mathrm{d}x\delta\mathfrak{V} - \mathrm{d}\mathfrak{V}\delta x),$$

woher nach Setzen von $\delta y - p\delta x = w$ durch das zuvor Gefundene sein wird

$$\mathrm{d}v = \mathfrak{V}\delta x + \int \mathrm{d}x \left(\mathfrak{N}w + \frac{\mathfrak{P}\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathfrak{Q}\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathfrak{R}\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}\right),$$

wo wir zur Gefälligkeit also dx konstant angenommen haben.

Nach Vorbereiten dieser Dinge, da die gesuchte Variation ist

$$\delta \int V \mathrm{d}x = V\delta x + \int (\mathrm{d}x\delta V - \mathrm{d}V\delta x),$$

damit wir die oben gefundene Reduktion gebrauchen können, wollen wir festlegen

$$\mathrm{d}V = L\mathrm{d}v + \mathrm{d}W,$$

sodass gilt

$$\delta V = L\delta v + \delta W \quad \text{und} \quad \mathrm{d}W = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + \text{etc.}$$

Deswegen werden wir diese Form erhalten

$$\delta \int V\mathrm{d}x = V\delta x + \int (L\mathrm{d}x\delta v - L\mathrm{d}v\delta x) + \int (\mathrm{d}x\delta W - \mathrm{d}W\delta x),$$

wo ist

$$\mathrm{d}x\delta W - \mathrm{d}W\delta x = \mathrm{d}x\left(Nw + \frac{P\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{Q\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{R\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}\right).$$

Dann aber ist

$$\mathrm{d}x\delta v - \mathrm{d}v\delta x = \mathrm{d}x\int \mathrm{d}x\left(\mathfrak{N}w + \frac{\mathfrak{P}\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathfrak{Q}\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathfrak{R}\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}\right)$$

wegen $\mathrm{d}v\delta x = \mathfrak{V}\mathrm{d}x\delta x$. Nach Einsetzen dieser wird die gesuchte Variation berechnet

$$\begin{aligned}\delta \int V\mathrm{d}x = V\delta x &+ \int L\mathrm{d}x\int \mathrm{d}x\left(\mathfrak{N}w + \frac{\mathfrak{P}\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathfrak{Q}\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathfrak{R}\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}\right)\\ &+ \int \mathrm{d}x\left(N + \frac{P\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{Q\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{R\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}\right).\end{aligned}$$

Damit wir nun diese Form weiter reduzieren, wollen wir das Integral $\int L\mathrm{d}x = I$ so genommen festlegen, dass es für den Anfang, von wo aus das Integral $\int V\mathrm{d}x$ genommen wird, verschwindet, für das Ende, wo das Integral $\int V\mathrm{d}x$

begrenzt wird, $I = A$ wird; und so wird werden

$$\delta \int V \mathrm{d}x = V\delta x + A \int \mathrm{d}x \left(\mathfrak{N}w + \frac{\mathfrak{P}\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathfrak{Q}\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathfrak{R}\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \right)$$
$$- \int I \mathrm{d}x \left(\mathfrak{N}w + \frac{\mathfrak{P}\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathfrak{Q}\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathfrak{R}\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \right)$$
$$+ \int \mathrm{d}x \left(Nw + \frac{P\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{Q\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{R\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \right),$$

um welche Form zusammenzuziehen wir festlegen wollen

$$\begin{aligned} N + (A-I)\mathfrak{N} &= N', \\ P + (A-I)\mathfrak{P} &= P', \\ Q + (A-I)\mathfrak{Q} &= Q', \\ R + (A-I)\mathfrak{R} &= R' \\ &\text{etc.,} \end{aligned}$$

dass die Form jener, die wir oben [§79-85] behandelt haben, ähnlich hervorgeht

$$\delta \int V \mathrm{d}x = V\delta x + \int \mathrm{d}x \left(N'w + \frac{P'\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{Q'\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{R'\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \right);$$

wenn also dort hinter dem Integralzeichen die Differentiale von w eliminiert werden, werden wir gemäß §86 zu diesem Ausdruck gelangen

$$\begin{aligned} \delta \int V \mathrm{d}x = & \int w \mathrm{d}x \left(N' - \frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}Q'}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3 R'}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}^4 S'}{\mathrm{d}x^4} - \text{etc.} \right) \\ & + \quad V\delta x \quad + w \left(P' - \frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}R'}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3 S'}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \right) \\ & + \text{Konst.} \quad + \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \left(Q' - \frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}S'}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.} \right) \\ & \qquad + \frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} \left(R' - \frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x} + \text{etc.} \right) \\ & \qquad + \frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3} \left(S' - \text{etc.} \right) \\ & \qquad + \text{etc.} \end{aligned}$$

Der durch Integration eingeführten Konstante muss aber ein Wert solcher Art zugeteilt werden, dass für den Anfang der Integration die absoluten Teile der

Formel $\delta \int V\mathrm{d}x$ auf Null gebracht werden, wenn freilich der erste Integralteil so genommen wird, dass er für denselben Anfang verschwindet; dann aber muss der ganze Ausdruck zur Grenze der Integration hin fortgeführt werden, für die wir ja $\int L\mathrm{d}x = I = A$ zu werden festgelegt haben.

Korollar 1

§111 Im Integralanteil muss die Variabilität durch die ganze Erstreckung der Integration hindurch erfasst werden, in den absoluten Teilen genügt es aber, auf den Anfang und das Ende der Integration geachtet zu haben, für jede der beiden Grenzen liefern aber die vorgeschrieben Bedingungen der Variation die Werte δx, w, $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2}$ etc. Und nachdem aus den Anfangsbedingungen die Konstante in entsprechender Weise bestimmt worden ist, ist dann nur übrig, dass die einzelnen Glieder an das Ende der Integration angepasst werden.

Korollar 2

§112 Für den Anfang der Integration, wo $I = 0$ ist, wird zuerst sein

$$N' = N + A\mathfrak{N}, \quad P' = P + A\mathfrak{P}, \quad Q' = Q + A\mathfrak{Q}, \quad R' = R + A\mathfrak{R} \quad \text{etc.},$$

für die Differentiale wird aber wegen $\mathrm{d}I = L\mathrm{d}x$ gelten

$$\frac{\mathrm{d}N'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} + \frac{A\mathrm{d}\mathfrak{N}}{\mathrm{d}x} - L\mathfrak{N}$$

und so von den übrigen und auf gleiche Weise für die zweiten Differentiale

$$\frac{\mathrm{dd}N'}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{dd}N}{\mathrm{d}x^2} + \frac{A\mathrm{dd}\mathfrak{N}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{2L\mathrm{d}\mathfrak{N}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathfrak{N}\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}.$$

Korollar 3

§113 Für das Ende der Integration aber, wo $I = A$ ist, wird sein

$$N' = N, \quad P' = P, \quad Q' = Q, \quad R' = R \quad \text{etc.},$$

die Differentialwerte werden sich aber so verhalten

$$\frac{\mathrm{d}N'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} - L\mathfrak{N}, \quad \frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} - L\mathfrak{P}, \quad \frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} - L\mathfrak{Q} \quad \text{etc.},$$

die zweiten Grades aber auf diese Weise

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{dd}N'}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{dd}N}{\mathrm{d}x^2} - \frac{2L\mathrm{d}\mathfrak{N}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathfrak{N}\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}, \\ \frac{\mathrm{dd}P'}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{dd}P}{\mathrm{d}x^2} - \frac{2L\mathrm{d}\mathfrak{P}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathfrak{P}\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} \end{aligned}$$

und so weiter.

Bemerkung 1

§114 Obwohl die Natur der Variationen und auch der sich dorthin erstreckenden Fragen schon zu Genüge erläutert worden ist, scheinen dennoch so die Schwierigkeit wie die Neuheit dieses Gegenstandes eine weitere Illustration zu verlangen, weil es nicht einmal überflüssig wäre, dass dasselbe öfter erwähnt wird. Weil wir also schon zuvor die Geometrie und die Anwendung dieses Kalküls auf die Maxima und Minima gebraucht haben, werden wir, um diese Lehre noch mehr zu erläutern, die Sache hier allgemeiner für die Analysis allein betrachten.

Zuerst wird also irgendeine Relation zwischen den zwei Variablen x und y aufgefasst, ob sie bekannt ist oder erst zu bestimmen ist, und daraus gebildet wird dann irgendeine Integralformel $\int V\mathrm{d}x$ betrachtet, die innerhalb gewisser Grenzen erfasst oder nach Erstreckung der Integration von einem gegebenen Anfang zu einem gegebenen Ende natürlich einen gewissen Wert erhalten muss. Dann aber werde jene Relation zwischen x und y, was für eine auch immer sie war, unendlich wenig verändert, dass den einzelnen um irgendwelche Variationen δx vermehrten x nun dieselben auch um irgendwelche δy vermehrten y entsprechen, wobei freilich zu bemerken ist, dass am Anfang wie am Ende das Verhältnis dieser Variationen durch die Bedingungen der Frage gegeben ist, in der Mitte aber diese Variationen so allgemein angenommen werden, dass sie nach überhaupt keinem Gesetz miteinander verbunden sind. Dann wird aus dieser variierten Relation der Wert derselben Integralformel $\int V\mathrm{d}x$, von demselben Anfang aus bis hin zum selben Ende erstreckt oder innerhalb derselben Grenzen enthalten, bestimmt zu werden aufgefasst, und die ganze Frage handelt nun davon, dass der Übertrag dieses letzten variierten Wertes über jenen ersten Wert der Formel $\int V\mathrm{d}x$ gefunden wird. Weil dieser Übertrag durch $\delta \int V\mathrm{d}x$, welche Form die Variation der Formel $\int V\mathrm{d}x$ ist, gekennzeichnet wird, haben wir bisher eine sich soweit erstreckende Lösung dieser Frage angegeben, dass alle Fälle, in denen die Größe V irgendeine Funktion nicht nur von x, y, p, q, r, s etc. ist, sondern auch darüber hinaus eine gewisse Integralformel $v = \int \mathfrak{V}\mathrm{d}x$ irgendwie involviert, in sich umfasst.

BEMERKUNG 2

§115 Was wir im vorhergehenden Kapitel stillschweigend über die der gefundenen Variation hinzuzufügenden Konstante angenommen haben, welche natürlich der Integralanteil der Variation von selbst involviert, scheint es ratsam, dies in der Lösung dieses Problems genauer zu erläutern. Weil natürlich bei allen Fragen dieser Art, die auf Integralformeln zurückgeführt werden, immer auf die Integrationsgrenzen zu achten ist, weil ja das Integral nichts anderes ist außer die Summe der Elemente, die von einer gegebenen Grenze oder Anfang bis zu einer anderen Grenze oder Ende fortgesetzt wurden, ist diese Betrachtung vollkommen unerlässlich für die jede Integration, ohne welche die Idee des Integrals nicht einmal bestehen bleiben kann. Deswegen, nach Festlegen der Integrationsgrenzen, natürlich Anfang und Ende, sobald wie der Integralanteil der Integration so angenommen worden ist, dass er für den Anfang verschwindet, muss dann auch eine Konstante solcher Art hinzugefügt werden, dass auch die absoluten Anteile für denselben Anfang aufgehoben werden und so der ganze Ausdruck der Variation zu Null gemacht wird. Nachdem dies getan worden ist, lässt sich zum Ende der Integration fortschreiten, sodass auf diese Weise die wahre Variation der vom Anfang bis zum Ende erstreckten vorgelegten Integralformel erhalten wird.

Aber diese Lehre der Variationen kann auf Fragen zweier Arten angewendet werden; während in der einen eine gegebene Relation zwischen x und y angenommen wird und die Variation der ebenso gegebenen Integralformel $\int V\mathrm{d}x$ untersucht wird, nachdem durch die ganze Erstreckung der Integration den Variablen x und y irgendwelche Variationen zugeteilt worden sind, in der anderen Art aber jene Relation der Variablen x und y selbst gesucht wird, dass die Variation der Integralformel $\int V\mathrm{d}x$ mit einer gewissen Eigenschaft versehen ist; wie wenn die Formel einen maximalen oder minimalen Wert erhalten muss, ist es nötig, dass diese Variation verschwindet. Dort ergeben sich wiederum zwei Fälle, je nachdem ob ein Maximum oder ein Minimum Geltung haben muss, ob nun x und y irgendwelche Variationen zugeteilt werden oder ob diese Variationen einem gewissen Gesetz unterworfen werden. Daher ist klar, dass diese Theorie sich um Vieles weiter erstreckt, als sie freilich bis jetzt verwendet wurde.

PROBLEM 10

§116 *Wenn die Funktion V außer den zwei Variablen x, y mit ihren Differentialwerten*

$$p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad q = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \quad r = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x} \quad \textit{etc.}$$

auch zwei oder mehrere Integralformel

$$v = \int \mathfrak{V}\mathrm{d}x, \quad v' = \int \mathfrak{V}'\mathrm{d}x \quad \textit{etc.}$$

involviert, sodass gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathfrak{V} &= \mathfrak{M}\mathrm{d}x + \mathfrak{N}\mathrm{d}y + \mathfrak{P}\mathrm{d}p + \mathfrak{Q}\mathrm{d}q + \mathfrak{R}\mathrm{d}r + \textit{etc.}, \\ \mathrm{d}\mathfrak{V}' &= \mathfrak{M}'\mathrm{d}x + \mathfrak{N}'\mathrm{d}y + \mathfrak{P}'\mathrm{d}p + \mathfrak{Q}'\mathrm{d}q + \mathfrak{R}'\mathrm{d}r + \textit{etc.} \end{aligned}$$

und nach Nehmen des Differentials auch

$$\mathrm{d}V = L\mathrm{d}v + L'\mathrm{d}v' + M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + \textit{etc.},$$

so die Variation der Integralformel $\int V\mathrm{d}x$ zu finden.

LÖSUNG

Wenn die Lösung dieses Problems auf dieselbe Weise unternommen wird wie die des vorhergehenden, wird bald klar werden, dass die Rechnung von den zwei Integralformeln

$$v = \int \mathfrak{V}\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad v' = \int \mathfrak{V}'\mathrm{d}x$$

nicht gestört wird und auch nicht, wenn mehrere solcher Art involviert werden würden. Daher wird die ganze Lösung schließlich darauf zurückgehen, dass nach Festlegen der Integrationsgrenzen zuerst die Integrale

$$\int L\mathrm{d}x = I \quad \text{und} \quad \int L'\mathrm{d}x = I'$$

so zu nehmen sind, dass sie für den Anfang der Integration verschwinden, dann aber für das Ende der Integration $I = A$ und $I' = A'$ wird; nach Finden dieser Größen werde weiter festgelegt

$$\begin{aligned}
N + (A-I)\mathfrak{N} + (A'-I')\mathfrak{N}' &= N',\\
P + (A-I)\mathfrak{P} + (A'-I')\mathfrak{P}' &= P',\\
Q + (A-I)\mathfrak{Q} + (A'-I')\mathfrak{Q}' &= Q',\\
R + (A-I)\mathfrak{R} + (A'-I')\mathfrak{R}' &= R'\\
&\text{etc.,}
\end{aligned}$$

und es wird die gesuchte Variation, während jeder der beiden Variablen x und y irgendwelche Variationen zugeteilt wurden, aus den vorhergehenden Lösungen sein [§110]

$$\begin{aligned}
\delta\int V\mathrm{d}x = \int w\mathrm{d}x &\left(N' - \frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}Q'}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3R'}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}^4S'}{\mathrm{d}x^4} - \text{etc.}\right)\\
+ \quad V\delta x \quad &+ w\left(P' - \frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}R'}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3S'}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}\right)\\
+\,\text{konst.} \quad &+ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\left(Q' - \frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}S'}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.}\right)\\
&+ \frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2}\left(R' - \frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x} + \text{etc.}\right)\\
&+ \frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3}\left(S' - \text{etc.}\right)\\
&+ \text{etc.,}
\end{aligned}$$

wo der Gefälligkeit wegen das Element dx konstant angenommen wurde.

KOROLLAR

§117 Wenn also auch mehrere Integralformeln dieser Art $\int \mathfrak{V}\mathrm{d}x$ in die Funktion V auf irgendeine Weise eingehen, wird der Ausdruck der gesuchten

Variation daher nicht verändert, sondern es müssen nur die Größen N', P', Q', R' etc. aus ihren in entsprechender Weise bestimmt werden.

Bemerkung

§118 Auch wenn die Integralformeln

$$I = \int L\mathrm{d}x, \quad I' = \int L'\mathrm{d}x$$

zwei Variablen involvieren und daher keine festen Werte erhalten zu können scheinen, ist dennoch zu erwägen, dass bei allen Fragen dieser Art immer eine gewisse Relation zwischen den zwei Variablen x und y eingenommen wird, ob sie absolut gegeben ist oder erst durch Rechnung bestimmt werden muss. Unter Verwendung dieser Relation selbst, dass y als Funktion von x betrachtet werden kann, werden nun jene Integralformeln natürlich bestimmte Werte erhalten.

Problem 11

§119 *Wenn die Funktion $\mathfrak{V}$ außer den Variablen x und y und deren Differentialwerten p, q, r, s etc. auch die Integralformel $u = \int \mathfrak{v}\mathrm{d}x$ involviert, dass ihr Differential dieses ist*

$$\mathrm{d}\mathfrak{V} = \mathfrak{L}\mathrm{d}u + \mathfrak{M}\mathrm{d}x + \mathfrak{N}\mathrm{d}y + \mathfrak{P}\mathrm{d}p + \mathfrak{Q}\mathrm{d}q + \mathfrak{R}\mathrm{d}r + etc.,$$

während gilt

$$\mathrm{d}\mathfrak{v} = \mathfrak{m}\mathrm{d}x + \mathfrak{n}\mathrm{d}y + \mathfrak{p}\mathrm{d}p + \mathfrak{q}\mathrm{d}q + \mathfrak{r}\mathrm{d}r + etc.,$$

dann aber V irgendeine Funktion von x, y, p, q, r etc. und darüber hinaus der Integralformel $v = \int \mathfrak{V}\mathrm{d}x$ ist, dass gilt

$$\mathrm{d}V = L\mathrm{d}v + M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + etc.,$$

die Variation der Integralformel $\int V\mathrm{d}x$ zu finden.

LÖSUNG

Aus Problem 9 finden wir so die Variation der Integralformel $\int \mathfrak{B}\mathrm{d}x = v$; nachdem nämlich die Integrationsgrenzen festgelegt wurden und das Integral $\int \mathfrak{L}\mathrm{d}x = \mathfrak{I}$ so genommen wurde, dass es für den Anfang der Integration verschwindet, werde für das Ende $\mathfrak{I} = \mathfrak{A}$, dann werde der Kürze wegen

$$\mathfrak{N} + (\mathfrak{A} - \mathfrak{I})\mathfrak{n} = \mathfrak{N}', \quad \mathfrak{P} + (\mathfrak{A} - \mathfrak{I})\mathfrak{p} = \mathfrak{P}', \quad \mathfrak{Q} + (\mathfrak{A} - \mathfrak{I})\mathfrak{q} = \mathfrak{Q}' \quad \text{etc.};$$

es wird aus der Lösung jenes Problems sein

$$\delta v = \mathfrak{B}\delta x + \int \mathrm{d}x \left(\mathfrak{N}'w + \frac{\mathfrak{P}'\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathfrak{Q}'\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathfrak{R}'\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \right)$$

- nach Setzen von $w = \delta y - p\delta x$ und für konstant genommenes $\mathrm{d}x$.

Wird nun aber $\delta \int V\mathrm{d}x$ gesucht, wird wegen

$$\delta \int V\mathrm{d}x = V\delta x + \int (\mathrm{d}x\delta V - \mathrm{d}V\delta x),$$

nachdem der Kürze wegen festgelegt wurde

$$\mathrm{d}V = L\mathrm{d}v + \mathrm{d}W \quad \text{und} \quad \delta V = L\delta v + \delta W,$$

sodass gilt

$$\mathrm{d}W = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + \text{etc.},$$

gelten, wie wir ebendort gesehen haben,

$$\delta \int V\mathrm{d}x = V\delta x + \int (L\mathrm{d}x\delta v - L\mathrm{d}v\delta x)$$
$$+ \int \mathrm{d}x \left(Nw + \frac{P\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{Q\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{R\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \right);$$

wenn dort anstelle von $\mathrm{d}v$ und δv die gerade gefundenen Werte eingesetzt werden, wird sein

$$\mathrm{d}x\delta v - \mathrm{d}v\delta x = \mathrm{d}x \int \mathrm{d}x \left(\mathfrak{N}'w + \frac{\mathfrak{P}'\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathfrak{Q}'\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathfrak{R}'\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \right).$$

Nun werde $\int L\mathrm{d}x = I$ gesetzt, nachdem dass Integral so genommen wurde, dass es am Anfang der Integration verschwindet, am Ende aber $I = A$ wird, und wir werden haben

$$\int L(\mathrm{d}x\delta v - \mathrm{d}v\delta x) = \int (A - I)\mathrm{d}x \left(\mathfrak{N}'w + \frac{\mathfrak{P}'\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathfrak{Q}'\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathfrak{R}'\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \right).$$

Es werden wieder für $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{R}'$, etc. die oben angenommenen Werte eingesetzt und, um die Rechnung zusammenzufassen, werde festgelegt

$$\begin{aligned}
N + (A-I)\mathfrak{N} + (A-I)(\mathfrak{A}-\mathfrak{I})\mathfrak{n} &= N',\\
P + (A-I)\mathfrak{P} + (A-I)(\mathfrak{A}-\mathfrak{I})\mathfrak{p} &= P',\\
Q + (A-I)\mathfrak{Q} + (A-I)(\mathfrak{A}-\mathfrak{I})\mathfrak{q} &= Q',\\
R + (A-I)\mathfrak{R} + (A-I)(\mathfrak{A}-\mathfrak{I})\mathfrak{r} &= R'\\
&\text{etc.},
\end{aligned}$$

und es ist klar, dass die gesuchte Variation dann sein wird

$$\delta \int V\mathrm{d}x = V\delta x + \int \mathrm{d}x \left(N'w + \frac{P'\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{Q'\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{R'\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \right),$$

welche Formel weiter zu demselben Ausdruck entwickelt wird, welchen wir gegen Ende von Problem 9 [§110] dargeboten haben, welchen es also hier erneut anzuführen überflüssig wäre.

Korollar 1

§120 Hier ist also die Integralformel $\int V\mathrm{d}x$, deren Variation wir angegeben haben, so beschaffen, dass nicht nur die Funktion V die Integralformel $\int \mathfrak{V}\mathrm{d}x$ involviert, sondern auch diese Funktion $\mathfrak{V}$ eine andere Integralformel $\int \mathfrak{v}\mathrm{d}x$ in sich umfasst, wo freilich die Funktion $\mathfrak{v}$ weiter keine Integralformel verwickelt.

Korollar 2

§121 Wenn aber auch diese Funktion $\mathfrak{v}$ darüber hinaus eine Integralformel in sich involviert, ist zu Genüge klar, wie dann die Lösung in Angriff genommen werden muss, wenn freilich dann die Werte N', P', Q', R' etc. darüber hinaus von der letzten Integralformel abhängende Anteile erhalten werden.

BEMERKUNG

§122 Wie auch immer also die Integralformel $\int V\mathrm{d}x$ zusammengesetzt war, die bisher erläuterten Vorschriften genügen voll und ganz, um ihre Variation zu finden, auch wenn die Zusammensetzung unter Umständen unendlich war. Weil also alle zwei Variablen verwickelnden Ausdrücke, deren Variationen jemals zu finden sind, entweder von Integralformeln frei sind oder eine oder mehrere in sich umfassend, und diese entweder einfache oder auf irgendeine Weise zusammengesetzt sind, scheint diesem Anteil des Variationskalküls, der von zwei Variablen handelt, mehr als Genüge geleistet worden zu sein, sodass kaum weiter irgendetwas vermisst werden kann. Deswegen wollen wir zu Formeln dieser Variablen fortschreiten und zuerst freilich zu solchen, deren Relation durch zwei Gleichungen bestimmt wird, sodass zwei Variablen als Funktion der dritten betrachtet werden können, ob diese doppelte Relation bekannt ist oder aus der Gestalt der Variation selbst zu finden ist.

Kapitel 5
Über die Variation drei Variablen involvierender und zwei Relationen verwickelnder Integralformeln

Leonhard Euler

Problem 12

§123 *Nachdem irgendeine Formel vorgelegt wurde, die die drei Variablen x, y, z mit ihren Differentialen irgendeines Grades involviert, ihre aus den Variationen aller drei Variablen abstammende Variation zu bestimmen.*

Lösung

Es sei W diese vorgelegte Formel, von welcher Art zuerst der variierte Wert $W + \delta W$ werde, der entsteht, wenn anstelle von x, y, z die variierten Werte derselben geschrieben werden

$$x + \delta x, \quad y + \delta y, \quad z + \delta z,$$

und auf die gleiche Weise für deren Differentiale

$$\mathrm{d}x + \mathrm{d}\delta x, \quad \mathrm{d}y + \mathrm{d}\delta y, \quad \mathrm{d}z + \mathrm{d}\delta z,$$

und so weiter; wenn von diesen die Formel W weggeschafft wird, wird ihre Variation δW zurückbleiben. Daher wird eingesehen, dass diese Variation durch die übliche Differentiation erhalten wird, wenn nur anstelle des Differentiationszeichen d das Variationszeichen δ geschrieben wird. Es wird nur förderlich sein bemerkt zu haben, wenn Variationen von Differentialen genommen werden müssen, dass es egal ist, an welcher Stelle das Variationszeichen zwischen die Differentiationszeichen gesetzt wird, wie wir oben [§37, 40] bewiesen haben; daher wird das Variationszeichen immer an die letzte Stelle gesetzt werden können, was, wenn wir zu Integralformeln fortschreiten werden, am angenehmsten zu sein scheint, so wie aus dem, was bisher über Integralformeln, die zwei Variablen involvieren, angegeben worden ist, zu Genüge klar ist.

Korollar 1

§124 Weil ja z genauso wie y als eine Funktion von x betrachtet werden kann, wenn $\frac{dy}{dx} = p$ und $\frac{dz}{dx} = \mathfrak{p}$ gesetzt wird, wird gelten

$$\delta p = \frac{d\delta y - p d\delta x}{dx} \quad \text{und} \quad \delta\mathfrak{p} = \frac{d\delta z - \mathfrak{p} d\delta x}{dx},$$

und auf die gleiche Weise weichen die daher derivierten Formeln von den oberen nicht ab.

Korollar 2

§125 Wir wollen $\delta y - p\delta x = w$ und $\delta z - \mathfrak{p}\delta x = \mathfrak{w}$ setzen und es wird sein

$$d\delta y - p d\delta x - q dx\delta x = dw \quad \text{und} \quad d\delta z - \mathfrak{p} d\delta x - \mathfrak{q} dx\delta x = d\mathfrak{w},$$

wenn wir natürlich setzen

$$\frac{dp}{dx} = q \quad \text{und} \quad \frac{d\mathfrak{p}}{dx} = \mathfrak{q},$$

woher klar ist, dass sein wird

$$\delta p - q\delta x = \frac{dw}{dx} \quad \text{und} \quad \delta\mathfrak{p} - \mathfrak{q}\delta x = \frac{d\mathfrak{w}}{dx}.$$

KOROLLAR 3

§126 Wenn wir weiter festlegen

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x} = r, \quad \frac{\mathrm{d}\mathfrak{q}}{\mathrm{d}x} = \mathfrak{r}, \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = s, \quad \frac{\mathrm{d}\mathfrak{r}}{\mathrm{d}s} = \mathfrak{s} \quad \text{etc.},$$

wird auf die gleiche Weise für konstant genommenes dx sein

$$\begin{aligned} \delta q - r\delta x &= \frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2}, \quad \delta\mathfrak{q} - \mathfrak{r}\delta x = \frac{\mathrm{dd}\mathfrak{w}}{\mathrm{d}x^2}, \\ \delta r - s\delta x &= \frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3}, \quad \delta\mathfrak{r} - \mathfrak{s}\delta x = \frac{\mathrm{d}^3\mathfrak{w}}{\mathrm{d}x^3} \end{aligned}$$

und so weiter.

BEMERKUNG 1

§127 Ob also die zu variierende Formel einen endlichen Wert hatte oder einen unendlichen oder gar einen verschwindenden, es kann mit Hilfe der Vorschriften ihre Variation genauso wie oben gefunden werden; denn diese Vorschriften weichen von den oberen nicht ab, außer dass hier Differentialwerte zweier Arten, zum einen die mit lateinischen Buchstaben p, q, r, s etc., zum anderen die mit germanischen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ etc. angegebenen, eingeführt werden müssen; die Begründung dieser Sache ist darin gelegen, dass hier jede der beiden Variablen y und z als Funktion von x betrachtet werden kann. Wenn aber eine einzige Gleichung zwischen den drei Koordinaten gegeben wäre oder gesucht werden würde, würden die hier eingeführten Buchstaben p oder $\mathfrak{p}$ keinen bestimmten Wert haben, weil ohne Veränderung jener Gleichung die Brüche $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ und $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ ganz und gar alle Werte erhalten könnten. Nachdem aber diese Buchstaben und die Differentiale selbst in der Rechnung beibehalten wurden, wird auch für diesen Fall die in der Lösung erläuterte Regel die Variation aufzeigen.

BEMERKUNG 2

§128 Oben [§12-24] habe ich schon bemerkt, dass dieser Fall dreier Variablen, deren Relation mit zwei Gleichungen bestimmt wird, sorgfältig von dem zu unterscheiden ist, wo die Relation mit einer einzigen Gleichung bestimmt zu werden angenommen wird. Dieser Unterschied wird aus der Geometrie heraus am deutlichsten illustriert, wo die drei Variablen den Platz von drei Koordinaten einnehmen; genauso viele müssen aber in der Rechnung verwendet werden, nicht nur wann immer die Frage von Oberflächen handelt, sondern auch wann immer gekrümmte Linien, die nicht in derselben Ebene gelegen sind, zu erforschen sind. Und in diesem letztem Fall erfordert freilich die Bestimmung der gekrümmten Linie zwei Gleichungen zwischen drei Koordinaten, sodass zwei als Funktionen der dritten betrachtet werden können. Die Natur einer Oberfläche wird aber mit nur einer einzigen Gleichung zwischen drei Koordinaten bestimmt, sodass irgendeine als Funktion der zwei übrigen betrachtet werden kann, woher der riesige Unterschied in der Betrachtung selbst entsteht. Das gegenwärtige Kapitel wird also zum Finden gekrümmter Linien solcher Art dienen, die, nicht in derselben Ebene gelegen, sich einer gewissen Eigenschaft des Maximums oder Minimums erfreuen.

PROBLEM 13

§129 *Wenn V irgendeine Funktion der drei Variablen x, y, z war, die darüber hinaus deren Differentiale irgendeiner Ordnung verwickelt, und die Variablen irgendwelche Variationen erhalten, ist die Variation der Integralformel $\int V\mathrm{d}x$ zu finden.*

LÖSUNG

Was für Differentiale auch immer in die Funktion V eingehen, sie werden mit diesen Substitutionen

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}p = q\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}q = r\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}r = s\mathrm{d}x \quad \text{etc.,} \\ &\mathrm{d}z = \mathfrak{p}\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}\mathfrak{p} = \mathfrak{q}\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}\mathfrak{q} = \mathfrak{r}\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}\mathfrak{r} = \mathfrak{s}\mathrm{d}x \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

beseitigt werden und die Größe V wird eine Funktion der endlichen Größen x, y, z, p, q, r, s etc., $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ etc. sein. Ihr Differential wird also eine Form dieser Art haben

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + S\mathrm{d}s &+ \text{etc.} \\ + \mathfrak{N}\mathrm{d}z + \mathfrak{P}\mathrm{d}\mathfrak{p} + \mathfrak{Q}\mathrm{d}\mathfrak{q} + \mathfrak{R}\mathrm{d}\mathfrak{r} + \mathfrak{S}\mathrm{d}\mathfrak{s} &+ \text{etc.,} \end{aligned}$$

woher man nach Verwandeln der Differentiationszeichen d in δ zugleich die Variation δV haben wird. Aus dem oben Bewiesenen wird man aber auch für diesen Fall dreier Variablen haben

$$\delta \int V \mathrm{d}x = \int (V \mathrm{d}\delta x + \mathrm{d}x \delta V) = V \delta x + \int (\mathrm{d}x \delta V - \mathrm{d}V \delta x).$$

Und nach einer Substitution wird werden

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x\delta V - \mathrm{d}V\delta x}{\mathrm{d}x} = M\delta x + N\delta y \quad &+ P\delta p \quad + Q\delta q \quad + R\delta r \quad + \text{etc.} \\ + \mathfrak{N}\delta z \quad &+ \mathfrak{P}\delta \mathfrak{p} \quad + \mathfrak{Q}\delta \mathfrak{q} \quad + \mathfrak{R}\delta \mathfrak{r} \quad + \text{etc.} \\ - M\delta x \quad - Np\delta x &- Pq\delta x \quad - Qr\delta x - Rs\delta x \quad - \text{etc.} \\ - \mathfrak{N}\mathfrak{p}\delta x \quad &- \mathfrak{P}\mathfrak{q}\delta x - \mathfrak{Q}\mathfrak{r}\delta x - \mathfrak{R}\mathfrak{s}\delta x - \text{etc.} \end{aligned}$$

Wenn wir daher nun der Kürze wegen festlegen

$$\delta y - p\delta x = w \quad \text{und} \quad \delta z - \mathfrak{p}\delta x = \mathfrak{w},$$

wird für konstant genommenes Element $\mathrm{d}x$ aus §125 und §126 sein

$$\begin{aligned} \delta p - q\delta x &= \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}, \quad & \delta \mathfrak{p} - \mathfrak{q}\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}\mathfrak{w}}{\mathrm{d}x}, \\ \delta q - r\delta x &= \frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2}, \quad & \delta \mathfrak{q} - \mathfrak{r}\delta x &= \frac{\mathrm{dd}\mathfrak{w}}{\mathrm{d}x^2}, \\ \delta r - s\delta x &= \frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3}, \quad & \delta \mathfrak{r} - \mathfrak{s}\delta x &= \frac{\mathrm{d}^3\mathfrak{w}}{\mathrm{d}x^3} \end{aligned}$$

$$\text{etc.},$$

woher die gesuchte Variation auf diese Weise angenehm ausgedrückt werden wird

$$\delta \int V \mathrm{d}x = V\delta x + \int \mathrm{d}x \left\{ \begin{array}{c} Nw + \dfrac{P\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \dfrac{Q\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + \dfrac{R\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \\ + \mathfrak{N}\mathfrak{w} + \dfrac{\mathfrak{P}\mathrm{d}\mathfrak{w}}{\mathrm{d}x} + \dfrac{\mathfrak{Q}\mathrm{dd}\mathfrak{w}}{\mathrm{d}x^2} + \dfrac{\mathfrak{R}\mathrm{d}^3\mathfrak{w}}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \end{array} \right\},$$

die wie oben [§80-85] auf diese Form zurückgeführt wird

$$\delta \int V \mathrm{d}x = \int w \mathrm{d}x \left(N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3 R}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}^4 S}{\mathrm{d}x^4} - \text{etc.} \right)$$

$$
\begin{aligned}
&+\int \mathfrak{w}\mathrm{d}x \left(\mathfrak{N}-\frac{\mathrm{d}\mathfrak{P}}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}^3\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x^3}+\frac{\mathrm{d}^4\mathfrak{S}}{\mathrm{d}x^4}-\text{etc.}\right)\\
&+\quad V\delta x \quad +w\left(P-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x^3}+\text{etc.}\right)\\
&+\text{konst.}\quad +\mathfrak{w}\left(\mathfrak{P}-\frac{\mathrm{d}\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}^3\mathfrak{S}}{\mathrm{d}x^3}+\text{etc.}\right)\\
&\qquad\qquad +\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\left(Q-\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x^2}-\text{etc.}\right)\\
&\qquad\qquad +\frac{\mathrm{d}\mathfrak{w}}{\mathrm{d}x}\left(\mathfrak{Q}-\frac{\mathrm{d}\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}\mathfrak{S}}{\mathrm{d}x^2}-\text{etc.}\right)\\
&\qquad\qquad +\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x^2}\left(R-\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}+\text{etc.}\right)\\
&\qquad\qquad +\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}\mathfrak{w}}{\mathrm{d}x^2}\left(\mathfrak{R}-\frac{\mathrm{d}\mathfrak{S}}{\mathrm{d}x}+\text{etc.}\right)\\
&\qquad\qquad +\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3}\left(S-\text{etc.}\right)\\
&\qquad\qquad +\frac{\mathrm{d}^3\mathfrak{w}}{\mathrm{d}x^3}\left(\mathfrak{S}-\text{etc.}\right)\\
&\qquad\qquad +\text{etc.},
\end{aligned}
$$

deren Gestalt aus dem Obigen zu Genüge klar ist, und es ist dasselbe über die Addition der Konstante zu bemerken [§118].

KOROLLAR 1

§130 In dieser Lösung werden aber die beiden Variablen y und z als Funktionen von x betrachtet, ob sie schon bekannt sind oder erst aus der Gestalt der Variation zu bestimmen sind. Denn es hätte auch die Integralformel $\int V\mathrm{d}x$ keinen Wert, wenn nicht so y wie z durch x bestimmt zu werden aufgefasst würden.

KOROLLAR 2

§131 Wenn die Formel $V\mathrm{d}x$ per se integrierbar ist, wobei keine Relation zwischen den drei Variablen angenommen worden ist, kann die Variation des

Integrals $\int V\mathrm{d}x$ auch keine Integralformeln involvieren und es ist notwendig, dass dann gilt

$$\text{sowohl}\quad N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}^4S}{\mathrm{d}x^4} - \text{etc.} = 0$$
$$\text{als auch}\quad \mathfrak{N} - \frac{\mathrm{d}\mathfrak{P}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}^4\mathfrak{S}}{\mathrm{d}x^4} - \text{etc.} = 0.$$

KOROLLAR 3

§132 Wenn also auch umgekehrt diese zwei Gleichungen Geltung haben, wird dies ein sicheres Anzeichen sein, dass die Differentialformel $V\mathrm{d}x$ per se eine Integration zulässt, wobei keine Relation zwischen den Variablen festgesetzt wurde.

BEISPIEL

§133 *Damit wir dieses Kriterium noch mehr illustrieren, wollen wir eine per se integrierbare Formel solcher Art annehmen und es sei* $\int V\mathrm{d}x = \frac{z\mathrm{d}y}{x\mathrm{d}z} = \frac{pz}{x\mathfrak{p}}$*, woher*

$$V = -\frac{pz}{xx\mathfrak{p}} + \frac{p}{x} + \frac{zq}{x\mathfrak{p}} - \frac{zp\mathfrak{q}}{x\mathfrak{p}\mathfrak{p}}$$

wird.

Aus deren Differentiation berechnen wir

$$N = 0 \quad \text{und} \quad P = -\frac{z}{xx\mathfrak{p}} + \frac{1}{x} - \frac{z\mathfrak{q}}{x\mathfrak{p}\mathfrak{p}}, \quad Q = \frac{z}{x\mathfrak{q}},$$

weiter

$$\mathfrak{N} = -\frac{p}{xx\mathfrak{p}} + \frac{q}{x\mathfrak{p}} - \frac{p\mathfrak{q}}{x\mathfrak{p}\mathfrak{p}}, \quad \mathfrak{P} = \frac{pz}{xx\mathfrak{p}\mathfrak{p}} - \frac{zq}{x\mathfrak{p}\mathfrak{p}} + \frac{2zp\mathfrak{q}}{x\mathfrak{p}^3} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Q} = -\frac{zp}{x\mathfrak{p}\mathfrak{p}}.$$

Nun muss für die erste Gleichung wegen $N = 0$ werden

$$-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2} = 0 \quad \text{oder} \quad P - \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = \text{Konst.},$$

deren Gültigkeit aus der Differentiation von Q sofort klar wird.

Für die andere Gleichung

$$\mathfrak{N} - \frac{\mathrm{d}\mathfrak{P}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x^2} = 0,$$

weil daher $\int \mathfrak{N}\mathrm{d}x = \mathfrak{P} - \frac{\mathrm{d}\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x}$ ist, ist zuerst notwendig, dass diese Formel integrierbar ist

$$\mathfrak{N}\mathrm{d}x = -\frac{p\mathrm{d}x}{xx\mathfrak{p}} + \frac{q\mathrm{d}x}{x\mathfrak{p}} - \frac{p\mathfrak{q}\mathrm{d}x}{x\mathfrak{p}\mathfrak{p}},$$

woher wegen $q\mathrm{d}x = \mathrm{d}p$ natürlich $\int \mathfrak{N}\mathrm{d}x = \frac{p}{x\mathfrak{p}}$ wird. Es ist also übrig, dass gilt

$$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x} = \mathfrak{P} - \int \mathfrak{N}\mathrm{d}x = \frac{pz}{xx\mathfrak{p}\mathfrak{p}} - \frac{zq}{x\mathfrak{p}\mathfrak{p}} + \frac{2zp\mathfrak{q}}{x\mathfrak{p}^3} - \frac{p}{x\mathfrak{p}}.$$

Aber durch Differentieren von $\mathfrak{Q} = -\frac{zp}{x\mathfrak{p}\mathfrak{p}}$ resultiert eine vollkommene Gleichheit der beiden Seiten.

BEMERKUNG 1

§134 Wenn daher also die Frage darauf zurückgeht, dass der Integralformel $\int V\mathrm{d}x$ ein maximaler oder minimaler Wert zu geben ist, dann müssen vor allem in ihrer Variation die beiden Integralanteile - und das getrennt voneinander - gleich Null werden, deshalb weil, wie auch immer die Variationen festgelegt werden, die Variation $\delta \int V\mathrm{d}x$ immer verschwinden muss; daher geben diese zwei Gleichungen

$$N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}^4S}{\mathrm{d}x^4} - \text{etc.} = 0$$

und

$$\mathfrak{N} - \frac{\mathrm{d}\mathfrak{P}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3\mathfrak{R}}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}^4\mathfrak{S}}{\mathrm{d}x^4} - \text{etc.} = 0,$$

mit welchen die zwei Relationen zwischen den drei Variablen x, y, z so ausgedrückt werden, dass darauf so y wie z rechtens als Funktion von x betrachtet werden können. Wann immer aber diese Gleichungen Differentiale sind und das von höherem Grade, gehen bei beiden Seiten genauso viele beliebige Konstanten in die Rechnung ein, von wie vieltem Grad jede der beiden Differentialgleichungen war. Diese Konstanten müssen aber darauf so bestimmt werden, dass der so für den Anfang wie für das Ende der

Integration der Formel $\int V\mathrm{d}x$ vorgeschriebenen Regel Genüge geleistet wird, welche Aufgabe darauf zurückgeht, dass außerdem die absoluten Anteile der Variation zu Null gemacht werden. Zuerst muss natürlich die Konstante so bestimmt werden, dass den für den Anfang vorgeschriebenen Bedingungen genügt wird, wo freilich aus der Gestalt der Frage die Stücke

$$w, \quad \mathfrak{w}, \quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}\mathfrak{w}}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2}, \quad \frac{\mathrm{dd}\mathfrak{w}}{\mathrm{d}x^2}, \quad \text{etc.}$$

bestimmte Werte erhalten müssen. Dann aber, weil dasselbe bezüglich des Endes der Integration passiert, werden sie aus den einzelnen durch Integration eingegangenen Konstanten bestimmt werden.

Bemerkung 2

§135 Es wird besonders zuträglich sein, hier bemerkt zu haben, dass die Glieder, mit denen die Variation $\delta \int V\mathrm{d}x$ ausgedrückt wird, von selbst in zwei Klassen aufgeteilt werden, in deren einer nur die Buchstaben entdeckt werden, die auf die Variabilität von y oder auf sein Verhalten in Hinblick auf x bezogen werden und das so, als wenn die Größe z konstant angenommen worden wäre, die andere Klasse hingegen die gleichen nur von der Variabilität von z abhängenden Buchstaben enthält, als wäre die Größe y konstant. Daher lässt sich folgern, wenn eine vierte Variable v hinzukommt, die auch wie eine Funktion von x betrachtet werden kann, dass dann zu jenen zwei Klassen darüber hinaus eine dritte hinzuzufügen ist, die die gleichen von der Variabilität allein von v abhängenden Glieder umfasst. Deshalb kann die hier gegebene Lösung angesehen werden, als wenn sie auf wie viele Variablen auch immer ausgedehnt wird, solange so viele unter den Gleichungen gegeben zu sein aufgefasst werden, dass alle für Funktionen einer einzigen gehalten werden können. Auch wenn also dieses Kapitel im Titel nur drei Variablen zeigt, ist sie dennoch sich auf irgendwie viele zu erstrecken zu verstehen, wenn nur Bedingungen solcher Art vorgelegt werden, dass schließlich durch eine alle übrigen bestimmt werden. Eine solche Bedingung involvieren aber Integralformeln dieser Form $\int V\mathrm{d}x$ notwendigerweise; wie viele Variablen nämlich auch immer in die Größe V eingehen, der Ausdruck $\int V\mathrm{d}x$ kann ganz und gar keinen bestimmten Wert erhalten, wenn nicht alle Variablen schließlich als Funktion der einen x angesehen werden können. Weit anders hingegen ist die Art derer Integralformeln beschaffen, die auf zwei oder mehrere voneinander keineswegs abhängende Variablen bezogen werden.

PROBLEM 14

§136 *Wenn die Funktion V außer den drei Variablen x, y, z und deren Differentialen irgendeines Grades darüber hinaus die Integralformel $v = \int \mathfrak{V}\mathrm{d}x$ involviert, wo $\mathfrak{V}$ irgendeine Funktion der Variablen x, y, z mit ihren Differentialen sei, die Variation der Integralformel $\int V\mathrm{d}x$ zu finden.*

LÖSUNG

Damit zumindest die Gattung der Differentiale aus der Rechnung beseitigt wird, wollen wir wie zuvor festlegen

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}p = q\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}q = r\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}r = s\mathrm{d}x \quad \text{etc.,}\\ &\mathrm{d}z = \mathfrak{p}\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}\mathfrak{p} = \mathfrak{q}\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}\mathfrak{q} = \mathfrak{r}\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}\mathfrak{r} = \mathfrak{s}\mathrm{d}x \quad \text{etc.,}\end{aligned}$$

und nach Differentieren der Funktion V geht hervor

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V = L\mathrm{d}v + M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + \text{etc.}\\ + \mathfrak{N}\mathrm{d}z + \mathfrak{P}\mathrm{d}\mathfrak{p} + \mathfrak{Q}\mathrm{d}\mathfrak{q} + \mathfrak{R}\mathrm{d}\mathfrak{r} + \text{etc.;}\end{aligned}$$

dann aber sei wegen $\mathrm{d}v = \mathfrak{V}\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathfrak{V} = M'\mathrm{d}x + N'\mathrm{d}y + P'\mathrm{d}p + Q'\mathrm{d}q + R'\mathrm{d}r + \text{etc.}\\ + \mathfrak{N}'\mathrm{d}z + \mathfrak{P}'\mathrm{d}\mathfrak{p} + \mathfrak{Q}'\mathrm{d}\mathfrak{q} + \mathfrak{R}'\mathrm{d}\mathfrak{r} + \text{etc.,}\end{aligned}$$

wo ich wegen des Mangels an Buchstaben dieselben mit einem Akzent markiert gebrauche. Daher hat man aber zugleich die Variationen derselben Größen V und $\mathfrak{V}$. Weil nun die Variation $\delta \int V\mathrm{d}x$ gesucht wird, werden wir freilich zuerst wie zuvor haben

$$\delta \int V\mathrm{d}x = V\delta x + \int (\mathrm{d}x\delta V - \mathrm{d}V\delta x)\,;$$

weil dort der Wert von V nicht vom vorhergehenden abweicht, außer dass hier zum Differential von $\mathrm{d}V$ der Anteil $L\mathrm{d}v = L\mathfrak{V}\mathrm{d}x$ und zur Variation δV dieser Anteil $L\delta v = L\delta \int \mathfrak{V}\mathrm{d}x$ hinzukommt, wird auch die gesuchte Variation $\delta \int V\mathrm{d}x$ mit der zuvor gefundenen Form ausgedrückt werden, wenn nur zu ihr dieses Glied hinzugefügt wird

$$\int L\left(\mathrm{d}x\delta \int \mathfrak{V}\mathrm{d}x - \mathfrak{V}\mathrm{d}x\delta x\right) = \int L\mathrm{d}x\left(\delta \int \mathfrak{V}\mathrm{d}x - \mathfrak{V}\delta x\right).$$

Weil aber die Integralformel $\int \mathfrak{V}\mathrm{d}x$ dieselbe ist, die im vorhergehenden Problem behandelt worden ist, wenn, wie wir es dort gemacht haben, wir festsetzen

$$\delta y - p\delta x = w \quad \text{und} \quad \delta z - \mathfrak{p}\delta x = \mathfrak{w},$$

werden wir für konstant angenommenes Element $\mathrm{d}x$ haben

$$\delta \int \mathfrak{V}\mathrm{d}x - \mathfrak{V}\delta x = \int \mathrm{d}x \left\{ \begin{array}{c} N'w + \dfrac{P'\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \dfrac{Q'\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + \dfrac{R'\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \\ +\mathfrak{N}'\mathfrak{w} + \dfrac{\mathfrak{P}'\mathrm{d}\mathfrak{w}}{\mathrm{d}x} + \dfrac{\mathfrak{Q}'\mathrm{dd}\mathfrak{w}}{\mathrm{d}x^2} + \dfrac{\mathfrak{R}'\mathrm{d}^3\mathfrak{w}}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \end{array} \right\}.$$

Wir wollen nun das Integral $\int L\mathrm{d}x = I$ setzen, wenn es natürlich so genommen wird, dass es für den Anfang der Integration verschwindet, dann aber für die obere Integrationsgrenze $I = A$ wird, wonach für die ganze Erstreckung der Integration sein wird

$$\int L\mathrm{d}x \left(\delta \int \mathfrak{V}\mathrm{d}x - \mathfrak{V}\delta x \right) = \int (A-I)\mathrm{d}x \left\{ \begin{array}{c} N'w + \dfrac{P'\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \dfrac{Q'\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + \text{etc.} \\ +\mathfrak{N}'\mathfrak{w} + \dfrac{\mathfrak{P}'\mathrm{d}\mathfrak{w}}{\mathrm{d}x} + \dfrac{\mathfrak{Q}'\mathrm{dd}\mathfrak{w}}{\mathrm{d}x^2} + \text{etc.} \end{array} \right\}.$$

Nun wollen wir daher die folgenden Abkürzungen einführen

$$\begin{array}{ll} N + (A-I)N' = N^0, & \mathfrak{N} + (A-I)\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}^0 \\ P + (A-I)P' = P^0, & \mathfrak{P} + (A-I)\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}^0 \\ Q + (A-I)Q' = Q^0, & \mathfrak{Q} + (A-I)\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}^0 \\ R + (A-I)R' = R^0, & \mathfrak{R} + (A-I)\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}^0 \\ \text{etc.} & \text{etc.,} \end{array}$$

und es ist klar, dass die gesuchte Variation so ausgedrückt hervorgehen wird

$$\delta \int V\mathrm{d}x = V\delta x + \int \mathrm{d}x \left\{ \begin{array}{c} N^0w + \dfrac{P^0\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \dfrac{Q^0\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + \dfrac{R^0\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \\ +\mathfrak{N}^0\mathfrak{w} + \dfrac{\mathfrak{P}^0\mathrm{d}\mathfrak{w}}{\mathrm{d}x} + \dfrac{\mathfrak{Q}^0\mathrm{dd}\mathfrak{w}}{\mathrm{d}x^2} + \dfrac{\mathfrak{R}^0\mathrm{d}^3\mathfrak{w}}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \end{array} \right\},$$

welche auch wie zuvor in diese Form entwickelt wird

$$\delta \int V\mathrm{d}x = \int w\mathrm{d}x \left(N^0 - \frac{\mathrm{d}P^0}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}Q^0}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3R^0}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}^4S^0}{\mathrm{d}x^4} - \text{etc.} \right)$$

$$
\begin{aligned}
&+\int \mathfrak{w}\,\mathrm{d}x \left(\mathfrak{N}^0 - \frac{\mathrm{d}\mathfrak{P}^0}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}\mathfrak{Q}^0}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3\mathfrak{R}^0}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}^4\mathfrak{S}^0}{\mathrm{d}x^4} - \text{etc.}\right)\\
+V\delta x \quad &+ \quad w \quad \left(P^0 - \frac{\mathrm{d}Q^0}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}R^0}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3S^0}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}\right)\\
+\text{Konst.} &+ \quad \mathfrak{w} \quad \left(\mathfrak{P}^0 - \frac{\mathrm{d}\mathfrak{Q}^0}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}\mathfrak{R}^0}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3\mathfrak{S}^0}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}\right)\\
&+ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \left(Q^0 - \frac{\mathrm{d}R^0}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}S^0}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.}\right)\\
&+ \frac{\mathrm{d}\mathfrak{w}}{\mathrm{d}x} \left(\mathfrak{Q}^0 - \frac{\mathrm{d}\mathfrak{R}^0}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}\mathfrak{S}^0}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.}\right)\\
&+ \frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} \left(R^0 - \frac{\mathrm{d}S^0}{\mathrm{d}x} + \text{etc.}\right)\\
&+ \frac{\mathrm{dd}\mathfrak{w}}{\mathrm{d}x^2} \left(\mathfrak{R}^0 - \frac{\mathrm{d}\mathfrak{S}^0}{\mathrm{d}x} + \text{etc.}\right)\\
&+ \frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} \left(S^0 - \text{etc.}\right)\\
&+ \frac{\mathrm{d}^3\mathfrak{w}}{\mathrm{d}x^3} \left(\mathfrak{S}^0 - \text{etc.}\right)\\
&+ \text{etc.},
\end{aligned}
$$

wo freilich das den Buchstaben nachgestellte Nullzeichen keinen stören möge, weil es ja nicht den Exponenten bezeichnet, sondern nur, um diese Buchstaben von denselben ohne etwas zu unterscheiden, verwendet wird.

KOROLLAR 1

§137 Wenn also die Integralformel $\int V\mathrm{d}x$ einen maximalen Wert haben muss, müssen die zwei ersten Glieder der gefundenen Variation sofort gleich Null gesetzt werden, woher zwei Differentialgleichungen resultieren, mit welchen die unbestimmte Relation jeder der beiden Variablen y und z zu x bestimmt wird.

Korollar 2

§138 Auch wenn hier den Bedingungen, die unter Umständen für den Anfang und das Ende der Integration vorgelegt werden, noch keine Rechnung getragen wird, gehen sie dennoch schon verborgen in die Rechnung ein, weil die Buchstaben I und A die Integrationsgrenzen berücksichtigen. Dennoch werden sie wiederum in der Behandlung der Differentialgleichungen aus der Rechnung herausgeworfen, während nämlich die Integralformel $\int L\mathrm{d}x = I$ herausgestoßen wird, geht zugleich die konstante Größe A heraus.

Korollar 3

§139 Nachdem aber diese zwei Differentialgleichungen erledigt worden sind und das sehr allgemein, dass genauso viele beliebige Konstanten in die Rechnung eingehen, wie Integrationen unternommen werden müssen, ist erst dann auf die Bedingungen jeder der beiden Integrationsgrenzen der Formel $\int V\mathrm{d}x$ zu achten, weil ja daher aus den übrigen absoluten Gliedern der Variation jene Konstanten bestimmt werden müssen.

Bemerkung

§140 Die Lösung dieses Problems ist also so beschaffen, dass schon zu Genüge klar ist, wie auch höher zusammengesetzte Formeln, wie wenn beispielsweise die Funktion V mehrere Integralformeln involviert oder wenn auch die Funktion $\mathfrak{B}$ neue Integralformeln umfasst, erledigt werden müssen. Es ist sogar immer noch klar, wenn die Integralformeln dieser Art mehr als drei Variablen enthalten, wie dann die Variationen gefunden werden müssen, und daher wäre es nicht nur lästig, sondern auch überflüssig, wenn ich diesen zu arbeitsaufwendigen Gegenstand weiter verfolgen wollte. Ich schreite also zum anderen um vieles schwerer ergründbaren Teil dieser Lehre voran, wo auch, nachdem Relationen zwischen den Variablen festgelegt wurden, zwei oder mehrere in keinster Weise voneinander abhängende in der Rechnung zurückgelassen werden.

Kapitel 6
Über die Variation drei Variablen involvierender Differentialformeln, deren Relation in einer einzigen Gleichung enthalten ist

Leonhard Euler

Problem 15

§141 *Nachdem eine Gleichung zwischen den drei Variablen x, y und z vorgelegt wurde, denen irgendwelche Variationen δx, δy, δz zugeteilt werden, die Variationen der Differentialformeln ersten Grades*

$$p = \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right) \quad \textit{und} \quad p' = \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)$$

zu bestimmen.

Lösung

Weil eine Gleichung zwischen drei Variablen gegeben zu sein festgelegt wird, kann eine beliebige derer als Funktion der zwei übrigen betrachtet werden. Es wird also z eine Funktion von x und y sein und es muss sich hier erinnert werden, dass der Ausdruck $\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right) = p$ das Verhältnis der Differentiale von z und x bezeichnet, wenn in jener gegebenen Gleichung allein diese wie Variablen behandelt werden und die dritte y für eine Konstante gehalten wurde, welches selbe über die andere Formel $p' = (\frac{dz}{dy})$ festzuhalten ist. Auf die gleiche Weise können auch die Variationen δx, δy, δz wie unendlich kleine Funktionen der zwei Variablen x und y betrachtet werden, weil ja, wenn sie auch von der dritten z abhängen, diese selbst eine Funktion von x und y ist; daher wird zugleich eingesehen, was diese Formeln

$$\left(\frac{d\delta z}{dx}\right), \left(\frac{d\delta z}{dy}\right), \quad \text{ebenso} \quad \left(\frac{d\delta x}{dx}\right), \left(\frac{d\delta x}{dy}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{d\delta y}{dx}\right), \left(\frac{d\delta y}{dy}\right)$$

bezeichnen. Weil also der variierte Wert der Formel $(\frac{dz}{dx}) = p$ dieser ist

$$p + \delta p = \left(\frac{d(z+\delta z)}{d(x+\delta x)}\right),$$

wenn natürlich hier die Variable y konstant angenommen wird, wird nach Bemerken dieser Bedingung sein

$$p + \delta p = \left(\frac{dz + d\delta z}{dx + d\delta x}\right) = \left(\frac{dz}{dx} + \frac{d\delta z}{dx} - \frac{dz d\delta x}{dx^2}\right),$$

deshalb weil die Variationen δdx und δdz in Bezug auf dx und dz verschwinden. Daher wird man also wegen $(\frac{dz}{dx}) = p$ die gesuchte Variation haben

$$\delta p = \left(\frac{d\delta z}{dx}\right) - \left(\frac{dz}{dx} \cdot \frac{d\delta x}{dx}\right) = \left(\frac{d\delta z}{dx}\right) - p\left(\frac{d\delta x}{dx}\right),$$

die Bedeutung welcher Formeln, weil so δz wie δx Funktionen von x und y sind und man hier ein konstantes y hat, per se klar ist. Auf die gleiche Weise wird aber gefunden werden, dass sein wird

$$\delta p' = \left(\frac{d\delta z}{dy}\right) - p'\left(\frac{d\delta y}{dy}\right),$$

wo nur die Variable x für konstant gehalten wird.

Korollar 1

§142 Hier ist alles auf die zwei Variablen x und y geführt worden und wie Funktionen derer werden nicht nur die dritte z, sondern auch alle drei Variationen δx, δy, δz angesehen; es ist aber klar, dass diese drei Variablen nach Belieben miteinander vertauscht werden können.

Korollar 2

§143 Es genügt aber diese zwei Formeln für die Differentiale ersten Grades zu gebrauchen, weil sich ja alle übrigen auf diese zurückführen lassen, weil freilich gilt

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)=\frac{1}{p},\quad \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)=\frac{1}{p'}\quad \text{und}\quad \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=-\frac{p}{p'}\quad \text{und}\quad \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)=-\frac{p'}{p},$$

wo p und p' Funktionen der beiden x und y sind.

Korollar 3

§144 Nachdem also die Variationen dieser zwei Formeln gefunden worden sind

$$p=\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)\quad \text{und}\quad p'=\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right),$$

werden die Variationen der übrigen gerade erwähnten Formeln daher leicht gefunden werden. Es wird nämlich sein

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)=-\frac{\delta p}{pp}=-\frac{1}{pp}\left(\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}x}\right)+\frac{1}{p}\left(\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}\right),$$
$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)=-\frac{\delta p'}{p'p'}=-\frac{1}{p'p'}\left(\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}y}\right)+\frac{1}{p'}\left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y}\right),$$
$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=-\frac{\delta p}{p'}+\frac{p\delta p'}{p'p'}=-\frac{1}{p'}\left(\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}x}\right)+\frac{p}{p'}\left(\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}\right)+\frac{p}{p'p'}\left(\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}y}\right)-\frac{p}{p'}\left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y}\right).$$

Bemerkung 1

§145 Hier bemerke ich vor allem, dass die Differentialformeln keinen gewissen Wert haben können, wenn nicht zwei Differentiale so miteinander verglichen werden, dass die dritte Variable, wenn man drei hat, oder alle übrigen, wenn mehrere da sind, als konstant angenommen werden. So hat in dem Fall, in dem zwischen den drei Variablen x, y und z eine einzige Gleichung gegeben ist oder zumindest gegeben zu sein aufgefasst wird, die Formel $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ überhaupt keine Bedeutung, wenn nicht die dritte Variable y konstant angenommen wird, welche Bedingung durch Setzen dieser Formel in

Klammern angedeutet zu werden pflegt, auch wenn sie sicher weggelassen werden könnte, weil ja andernfalls nicht einmal eine Bedeutung vorhanden wäre. Damit dies einsichtiger gemacht wird, was für eine Gleichung auch immer zwischen den drei Variablen x, y, z vorgelegt wird, werde aus ihr der Wert von z gefunden zu werden aufgefasst, dass z einer gewissen Funktion von x und y gleich wird und nach Nehmen ihres Differentials $\mathrm{d}z = p\mathrm{d}x + p'\mathrm{d}y$ hervorgeht, wo wiederum p und p' gewisse Funktionen von x und y sein werden und das solche, dass $(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}) = (\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}x})$ ist. Für konstant genommenes y wird nun $\mathrm{d}z = p\mathrm{d}x$ oder $p = (\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x})$ sein, für konstant genommenes x geht aber $p' = (\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y})$ hervor. Dann ist aber auch klar, dass $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{p}{p'}$ für konstant genommenes z sein wird; es wird aber gefällig sein, dass solche Formeln ausgeschlossen werden, wann immer wir so z wie die Variationen δx, δy und δz wie Funktionen von x und y darstellen.

BEMERKUNG 2

§146 Aus der Geometrie lässt sich dieser Gegenstand um vieles klarer illustrieren. Es mögen nämlich die drei Variablen x, y, z die drei Koordinaten AX, XY, YZ (Fig. 4) bezeichnen, zwischen welchen die vorgelegte Gleichung eine gewisse Oberfläche angeben wird, in welcher die Ordinate $YZ = z$ begrenzt werden wird, die natürlich als gewisse Funktion der beiden übrigen $AX = x$ und $XY = y$ betrachtet werden kann, sodass, nachdem nach Belieben diese zwei x und y genommen wurden, die dritte $YZ = z$ aus der vorgelegten Gleichung bestimmt wird. Wenn daher nun irgendeine andere Oberfläche, von dieser unendlich wenig abweichend, aufgefasst wird und sie so mit dieser verglichen wird, dass ein gewisser Punkt z von ihr mit dem Punkt Z der vorgelegten verglichen werde, so dennoch, dass das Intervall Zz immer unendlich klein ist, werden die Variationen so dargestellt werden, dass gilt

$$\delta x = Ax - AX = Xx, \quad \delta y = xy - XY \quad \text{und} \quad \delta z = yz - YZ;$$

und weil diese Variationen völlig unserem Belieben überlassen sind und auf keine Weise voneinander abhängen, können sie auch als Funktionen der zwei x und y betrachtet werden und das so, dass keine von den übrigen abhängt, sondern irgendeine nach Belieben erdacht werden kann. Ja daher wird sogar eingesehen, weil ja die sehr nahe Oberfläche von der vorgelegten verschieden sein muss, dass in keinster Weise

$$\delta z = p\delta x + p'\delta y$$

sein wird, wenn freilich für die vorgelegte Oberfläche galt

$$\mathrm{d}z = p\mathrm{d}x + p'\mathrm{d}y,$$

andernfalls wäre der Punkt z in derselben Oberfläche, woher insgesamt die drei Funktionen von x und y für die Variationen δx, δy, δz so beschaffen sein müssen, dass nicht gilt

$$\delta z = p\delta x + p'\delta y,$$

sondern sie eher von diesem Wert auf irgendeine Weise abweichen; dort ist freilich besonders zu bemerken, dass diese Funktionen sich so weit erstrecken, dass die unstetigen nicht ausgeschlossen werden und daher nach Belieben Variationen nur in einem einzigen Punkt oder zumindest in einem sehr kleinen Raum festgelegt werden können. Damit aber auch hier dem Zweifel kein Platz gelassen wird, ist natürlich zu bemerken, dass daher, da wir z als eine Funktion solcher Art von x und y festlegen, dass gilt

$$\mathrm{d}z = p\mathrm{d}x + p'\mathrm{d}y$$

keineswegs folgt, dass auch gelten wird

$$\mathrm{d}z = p\delta x + p'\delta y,$$

wie wir oben angenommen haben, deshalb weil wir hier z eine eigene, in keinster Weise von den Variationen von x und y abhängende Variation zuteilen.

Problem 16

§147 *Nachdem eine Gleichung zwischen den drei Variablen x, y, z vorgelegt wurde, denen irgendwelche Variationen δx, δy, δz zugeteilt werden, die Variationen der Differentialformeln zweiten Grades*

$$q = \left(\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x^2}\right), \quad q' = \left(\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) \quad \textit{und} \quad q'' = \left(\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}y^2}\right)$$

zu finden.

LÖSUNG

Hier wird wiederum z wie eine Funktion von x und y angesehen, von welchen auch die drei Variationen δx, δy, δz, die auf keine Weise voneinander abhängen, Funktionen sind. Weil wir ja im vorhergehenden Problem festgelegt haben

$$q = \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right) \quad \text{und} \quad p' = \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right),$$

werden wir unter Zuhilfenahme dieser Formeln haben

$$q = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right), \quad q' = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}x}\right) \quad \text{und} \quad q'' = \left(\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}y}\right),$$

und hier ist den Variationen δp und $\delta p'$ Rechnung zu tragen, welche wir gefunden haben

$$\delta p = \left(\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}x}\right) - p\left(\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}\right) \quad \text{und} \quad \delta p' = \left(\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}y}\right) - p'\left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y}\right).$$

Indem wir also auf die gleiche Weise die Rechnung ausführen, werden wir zuerst finden

$$\delta q = \left(\frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}x}\right) - q\left(\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}\right),$$

wo $(\frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}x})$ gefunden wird, wenn der Wert δp für konstant gesetztes y differentiert wird und das Differential durch $\mathrm{d}x$ geteilt wird, woher entsteht

$$\left(\frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}x}\right) = \left(\frac{\mathrm{dd}\delta z}{\mathrm{d}x^2}\right) - q\left(\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}\right) - p\left(\frac{\mathrm{dd}\delta x}{\mathrm{d}x^2}\right)$$

wegen $q = (\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x})$, woher wir folgern

$$\delta q = \left(\frac{\mathrm{dd}\delta z}{\mathrm{d}x^2}\right) - 2q\left(\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}\right) - p\left(\frac{\mathrm{dd}\delta x}{\mathrm{d}x^2}\right).$$

Auf dieselbe Weise wird wegen $q' = (\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y})$ sein

$$\delta q' = \left(\frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}y}\right) - q'\left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y}\right),$$

aber es ist

$$\left(\frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}y}\right) = \left(\frac{\mathrm{dd}\delta z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) - q'\left(\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}\right) - p\left(\frac{\mathrm{dd}\delta x}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right)$$

und daher

$$\delta q' = \left(\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) - q'\left(\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}\right) - q'\left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y}\right) - p\left(\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right).$$

Der andere Wert $q' = (\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}x})$ aber liefert auf die gleiche Weise behandelt

$$\delta q' = \left(\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) - q'\left(\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}\right) - q'\left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y}\right) - p'\left(\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right),$$

die Abweichung welches Wertes von jenem eine bald genauer zu untersuchende Unahnnehmlichkeit involviert. Aus der dritten Formel $q'' = (\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}y})$ wird aber gefunden

$$\delta q'' = \left(\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}y^2}\right) - 2q''\left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y}\right) - p'\left(\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y^2}\right).$$

Bemerkung 1

§148 Ich werde nun nach dem Ursprung der Abweichung der Variation $\delta q'$, die aus dem doppelten Wert

$$q' = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}x}\right)$$

entstanden ist, suchen und bemerke, dass in diesen die Variation ausdrückenden Formeln entweder die Größe x oder die Größe y für konstant gehalten wird, je nachdem was der Nenner irgendeines Gliedes anzeigt. Aber wenn wir die Größe x konstant zu bleiben annehmen, wie veränderlich auch immer unterdessen die andere y ist, erfordert die Natur der Sache, dass auch die Variationen von x keine Veränderung eingehen, was aber nicht passiert, wenn die Variation δx auch von der Größe y abhängt, welches selbe auch über die andere Variable y, während sie konstant gesetzt wird, festzuhalten ist. Daher ist klar, wenn die Variationen δx und δy zugleich von beiden Variablen x und y abzuhängen angenommen werden, dass es der Annahme, nach welcher eine der beiden immer konstant festgelegt wird, widerspricht. Deswegen kann dieser Umstand nicht anders vermieden werden, außer wenn wir festlegen, dass die Variation von x überhaupt nicht von der anderen Variable y abhängt und die Variation δy von dieser nicht von der anderen x abhängt. Wenn aber δx allein durch x und δy allein durch y bestimmt wird, dass gilt

$$\text{sowohl} \quad \left(\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}y}\right) = 0 \quad \text{als auch} \quad \left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}\right) = 0,$$

wird auch sein

$$\left(\frac{\mathrm{dd}\delta x}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) = 0,$$

und so werden jene beiden sich unterscheidenden für $\delta q'$ gefundenen Werte in Übereinstimmung gebracht.

BEMERKUNG 2

§149 Wir werden aber allen Zweifeln in dieser Untersuchung auf Glücklichste entgegnen, wenn wir allein der Größe z Variationen zuteilen, wobei die zwei übrigen x und y vollkommen unverändert gelassen wurden, sodass so $\delta x = 0$ wie $\delta y = 0$ ist, auf welche Weise nicht nur die Rechnung begünstigt wird, sondern auch der Gebrauch dieses Variationskalküls kaum eingeschränkt wird. Wenn wir daher nämlich irgendeine Oberfläche mit einer anderen ihr sehr nahen vergleichen, steht nichts im Wege, dass wir die einzeln vorgelegten Punkte der Oberfläche auf die Punkte der ihr sehr nahen beziehen, denen dieselben zwei Koordinaten x und y entsprechen, und allein die dritte z eine Veränderung erfährt. Ja diese Annahme ist, wenn wir zu Integralformeln fortschreiten werden, sogar um so mehr von Nöten, weil ja immer die ganze Aufgabe auf Integralformeln solcher Art geführt wird, die eine zweifache Integration erfordern, in deren einer allein x, in der anderen hingegen allein y wie die Variable behandelt wird; wenn also nicht einige dieser Variationen von diesen als null festgelegt werden, gingen daher die größten Unannehmlichkeiten in die Rechnung ein; weil diese per se meistens sehr schwer ist, scheint es keineswegs klug, dass aus diesem Teil die Schwierigkeiten vervielfacht werden. Deswegen werde ich diese Behandlung so erledigen, dass ich im Nachfolgenden den beiden Variablen x und y immer gar keine Variationen zuteile und allein die dritte z um irgendeine Variation δz vermehrt zu werden annehme, wo ich freilich δz als irgendeine entweder stetige oder unstetige Funktion von x und y ansetzen werde.

Problem 17

§150 *Wenn z irgendeine Funktion von x und y war und ihr die gleichermaßen irgendwie von x und y abhängende Variation zugeteilt wird, die Variationen aller Differentialformeln irgendwelcher Ordnung zu finden.*

Lösung

Für die Differentiale ersten Grades hat man diese zwei Formeln

$$p = \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right) \quad \text{und} \quad p' = \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right),$$

deren Variationen, weil x und y keine Variation zu erfahren aufgefasst werden, sich aus den oben gefundenen so verhalten werden

$$\delta p = \left(\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}x}\right) \quad \text{und} \quad \delta p' = \left(\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}y}\right).$$

Für die Differentiale zweiter Ordnung hat man diese drei Formeln

$$q = \left(\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x^2}\right), \quad q' = \left(\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) \quad \text{und} \quad q'' = \left(\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}y^2}\right),$$

sodass ist

$$q = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right), \quad q' = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}x}\right) \quad \text{und} \quad q'' = \left(\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}y}\right),$$

deren Variationen aus dem vorhergehenden Problem wegen $\delta x = 0$ und $\delta y = 0$ sind

$$\delta q = \left(\frac{\mathrm{dd}\delta z}{\mathrm{d}x^2}\right), \quad \delta q' = \left(\frac{\mathrm{dd}\delta z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right), \quad \delta q'' = \left(\frac{\mathrm{dd}\delta z}{\mathrm{d}y^2}\right).$$

Wenn wir auf die gleiche Weise zu Differentialen dritter Ordnung aufsteigen, tauchen diese vier Formeln auf

$$r = \left(\frac{\mathrm{d}^3z}{\mathrm{d}x^3}\right), \quad r' = \left(\frac{\mathrm{d}^3z}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}\right), \quad r'' = \left(\frac{\mathrm{d}^3z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2}\right), \quad r''' = \left(\frac{\mathrm{d}^3z}{\mathrm{d}y^3}\right),$$

deren Variationen so ausgedrückt hervorzugehen schon klar ist

$$\delta r = \left(\frac{\mathrm{d}^3\delta z}{\mathrm{d}x^3}\right), \quad \delta r' = \left(\frac{\mathrm{d}^3\delta z}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}\right), \quad \delta r'' = \left(\frac{\mathrm{d}^3\delta z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2}\right), \quad \delta r''' = \left(\frac{\mathrm{d}^3\delta z}{\mathrm{d}y^3}\right),$$

woher per se klar ist, wie die Variationen von Differentialformeln höherer Ordnungen auszudrücken sind.

Korollar 1

§151 Daher ist schon klar, dass im Allgemeinen für eine Differentialformel irgendeiner Ordnung

$$\left(\frac{\mathrm{d}^{\mu+\nu}z}{\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}^{\nu}}\right)$$

ihre Variation gleich

$$\left(\frac{\mathrm{d}^{\mu+\nu}\delta z}{\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}y^{\nu}}\right)$$

sein wird, in welcher Form alle oberen enthalten sind.

Korollar 2

§152 Des Weiteren ist auch klar, indem anstelle der Differentiale erster Ordnung die Buchstaben p, p', der zweiten Ordnung die Buchstaben q, q', q'', der dritten Ordnung die Buchstaben r, r', r'', r''', der vierten Ordnung die Buchstaben s, s', s'', s''', s^{IV} etc. eingeführt werden, dass die Gattung der Differentiale beseitigt wird, wie wir auch oben durch Buchstaben dieser Art die Gattung der Differentiale beseitigt haben.

Bemerkung

§153 Weil ja die zwei Variablen x und y überhaupt nicht voneinander abhängen, sodass die eine sogar den selben Wert beibehalten kann, während die andere durch alle möglichen Werte hindurch variiert wird, ist es ersichtlich, dass eine Differentialformel dieser Art $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, die natürlich überhaupt keine Bedeutung haben wird, in der Rechnung nie einen Platz finden kann. Andernfalls aber, weil die Größe z eine Funktion von x und y ist, haben diese Formeln $\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)$, $\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)$ und alle übrigen, welche wir oben betrachtet haben, eine bestimmte Bedeutung und es können keine anderen in die Rechnung eingehen. Weil sich des Weiteren sich hierauf erstreckende Fragen immer darauf zurückführen lassen, dass z wie eine Funktion der beiden x und y betrachtet werden kann, werden Formeln solcher Art $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$, wo die Größe z für konstant zu halten wäre, daher völlig ausgeschlossen und es sind keine anderen außer den oben erwähnten in der Rechnung zugelassen zu werden anzusehen; und so verwickeln alle von Integralformeln freien Ausdrücke außer den Variablen x, y, z keine anderen Differentialformeln außer denen, deren Variationen hier angegeben worden sind.

Problem 18

§154 *Wenn z eine Funktion von x und y ist und ihr eine wie auch immer von x und y abhängende Variation δz zugeteilt wird, dann aber V eine auf irgendeine Weise aus den drei Variablen x, y, z und deren Differentialen irgendwelcher Ordnung zusammengesetzte Größe war, ihre Variation δV zu untersuchen.*

Lösung

Damit im Ausdruck V die Gattungen der Differentiale beseitigt werden, wollen wir, wie wie es bisher auch gemacht haben, festlegen

$$\begin{aligned}
p &= \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right), \quad p' = \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right), \\
q &= \left(\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x^2}\right), \quad q' = \left(\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right), \quad q'' = \left(\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}y^2}\right), \\
r &= \left(\frac{\mathrm{d}^3z}{\mathrm{d}x^3}\right), \quad r' = \left(\frac{\mathrm{d}^3z}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}\right), \quad r'' = \left(\frac{\mathrm{d}^3z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2}\right), \quad r''' = \left(\frac{\mathrm{d}^3z}{\mathrm{d}y^3}\right)
\end{aligned}$$

etc.,

die von der Variation von z abstammenden Variationen welcher Formeln wir so bestimmen, dass, nachdem der Übersichtlichkeit wegen diese Variation $\delta z = w$ gesetzt wurde, welche wie irgendeine Funktion der zwei Variablen x und y angesehen werden muss, gilt

$$\begin{aligned}
\delta p &= \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right), \quad \delta p' = \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right), \\
\delta q &= \left(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2}\right), \quad \delta q' = \left(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right), \quad \delta q'' = \left(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}y^2}\right), \\
\delta r &= \left(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3}\right), \quad \delta r' = \left(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}\right), \quad \delta r'' = \left(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2}\right), \quad \delta r''' = \left(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}y^3}\right)
\end{aligned}$$

etc.

Aber nach jenen Substitutionen wird der vorgelegte Ausdruck V eine Funktion dieser Größen x, y, z, p, p', q, q', q'', r, r', r'', r''' etc. werden. Ihr Differential wird also eine solche Form annehmen

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V = L\mathrm{d}x + M\mathrm{d}y + N\mathrm{d}z + P\mathrm{d}p \;&+ Q\mathrm{d}q \;\;\;\; + R\mathrm{d}r \\ + P'\mathrm{d}p' &+ Q'\mathrm{d}q' \;\, + R'\mathrm{d}r' \\ &+ Q''\mathrm{d}q'' + R''\mathrm{d}r'' \\ &\qquad\qquad\; + R'''\mathrm{d}r''' \end{aligned}$$

etc.

Weil ja nun diese Formel nur sofern eine Variation erhält, wie die Größen, aus welchen sie zusammengesetzt wird, variiert werden, die zwei x und y aber von solchen unberührt festgelegt werden, wird ihre Variation, die wir suchen, sein

$$\begin{aligned} \delta V = N\delta z + P\delta p \;&+ Q\delta q \;\;\;\; + R\delta r \\ + P'\delta p' &+ Q'\delta q' \;\, + R'\delta r' \\ &+ Q''\delta q'' + R''\delta r'' \\ &\qquad\qquad\; + R'''\delta r''' \end{aligned}$$

etc.,

und wenn wir w anstelle der Variation δz schreiben, werden wir durch Einsetzen der gefundenen Substitutionen haben

$$\begin{aligned} \delta V = Nw + P\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right) &+ Q\left(\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x^2}\right) \;\; + R\left(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3}\right) \\ + P'\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right) &+ Q'\left(\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) + R'\left(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}\right) \\ &+ Q''\left(\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y^2}\right) + R''\left(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2}\right) \\ &\qquad\qquad\quad\; + R'''\left(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}y^3}\right) \end{aligned}$$

etc.,

deren Bildung, wenn unter Umständen auch Differentiale höherer Grade eingehen, per se klar ist.

Korollar 1

§155 Weil w wie eine Funktion der zwei Variablen x und y betrachtet wird, ist die Bedeutung der einzelnen Teile, die die Variation δV festlegen, bestimmt und diese Variation ist für vollkommen bestimmt zu halten.

Korollar 2

§156 Wie auch immer aber der Ausdruck V aus Differentialen gebildet ist, weil er ja einen gewissen Wert anzuzeigen anzusehen ist, muss er unter Verwendung der Substitutionen immer von der Gattung der Differentiale befreit werden.

Korollar 3

§157 Wenn unsere drei Variablen auf eine Oberfläche bezogen werden, dass ihre Koordinaten $AX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ (Fig. 6) sind, wird allein die Ordinate $YZ = z$ überall den unendlichen Zuwachs $Zz = \delta z = w$ zu erhalten verstanden, sodass die Punkte z auf die andere von jener unendlich wenig abweichende Oberfläche fallen.

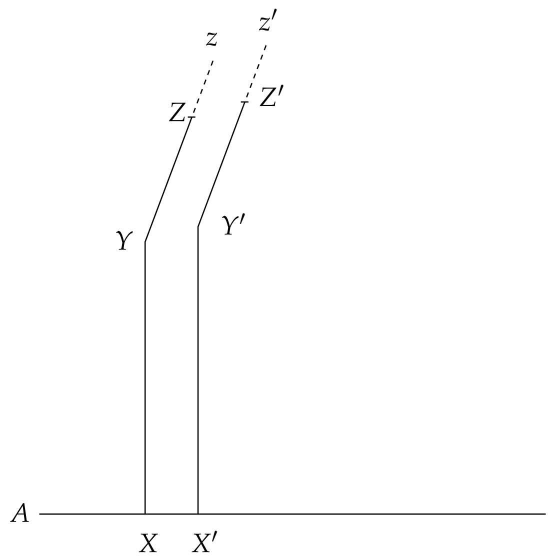

Fig. 6

Bemerkung

§158 Es muss hier dem daher herstammenden Zweifel entgegnet werden, dass die Größe z wie eine Funktion der zwei x und y anzusehen zu sein gesagt haben; denn weil wir ja x und y keine Variationen zuteilen, wenn im Ausdruck V anstelle von z sein Wert in x und y eingesetzt werden würde, ginge es selbst lediglich in eine Funktion von x und y über und erhielte deshalb keine Variation. Aber es ist zu bemerken, auch wenn z wie eine Funktion von x und y angesehen wird, dass sie auch meistens unbekannt ist, wann immer natürlich ihre Natur erst aus der Bedingung der Variation gefunden werden muss; wenn sie aber schon von Anfang an gegeben wäre, muss dennoch, während die Variation gesucht wird, diese Funktion z quasi unbekannt angesehen werden und es lässt sich keineswegs an ihrer Stelle der durch x und y ausgedrückte Wert einsetzen, bevor die Variation, die natürlich allein von z abhängt, vollkommen untersucht worden ist.

Kapitel 7
Über die Variation drei Variablen involvierender Integralformeln, von denen eine wie eine Funktion der zwei übrigen angesehen wird

Leonhard Euler

Problem 19

§159 *Die Natur der sich hierher erstreckenden Formeln zu entwickeln und die Methode, mit welcher deren Variationen untersucht werden sollten, zu erläutern.*

Lösung

Weil man die drei Variablen x, y und z hat, von denen die eine z wie eine Funktion der zwei übrigen x und y zu betrachten ist, auch wenn in der Untersuchung der Variation selbst die Art dieser Funktion für unbekannt gehalten werden muss, weichen die Integralformeln, die in dieser Art des Kalküls auftauchen, sehr stark von denen ab, die über nur zwei Variablen vorgelegt zu werden pflegt. Wie nämlich eine solche Integralformel $\int V\mathrm{d}x$, wo V die zwei Variablen x und y zu verwickeln angesehen wird, von welchen y von x abzuhängen aufgefasst wird, quasi als Summe aller elementaren Werte $V\mathrm{d}x$, durch alle Werte von x hindurch gesammelt, betrachtet werden kann, so, wann immer man drei Variablen x, y und z hat, von welchen diese z von den zwei x und y zugleich abzuhängen aufgefasst wird, involvieren sich hierher erstreckende Integrale die Sammlung aller Elemente, die auf alle Werte so von x wie von y bezogen wurden, und erfordern daher auch eine zweifache Integration, die eine durch alle Werte von x hindurch, die andere hingegen alle Elemente von y vereinigend. Daher müssen Integrale dieser Art in einer solchen Form $\iint V\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ enthalten sein, mit welcher natürlich eine zweifache Integration angedeutet wird, deren Entwicklung so unternommen zu werden pflegt, dass zuerst die eine Variable y wie eine Konstante angesehen wird und der Wert der Formel $\int V\mathrm{d}x$, zwischen den Integrationsgrenzen erstreckt, gesucht wird; weil in dieser nur x einen entweder gegebenen oder von y abhängenden Wert erhält, wird das Integral $\int V\mathrm{d}x$ in eine Funktion nur von y übergehen, nach Multiplizieren welcher mit $\mathrm{d}y$ übrig ist, dass das Integral $\int \mathrm{d}y \int V\mathrm{d}x$ untersucht wird; die Form $\int \mathrm{d}y \int V\mathrm{d}x$, auf diese Weise behandelt, ist also jener $\iint V\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ gleichwertig zu sein anzusehen. Und wenn in umgekehrter Reihenfolge zuerst die Größe x konstant angenommen wird und das Integral $\int V\mathrm{d}y$ durch vorgeschriebene Grenzen hindurch erstreckt wird, wird es darauf wie eine Funktion von x betrachtet werden können und das gesuchte Integral $\int \mathrm{d}x \int V\mathrm{d}y$ gefunden werden können. Es ist aber egal welche der beiden Arten, den Wert der doppelten Integralformel $\iint V\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ zu entwickeln, wir gebrauchen.

Weil also in dieser Art keine anderen Integralformeln außer von dieser Art $\iint V\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ auftauchen können, geht die ganze Aufgabe darauf zurück, dass wir zeigen, wie die Variation einer Form dieser Art gefunden werden muss. Weil wir ja aber die Größen x und y einer Variation unbeteiligt annehmen, wird aus dem, was anfangs [§75] gezeigt wurde, leicht gefolgert, dass sein wird

$$\delta \iint V\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint \delta V\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

wo δV die Variation von V bezeichnet; und hier ist eine doppelte Integration von Nöten, genauso wie wir eben angedeutet haben.

Korollar 1

§160 Wenn wir das Integral $\iint V\mathrm{d}x\mathrm{d}y = W$ setzen, weil $\int \mathrm{d}x \int V\mathrm{d}y = W$ ist, wird nach Differentiation nach x nur $\int V\mathrm{d}y = (\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x})$ und daher weiter durch Differentieren nach y $V = (\frac{\mathrm{dd}W}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y})$ sein, woher klar ist, dass das Integral W so beschaffen ist, dass $V = (\frac{\mathrm{dd}W}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y})$ ist.

KOROLLAR 2

§161 Weil eine doppelte Integration zu unternehmen ist, wird in jeder der beiden eine beliebige Größe eingeführt; die eine Integration führt aber anstelle einer Konstante irgendeine Funktion von x ein, die X sei, die andere aber irgendeine Funktion von y, die Y sei, sodass das vollständige Integral ist

$$\iint V\mathrm{d}x\mathrm{d}y = W + X + Y.$$

KOROLLAR 3

§162 Dies wird auch durch die Auflösung selbst bestätigt; es wird nämlich zuerst

$$\int V\mathrm{d}y = \left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right)$$

wegen $(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}) = 0$ sein, dann aber wird $V = (\frac{\mathrm{dd}W}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y})$ sein, weil weder X noch $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}$ von y abhängt. Daher, wenn $(\frac{\mathrm{dd}W}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}) = V$ war, wird das vollständige Integral sein

$$\iint V\mathrm{d}x\mathrm{d}y = W + X + Y.$$

BEMERKUNG 1

§163 Es ist aber ganz und gar notwendig, dass die Gestalt von Doppelintegralformeln dieser Art $\iint V\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ sorgfältiger einer Untersuchung unterzogen wird, was am bequemsten durch die Theorie der Oberflächen geleistet werden können wird. Es seien also wie bisher x und y zwei auf der Basis $AX = x$, $XY = y$ (Fig. 7) angenommene orthogonale Koordinaten, auf welcher normal die dritte bis hin zur Oberfläche verlängerte Ordinate $YZ = z$ fußt. Wenn nun jene zwei Koordinaten x und y um ihre Differentiale $XX' = \mathrm{d}x$ und $YY' = \mathrm{d}y$ wachsen, entsteht daher auf der Basis das Elementparallelogramm $YxyY' = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, welchem ein Element der Integralformel entspricht. Wenn so die Frage über das von der Oberfläche eingeschlossene Volumen gestellt wird, wird ihr Element gleich $z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ und daher der ganze Rauminhalt gleich $\iint z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ sein; wenn die Oberfläche selbst gesucht wird, wird für $\mathrm{d}z = p\mathrm{d}x + p'\mathrm{d}y$ gesetzt ihr über diesem Rechteck $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ emporragendes

Element gleich $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\sqrt{1+pp+p'p'}$ und daher die Oberfläche selbst gleich $\iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y\sqrt{1+pp+p'p'}$ sein, woher allgemein die Beschaffenheit der Doppelintegralformel $\iint V\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ verstanden wird.

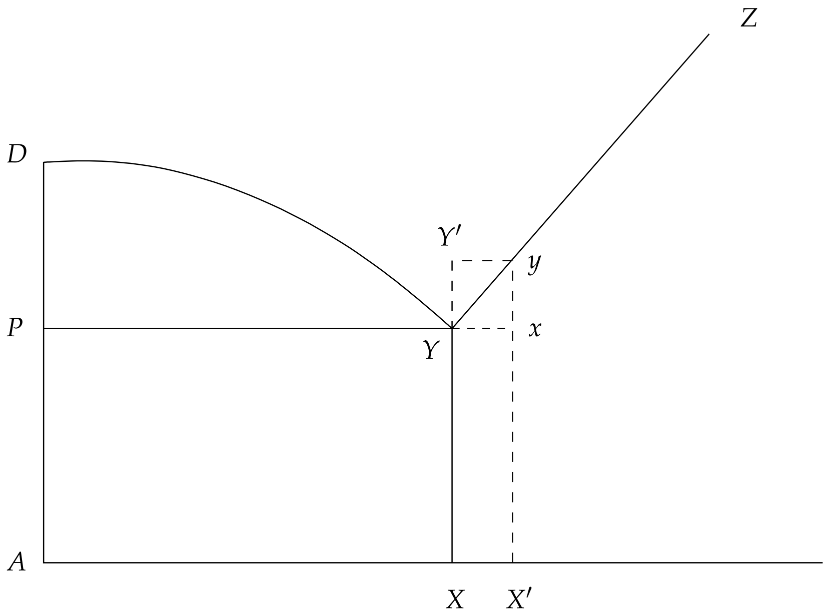

Fig. 7

Wenn daher nun der Wert einer solchen Formel gesucht wird, die einem gegebenem Raum auf der Basis wie z. B. $ADYX$ entspricht, werde zuerst für konstant genommenes x das einfache Integral $\int V\mathrm{d}y$ untersucht und dann werde y die Größe XY, die bis hin zur Kurve DY fortgeführt wurde, zugeschrieben, die aus der Natur dieser Kurve einer gewissen Funktion von x gleich werde. So wird also $\mathrm{d}x\int V\mathrm{d}y$ das dem Rechteck $XYxX' = y\mathrm{d}x$ entsprechende Element der vorgelegten Formel ausdrücken, dessen erneut genommenes und allein aus der Variable x bestehende Integral $\int \mathrm{d}x \int V\mathrm{d}y$ schließlich der dem ganzen Raum $ADYX$ entsprechende Wert gegeben wird, wenn freilich jede der beiden Integrationen unter Beifügung einer Konstante in entsprechender Weise bestimmt wird.

Bemerkung 2

§164 So muss sich die Entwicklung von Doppelintegralformeln dieser Art verhalten, wenn sie an eine auf der Basis gegebenen Form wie beispielsweise $ADYX$ anzupassen war; wenn wir aber jede der beiden Integrationen unbestimmt erledigen wollen, dass wir zuerst für konstant genommenes x das Integral $\int V\mathrm{d}y$ suchen, was dem elementaren Rechteck $XYxX' = y\mathrm{d}x$ zu entsprechen zu verstehen ist, wenn freilich mit $\mathrm{d}x$ multipliziert wird, darauf aber in der Integration der Formel $\int \mathrm{d}x \int V\mathrm{d}y$ die Größe $y = XY$ dieselbe zu bleiben auffassen, wobei allein x als Variable angenommen wurde, dann wird der dem unbestimmten Rechteck $APYX = xy$ entsprechende Wert hervorgehen, wenn freilich die durch jede der beiden Integrationen eingegangenen Konstanten entsprechend bestimmt werden. Aber wenn die übrigen Grenzen dieses Raumes außer den Linien XY und PY als unbestimmt betrachtet werden, wird das Integral $\int\int V\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ die zwei unbestimmten Funktionen $X + Y$ erhalten, jene von x, diese aber von y. Wenn wir daher also diese Dinge darauf auf die Berechnung der Maxima und Minima anwenden wollen, weil ja die Eigenschaft des Maximums oder Minimums, die einem gewissen gegebenen Raum $ADYX$ zufallen muss, zugleich auch notwendigerweise einem unbestimmten Raum wie beispielsweise $APYX$ zukommt, wird es hilfreich sein, dass jene zweifache Integration auf die hier erläuterte Weise ausgeführt wird.

Problem 20

§165 *Wenn V irgendeine aus den drei Variablen x, y, z und deren Differentialen zusammengesetzte Formel ist, die Variation der Doppelintegralformel $\int\int V\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ zu finden, während der Größe z, die wie eine Funktion von x und y betrachtet wird, irgendwelche Variationen zugeteilt werden.*

Lösung

Um die Gattung der Differentiale zu beseitigen, wollen wir festlegen

$$p = \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right), \ p' = \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right),$$

$$q = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right), \; q' = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}x}\right), \; q'' = \left(\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}y}\right),$$

$$r = \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}\right), \; r' = \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}q'}{\mathrm{d}x}\right), \; r'' = \left(\frac{\mathrm{d}q'}{\mathrm{d}y}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}q''}{\mathrm{d}x}\right), \; r''' = \left(\frac{\mathrm{d}q''}{\mathrm{d}y}\right)$$

etc.,

dass V eine Funktion der endlichen Größen x, y, z, p, p', q, q', q'', r, r', r'', r''' etc. wird. Dann werde ihr Differential wie folgt festgelegt

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V = L\mathrm{d}x + M\mathrm{d}y + N\mathrm{d}z + P\mathrm{d}p &+ Q\mathrm{d}q &&+ R\mathrm{d}r \\ + P'\mathrm{d}p' &+ Q'\mathrm{d}q' &&+ R'\mathrm{d}r' \\ &+ Q''\mathrm{d}q'' &&+ R''\mathrm{d}r'' \\ & &&+ R'''\mathrm{d}r''' \end{aligned}$$

etc.;

weil daher zugleich ihre Variation δV bekannt wird, wird aus dem vorhergehenden Problem die gesuchte Variation gefolgert

$$\delta \iint V\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y \left\{ \begin{array}{llll} N\delta z + P\delta p & +Q\delta q & +R\delta r \\ \quad + P'\delta p' & +Q'\delta q & +R'\delta r' \\ & +Q''\delta q'' & +R''\delta r'' \\ & & +R'''\delta r''' \\ & \text{etc.} & \end{array} \right\}$$

Wenn wir daher nun, wie wir es in §154 gemacht haben, die Variation $\delta z = w$ setzen, die sich wie irgendeine Funktion der zwei Variablen x und y betrachten lässt, schließen wir eben daher, dass diese Variation sein wird

$$\delta \iint V\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y \left\{ \begin{array}{llll} Nw + P\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right) & +Q\left(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2}\right) & +R\left(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3}\right) \\ \quad + P'\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right) & +Q'\left(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) & +R'\left(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}\right) \\ & +Q''\left(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}y^2}\right) & +R''\left(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2}\right) \\ & & +R'''\left(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}y^3}\right) \\ & \text{etc.} & \end{array} \right\}$$

Korollar 1

§166 Wenn also die Gestalt jeder der beiden Funktionen z und $\delta z = w$ oder die Art der Zusammensetzung aus den zwei Variablen x und y gegeben wäre, dann könnte durch die zuvor gegebenen Vorschriften die Variation der Doppelintegralformel $\iint V \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ angegeben werden, wie auch immer die Größe V aus den Variablen x, y, z und deren Differentialen zusammengesetzt war.

Korollar 2

§167 Die ganze Aufgabe wird natürlich auf die Entwicklung der gefundenen Doppelintegralformel zurückgehen; weil diese aus mehreren Teilen besteht, wird es gefällig sein, dass einzelne Teile durch zweifache Integration, wie zuvor erläutert, behandelt werden.

Bemerkung

§168 Wann immer aber die Beschaffenheit der Funktion z nicht bekannt ist und sie erst aus der Bedingung der Variation gefunden werden muss, sodass die Variation $\delta z = w$ überhaupt keine Bestimmung erfährt, sowie es passiert, wenn die Formel $\iint V \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ den maximalen oder minimalen Wert erhalten muss, dann ist es ganz und gar notwendig, dass die einzelnen Glieder der gefundenen Variation $\delta \iint V \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ so reduziert werden, dass überall nach dem Doppelintegralzeichen nicht die Differentialwerte der Variation $\delta z = w$, sondern diese Variation selbst auftaucht; eine Reduktion solcher Art haben wir schon oben in den nur zwei Variablen involvierenden Formeln gebraucht. Aber eine solche Reduktion, weil sie für Doppelintegralformeln weniger üblich ist, erfordert eine genauere Erläuterung. Für dieses Ziel bemerke ich, dass mit einer Reduktion dieser Art zu einfachen Integralformeln gelangt wird, in denen nur die eine der beiden Größen x und y für variabel gehalten wird und die andere wie eine Konstante angesehen wurde, um das anzugeben, wird, damit nicht entgegen der Notwendigkeit die Zeichen vervielfacht werden, eine solche Form $\int T \mathrm{d}x$ das Integral der Differentialformel $T\mathrm{d}x$ bezeichnen, während die Größe y für konstant gehalten wird; und auf die gleiche Weise ist zu verstehen, dass in dieser Form $\int T \mathrm{d}y$ allein die Größe y wie eine Variable betrachtet wird, was umso mehr ersichtlich ist, weil nach Weglassen dieser Bedingung diese Formeln überhaupt keine Bedeutung hätten. Und es ist im Folgenden also nicht nötig, dass aufgezeigt wird, wenn T die beiden Variablen x und y umfasst, welche der beiden in den einfachen Integralformeln $\int T\mathrm{d}x$ oder $\int T\mathrm{d}y$ entweder konstant oder variabel angenommen wird, weil allein die, deren Differential ausgedrückt wird, für die Variable zu halten ist. In den Doppelintegralformeln $\int\int V\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ist aber immer festzuhalten, dass die eine Integration auf die Variabilität allein von x, die andere aber auf die allein von y zu beschränken ist und es daher egal ist, welche der beiden Integrationen als erste unternommen wird.

PROBLEM 21

§169 *Die Variation der Doppelintegralformel $\int\int V\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, die im vorgehenden Problem gefunden wurde, so zu transformieren, dass nach dem Doppelintegralzeichen überall die Variation $\delta z = w$ sich selbst aufteilt und ihre Differentiale herausgeworfen wurden.*

LÖSUNG

Damit sich diese Transformation weiter erstreckt, seien T und v irgendwelche Funktionen der zwei Variablen x und y und es werde diese Doppelintegralformel $\int\int T\mathrm{d}x\mathrm{d}y(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x})$ betrachtet, die nach Trennen der Variität der Integrationen so dargestellt werde $\int \mathrm{d}y \int T\mathrm{d}x(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x})$, dass in der Integration $\int T\mathrm{d}x(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x})$ allein die Größe x wie die Variable betrachtet wird. Dann aber wird $\mathrm{d}x(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}) = \mathrm{d}v$ sein, weil y für konstant gehalten wird, und daher wird werden

$$\int T\mathrm{d}v = Tv - \int v\mathrm{d}T;$$

weil dort im Differential von $\mathrm{d}T$ allein die Variable x berücksichtigt wird, ist es gefällig, um dies anzuzeigen, dass $\mathrm{d}x(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x})$ anstelle von $\mathrm{d}T$ geschrieben wird, sodass gilt

$$\int T\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) = Tv - \int v\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)$$

und daher unsere Formel so reduziert hervorgeht

$$\iint T\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)=\int Tv\mathrm{d}y-\iint v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right).$$

Auf die gleiche Weise werden wir nach Vertauschen der Variablen erhalten

$$\iint T\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right)=\int Tv\mathrm{d}x-\iint v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}y}\right).$$

Nachdem nun gleichsam dieses Lemma vorausgeschickt wurde, wird sich die Reduktion der im vorhergehenden Problem gefundenen Variation so verhalten

$$\iint P\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)=\int Pw\mathrm{d}y-\iint w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right),$$
$$\iint P'\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right)=\int P'w\mathrm{d}x-\iint w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}y}\right).$$

Weiter sei für die folgenden Glieder zuerst $(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x})=v$ und daher $(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2})=(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x})$, woher gefolgert wird

$$\iint Q\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2}\right)=\int Q\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)-\iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right),$$

und, nachdem das letzte Glied in gleicher Weise reduziert wurde, wird sein

$$\iint Q\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2}\right)=\int Q\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)-\int w\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}\right)+\iint w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2}\right).$$

Durch dieselbe Substitution werden wir $(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y})=(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y})$ haben und daher

$$\iint Q'\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right)=\int Q'\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)-\iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}y}\right)$$

oder

$$\iint Q'\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right)=\int Q'\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)-\int w\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}y}\right)+\iint w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}Q'}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right),$$

welche Form wegen

$$\int Q'\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)=Q'w-\int w\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}x}\right)$$

in diese übergeht

$$\iint Q'\mathrm{d}x\mathrm{d}y = Q'w - \int w\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}x}\right) + \iint w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}Q'}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) - \int w\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}y}\right).$$

Dann erhalten wir aber für die dritte Form dieser Ordnung

$$\iint Q''\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}y^2}\right) = \int Q''\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right) - \int w\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}Q''}{\mathrm{d}y}\right) + \iint w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}Q''}{\mathrm{d}y^2}\right).$$

Weiter wird wegen $(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3}) = (\frac{\mathrm{dd}v}{\mathrm{d}x^2})$, während $v = (\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x})$ bleibt, werden

$$\iint R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}v}{\mathrm{d}x^2}\right) = \int R\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) - \int v\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}\right) + \iint v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}R}{\mathrm{d}x^2}\right)$$

und

$$\iint v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}R}{\mathrm{d}x^2}\right) = \int w\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}R}{\mathrm{d}x^2}\right) - \iint w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3}\right),$$

sodass gilt

$$\iint P\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3}\right) = \int R\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2}\right) - \int \mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}\right) + \int w\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}R}{\mathrm{d}x^2}\right) \\ - \iint w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3}\right).$$

Darauf wird wegen $(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}) = (\frac{\mathrm{dd}v}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y})$ sein

$$\iint R'\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}v}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) = R'v - \int v\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}x}\right) + \iint v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}R'}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) - \int v\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}y}\right),$$

und weil hier auch gilt

$$\iint v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}R'}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) = \int w\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}R'}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) - \iint w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}^3R'}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}\right),$$

folgern wir, dass gelten wird

$$\iint R'\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}\right) = R'\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right) - \int\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}x}\right) + \int w\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{dd}R'}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) \\ - \int\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}y}\right) - \iint w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}^3R'}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}\right).$$

Schließlich folgern wir daher durch Vertauschen von x und y

$$\begin{aligned}\iint R''\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2}\right) = R''\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right) - \int\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}R''}{\mathrm{d}y}\right) + \int w\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{dd}R''}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right)\\ - \int\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}R''}{\mathrm{d}x}\right) - \iint w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}^3R''}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2}\right)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\iint R'''\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}y^3}\right) = \int R'''\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}y^2}\right) - \int\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}R'''}{\mathrm{d}y}\right)\\ + \int w\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{dd}R'''}{\mathrm{d}y^2}\right) - \iint w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}^3R'''}{\mathrm{d}y^3}\right).\end{aligned}$$

Wenn wir diese Werte einsetzen, finden wir

$$\delta\iint V\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint w\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left\{\begin{array}{lll} N - \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right) & + \left(\frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2}\right) & - \left(\frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3}\right)\\ \quad - \left(\frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}y}\right) & + \left(\frac{\mathrm{dd}Q'}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) & - \left(\frac{\mathrm{d}^3R'}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}\right)\\ & + \left(\frac{\mathrm{dd}Q'}{\mathrm{d}y^2}\right) & - \left(\frac{\mathrm{d}^3R''}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2}\right)\\ & & - \left(\frac{\mathrm{d}^3R'''}{\mathrm{d}y^3}\right)\end{array}\right\}$$

$$\begin{aligned}&+ \int Pw\mathrm{d}y + \int P'w\mathrm{d}x + \int Q\mathrm{d}y\left(\tfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right) - \int w\mathrm{d}x\left(\tfrac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}x}\right) + Q'w + \int Q''\mathrm{d}x\left(\tfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right)\\ &\qquad - \int w\mathrm{d}y\left(\tfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}\right) - \int w\mathrm{d}y\left(\tfrac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}y}\right) \qquad - \int w\mathrm{d}x\left(\tfrac{\mathrm{d}Q''}{\mathrm{d}y}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&+ \int R\mathrm{d}y\left(\tfrac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2}\right) \quad - \int\left(\tfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x\left(\tfrac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}x}\right) + R'\left(\tfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right) - \int\left(\tfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}y\left(\tfrac{\mathrm{d}R''}{\mathrm{d}y}\right) + \int R'''\mathrm{d}x\left(\tfrac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}y^2}\right)\\ &- \int\left(\tfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}y\left(\tfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}\right) - \int\left(\tfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}y\left(\tfrac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}y}\right) \qquad - \int\left(\tfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}x\left(\tfrac{\mathrm{d}R''}{\mathrm{d}x}\right) - \int\left(\tfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}x\left(\tfrac{\mathrm{d}R'''}{\mathrm{d}y}\right)\\ &+ \int w\mathrm{d}y\left(\tfrac{\mathrm{dd}R}{\mathrm{d}x^2}\right) \quad + \int w\mathrm{d}y\left(\tfrac{\mathrm{dd}R'}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) \quad + R''\left(\tfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right) + \int w\mathrm{d}x\left(\tfrac{\mathrm{dd}R''}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) \quad + \int w\mathrm{d}x\left(\tfrac{\mathrm{dd}R'''}{\mathrm{d}y^2}\right)\end{aligned}$$

etc.

Korollar 1

§170 Der erste Teil dieses Ausdruckes ist hinreichend ersichtlich, die übrigen können aber angenehm so umgeordnet werden, dass deren Beschaffenheit erfasst wird:

$$\delta\int w\mathrm{d}y\left\{\begin{array}{llll} P-\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}\right) & +\left(\frac{\mathrm{dd}R}{\mathrm{d}x^2}\right) & - & \text{etc.}\\ \quad-\left(\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}x}\right) & +\left(\frac{\mathrm{dd}R'}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) & & \\ & +\left(\frac{\mathrm{dd}R''}{\mathrm{d}y^2}\right) & & \end{array}\right\}+\int w\mathrm{d}x\left\{\begin{array}{llll} P'-\left(\frac{\mathrm{d}Q''}{\mathrm{d}y}\right) & +\left(\frac{\mathrm{dd}R''}{\mathrm{d}y^2}\right) & - & \text{etc.}\\ \quad-\left(\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}x}\right) & +\left(\frac{\mathrm{dd}R''}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) & & \\ & +\left(\frac{\mathrm{dd}R'}{\mathrm{d}x^2}\right) & & \end{array}\right\}$$

$$+\int\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}y\left\{\begin{array}{ll} Q-\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}\right) & +\ \text{etc.}\\ \quad-\left(\frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}y}\right) & \end{array}\right\}+\int\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}x\left\{\begin{array}{ll} Q''-\left(\frac{\mathrm{d}R'''}{\mathrm{d}y}\right) & +\ \text{etc.}\\ \quad-\left(\frac{\mathrm{d}R''}{\mathrm{d}x}\right) & \end{array}\right\}$$

$$+\int\left(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2}\right)\mathrm{d}y(R-\text{etc.})+\int\left(\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}y^2}\right)\mathrm{d}x(R'''-\text{etc.})+\text{etc.}$$

$$w\left\{\begin{array}{ll} Q'-\left(\frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}x}\right) & +\ \text{etc.}\\ \quad-\left(\frac{\mathrm{d}R''}{\mathrm{d}y}\right) & \end{array}\right\}+\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)(R'-\text{etc.})+\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right)(R''-\text{etc.})+\text{etc.}$$

KOROLLAR 2

§171 Hier wird unter Aufbringen auch nur wenig Aufmerksamkeit bald klar werden, wie diese Teile weiter fortgesetzt werden müssen, wenn unter Umständen die Größe V Differentiale höherer Grade umfasst.

KOROLLAR 3

§172 In denen einen dieser Integralformeln, welche mit dem Differential dy behaftet sind, wird die Größe x konstant angenommen, welchen ein der Integrationsgrenze entsprechender Wert zugeteilt wird; in den anderen hingegen, die mit dem Differential dx behaftet sind, ist y konstant und der Integrationsgrenze gleich, woher klar ist, dass in den Integrationsgrenzen so x wie y einen konstanten Wert erhalten.

Bemerkung 1

§173 Diese Formel der Variation ist also an den Fall angepasst worden, in welchem die Integrationsgrenzen so x wie y konstante Werte zuteilen. Wie wenn beispielsweise die Frage über die Oberfläche gestellt wurde, ist die Integralformel $\int\int V\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ auf das auf der Basis angenommen Rechteck $APYX$ (Fig. 7) zu beziehen und ihr Wert muss so bestimmt werden, dass sie für $x = 0$ und $y = 0$ genommen, welches die Anfangswerte sind, verschwindet, wonach $x = AX$ und $y = AP$ gesetzt werden muss, welches die endgültigen Werte sind; und nach demselben Gesetz ist die gefundene Variation zu behandeln. Wenn daher nun die Oberfläche gesucht wird, in welcher der Wert der auf diese Weise bestimmten Formel $\int\int V\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ maximal oder minimal wird, ist vor Allem notwendig, dass der erste Teil der Variation, der eine zweifache Integration involviert, zu Null gemacht wird, wie auch immer die Variation $\delta z = w$ angenommen wird, woher diese Gleichung entsteht

$$
\begin{aligned}
0 = N - \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right) &+ \left(\frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2}\right) - \left(\frac{\mathrm{d}^3 R}{\mathrm{d}x^3}\right) + \text{etc.}, \\
- \left(\frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}y}\right) &+ \left(\frac{\mathrm{dd}Q'}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right) - \left(\frac{\mathrm{d}^3 R'}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}\right) \\
&+ \left(\frac{\mathrm{dd}Q''}{\mathrm{d}y^2}\right) - \left(\frac{\mathrm{d}^3 R''}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2}\right) \\
&\qquad - \left(\frac{\mathrm{d}^3 R'''}{\mathrm{d}y^3}\right),
\end{aligned}
$$

mit welcher die Natur der mit dieser Gestalt versehenen Oberfläche ausgedrückt werden wird. Aber die durch zweifache Integration eingehenden Konstanten müssen so bestimmt werden, dass den übrigen Anteilen der Variation genügt wird.

Bemerkung 2

§174 Damit diese in sich schwer ergründbare Untersuchung an einem Beispiel illustriert wird, wollen wir festlegen, dass eine Oberfläche solcher Art gefunden werden muss, die unter allen anderen, die denselben Rauminhalt einschließen, die kleinste ist. Für dieses Ziel ist zu erwirken, dass diese Doppelintegralformel

$$\iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y(z + a\sqrt{1 + pp + p'p'}$$

ein Maximum oder Minimum wird. Weil also gilt

$$V = z + a\sqrt{1 + pp + p'p'},$$

wird sein

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 1$$

und auch

$$P = \frac{ap}{\sqrt{1 + pp + p'p'}} \quad \text{und} \quad P' = \frac{ap'}{\sqrt{1 + pp + p'p'}},$$

und daher

$$\mathrm{d}V = N\mathrm{d}z + P\mathrm{d}p + P'\mathrm{d}p'$$

während gilt

$$\mathrm{d}z = p\mathrm{d}x + p'\mathrm{d}y.$$

Daher wird die Natur der gesuchten Oberfläche mit dieser Gleichung ausgedrückt werden

$$N - \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right) - \left(\frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}y}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad 1 = \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}y}\right).$$

Es ist aber

$$\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{a}{(1 + pp + p'p')^{\frac{3}{2}}} \left((1 + p'p')\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right) - pp'\left(\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}x}\right)\right),$$
$$\left(\frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}y}\right) = \frac{a}{(1 + pp + p'p')^{\frac{3}{2}}} \left((1 + pp)\left(\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}y}\right) - pp'\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right)\right),$$

wo bemerkt werde, dass $(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}) = (\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}x})$ ist. Daher wird aber diese Gleichung erhalten

$$\frac{(1 + pp + p'p')^{\frac{3}{2}}}{a} = (1 + p'p')\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right) - 2pp'\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right) + (1 + pp)\left(\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}y}\right);$$

wie aber diese behandelt werden muss ist nicht klar, auch wenn leicht erkannt wird, dass in ihr die Gleichung für die sphärische Oberfläche $zz = cc - xx - yy$, ja sogar die zylindrische $zz = cc - yy$ enthalten ist.