Analytische Erläuterung der Methode der Maxima und Minima

Leonhard Euler

§1 Das, was für gewöhnlich in den Elementen über die Methode der Maxima und Minima angegeben zu werden pflegt, wird hauptsächlich bei Funktionen einer gewissen variablen Größe verwendet, sodass nach Vorlegen irgendeiner Funktion V, die wie auch immer aus der variablen Größe z und Konstanten zusammengesetzt war, die Bestimmungen der Variable z gefunden werden müssen, die der Funktion V den maximalen oder minimalen Wert aufprägen. Manchmal werden auch Funktionen zweier oder mehrerer Variablen z, y, x betrachtet und die den einzelnen zuzuschreibenden Werte gesucht, mit welchen die Funktion einen maximalen oder minimalen Wert erhält. Die Methode aber, mit welcher die Fragen dieser letzten Art aufgelöst werden, stimmt völlig mit der überein, die in der ersten Art verwendet wird; wenn nämlich mehrere Variablen verwickelt werden, wird nacheinander eine als Variable betrachtet und ihre für das Erzeugen des Maximums oder Minimums geeigneter Wert gesucht; wenn diese Operation durch die einzelnen Variablen hindurch unternommen worden ist, werden die Werte aller bekannt, mit welchen der Wert der vorgelegten Funktion maximal oder minimal wird.

§2 Nicht anders verhält sich diese Sache, wenn eine Funktion der zwei Variablen x und y vorgelegt wird und der y zuzuteilende Wert gesucht wird, sodass, nachdem für x eine gegebene Größe a vorgelegt worden war, die Funktion selbst den maximalen oder minimalen Wert annimmt; sofort nämlich werde überall a für x geschrieben und die Frage wird selbstredend auf die erste Art zurückgeführt sein. Aber wenn jene Funktion der Variablen x und y nicht entwickelt war, sondern durch eine Integration bestimmt wird, werden die Fragen zu einer ganz und gar verschiedenen Art zu zählen sein und erfordern eine weit andere Lösungsmethode. Wie wenn beispielsweise Z irgendeine Funktion von x und y war und die Integralformel $\int Z\mathrm{d}x$ vorgelegt wird, wird es gefällig sein, dass die Frage so formuliert wird: *Die Relation zwischen den zwei Variablen x und y ist zu bestimmen, sodass der Wert dieser Formel, nachdem wir $a = x$ gesetzt hatten, der größte oder kleinste aller wird.*

§3 Wie viel zwischen Fragen dieser Art und denen, welche ich zur ersten Art gezählt habe, vorhanden ist, wird in wenigen Momenten oder dem leicht Aufmerksamen bald klar werden. Es sei nämlich V eine entwickelte Funktion von x und y, für welche der Wert von y gesucht werden muss, sodass für $x = a$ gesetzt der Wert der Funktion V maximal oder minimal wird; und um diese Frage zu lösen, kann sofort $x = a$ gesetzt werden, wonach der Wert von y durch die erste Methode so bestimmt werden wird, dass er nicht vom unbestimmten Wert von x abhängt. Aber nach Vorlegen der Integralformel $\int Z\mathrm{d}x$ lässt sich nicht in der Differentialformel $Z\mathrm{d}x$, sondern erst nach der Integration x jener bestimmte Wert a zuteilen; und es erledigt nicht, damit dann der Wert der Formel $\int Z\mathrm{d}x$ maximal oder minimal wird, ein gewisser bestimmter für y zu nehmender Wert die Aufgabe, sondern es muss eine gewisse Relation zwischen x und y angegeben werden; deshalb weil, auch wenn nach der Integration $x = a$ gesetzt wird, dennoch der Wert des Integrals $\int Z\mathrm{d}x$ von einer unbestimmten Relation, die zwischen z und y einhergeht, abhängt und durch alle dazwischen liegenden Werte von y bestimmt wird.

§4 Aber solche Fragen über die maximal oder minimal zu machende Formel $\int Z\mathrm{d}x$ erstrecken sich um vieles weiter und werden nicht nur auf die Fälle beschränkt, in denen Z eine Funktion von x und y ist, sondern es kann für Z irgendein Ausdruck angenommen werden, welcher mit einer gewissen zwischen x und y angenommenen Relation bestimmt wird. Daher wird Z außer den Variablen x und y selbst auch die Relation derer Differentiale involvieren können, und nicht nur die erster Ordnung, sondern auch irgendwelcher höherer Ordnungen; wenn natürlich diese Verhältnisse der Differentiale so ausgedrückt werden, dass gilt

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p, \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = q, \quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x} = r \quad \text{etc.},$$

wird die Größe Z wie irgendeine Funktion all dieser x, y, p, q, r etc. betrachtet werden können. Ja die Größe Z kann sogar zusätzlich in sich neue, wie auch immer in ihr involvierte, Integralformeln umfassen; daher entstehen viele Fragen dieser Art, an welche die Lösungsmethode jeweils angepasst werden muss.

§5 Probleme dieser Art sind zuerst bei der Gelegenheit jenes berühmten von Jakob Bernoulli einst zum größten Zuwachs für die Analysis intensiv besprochenen isoperimetrischen Problems behandelt zu werden begonnen worden, auch wenn welche Aufgabe mit wunderbarer Kunstfertigkeit von jenem äußerst scharfsinnigstem Herren erledigt worden ist, wurde dennoch die von ihm verwendete Methode nur auf die Fälle, in welchen die Größe Z außer x und y lediglich deren erste Differentiale oder den Buchstaben p involvierte, ausgedehnt und musste in jedem einzelnen Fall gleichsam aus geometrischen Betrachtungen entnommen werden. Nachdem ich mich aber bei der umfassenderen Erklärung dieses Gegenstandes lange vergebens bemüht hatte, habe ich schließlich eine äußerst allgemeine Methode erhalten, mit deren Hilfe alle Probleme dieser Art, in denen die Größe Z nicht nur Differentiale jeder Ordnung, sondern auch irgendwelche Integralformeln in sich enthielt, aufgelöst werden können, welche Methode ich in einem einzigartigen Buch umfassend dargestellt habe.

§6 Auch wenn aber diese Methode so beschaffen ist, dass ihre Anwendung keine geometrischen Figuren verlangt, ist dennoch die Untersuchung dieser Methode selbst aus der Betrachtung gekrümmter Linien hergeholt worden, welches Grundes wegen sie mir auch dann nicht hinreichend natürlich schien. Weil nämlich diese Frage, in welcher die Relation zwischen x und y gesucht wird, sodass die Integralformel $\int Z dx$, nachdem nach der Integration $x = a$ gesetzt wurde, einen maximalen oder minimalen Wert erhält, ohne einen Blick auf die Geometrie vorgelegt werden kann, scheint es auch eine passende und aus den wahren Prinzipien abgeleitete von jeder geometrischen Anschauung losgelöste Lösung geben zu müssen. Nachdem ich dieses Verlangen in meinem Traktat nicht unklar bezeugt hatte, meldete mir ein gewisser hochgeehrter Herr und der in dieser analytischen Fertigkeit höchst versierte De La Grange Tournier in den „*Litteris Taurini*“, die zu mir gesandt wurden, mit, dass er im Besitze des Gewünschten ist und teilte mir zugleich die Fundamente seiner Analysis in wohlwollender Weise mit. Weil diese noch sehr viel in sich zu verbergen scheinen, habe ich beschlossen, sie auf meine Weise zu erläutern und weiterzuentwickeln.

§7 Wir wollen also im Allgemeinen die Integralformel $\int Z\mathrm{d}x$ betrachten, in welcher Z eine irgendwie durch x und y zusammengesetzte Funktion sei, die auch das Verhältnis der Differentiale nicht nur erster sondern auch höherer Ordnungen involviere und zusätzlich auch eine oder mehrere Integralformeln umfasse. Für ihre Bestimmung wollen wir aber annehmen, dass das Integral so bestimmt wird, dass es für $x = 0$ gesetzt verschwindet; dann aber wollen wir nach der Integration x einen gewissen gegeben Wert $x = a$ zuteilen, und es sei A der Wert, welchen die Integralformel dann annimmt. Nun besteht die Frage darin, dass die Relation zwischen x und y bestimmt werden muss, aus welcher durch diese Operation der maximale oder minimale Wert für A erhalten wird. Diese Relation zwischen x und y also, die dem Gefragten Genüge leistet, muss mit einer gewissen endlichen oder differentialen Gleichung irgendeiner Ordnung ausgedrückt werden, sobald wie welche gefunden worden ist, das Problem für gelöst zu halten sein wird.

§8 Wir wollen festlegen, wie es in der Analysis gemacht zu werden pflegt, dass diese Relation zwischen x und y, die gesucht wird, schon bekannt ist, sodass, welcher bestimmte Wert auch immer für x angenommen wird, daher auch y und deshalb auch die Funktion Z einen bestimmten Wert erhält. Es werden also auf diese Weise nacheinander für x alle möglichen Werte von der Grenze $x = 0$ bis hin zur Grenze $x = a$ eingesetzt zu werden aufgefasst, die in unendlich kleinen Intervallen $\mathrm{d}x$ fortschreiten, dann werden die Werte von Z, die diesen einzelnen Werten von x entsprechen, aufgefasst mit $\mathrm{d}x$ multipliziert zu sein, und all diese Produkte zu einer Summe gesammelt werden die Größe, die wir mit dem Buchstaben A bezeichnet haben, festlegen, die maximal oder minimal sein muss. Dies ist so zu verstehen, dass, wenn aus irgendeiner anderen Relation zwischen x und y den einzelnen Werten von x andere Werte y und daher auch Z entsprechen, aus diesen für A, wenn es ein Maximum war, der Wert gewiss kleiner, wenn es aber ein Minimum war, gewiss größer hervorgehen wird, als wenn die richtige Relation zwischen x und y verwendet worden wäre.

§9 Wenn daher aber diese Variationen, die den einzelnen Werten von y aufgeprägt werden, unendlich klein aufgefasst werden, dann darf sich durch die Gestalt der Maxima und Minima daher keine Veränderung auf die Größe A ergießen; und aus dieser Quelle selbst pflegt die Bestimmung der Maxima und Minima hergeholt zu werden. Weil wir natürlich den Werten von y nach Belieben unendlich kleine Variationen zugeteilt haben, muss die Veränderung, die daher in allen Werten von Zdx und daher in deren ganzen Summe A entsteht, durch Rechnung gefolgert werden, welche darauf gleich Null gesetzt die Gleichung liefern wird, in welcher die Natur des Maximums und des Minimums und daher die gesuchte Relation zwischen x und y enthalten sein wird. Mit dieser Operation wird also die Methode, Maxima und Minima dieser Art zu finden, ausgeführt, die deshalb auf dieselben Prinzipien wie die gewöhnliche Methode der Maxima und Minima gestützt ist; wie diese durch Vorschriften der Analysis allein, ohne aus der Geometrie hergeholte Hilfsmittel, unternommen werden kann, wollen wir genauer betrachten, weil ich ja dieselbe Aufgabe, mich auf geometrische Prinzipien stützend, schon mit hinreichend glücklichem Erfolg bewältigt habe.

§10 Weil also unendlich kleine den einzelnen Werten von y aufgeprägte Variationen keine Veränderungen im Wert der Größe A erzeugen dürfen und dies geschehen muss, wie auch immer jene Variationen angenommen werden, solange sie unendlich klein waren, wird es genügen, in nur einem einzigen gewissen Wert von y eine Variation dieser Art aufzufassen und die Veränderung, die daher in der Größe A entsteht, verschwindend werden zu lassen, aus welcher Quelle auch meine ganze Methode der Maxima und Minima hergeholt ist. Aber auch wenn mehreren Werten von y, ja sogar ganz und gar allen irgendwelche unendlich kleinen Variationen dieser Art aufgeprägt werden, erfordert die Natur der Maxima und Minima nichtsdestoweniger, dass die Veränderung, welche die Größe A daher erhält, zu Null gemacht wird, und es muss dies passieren, wie auch immer jene Variationen, die natürlich alle vollkommen beliebig sind, angenommen werden.

§11 Aber weil ich ja in meiner vorhergehenden Lösung einen einzigen gewissen Wert von y eine unendlich kleine Veränderung zu erhalten festgelegt habe, während alle übrigen unverändert blieben, wird damit das Kontinuitätsprinzip verletzt und dies war der Hauptgrund gewesen, dass die ganze

Untersuchung nicht durch die Vorschriften der Analysis allein erledigt werden konnte, sondern die Betrachtung einer geometrischen Figur, in welcher die Werte von y durch Ordinaten einer gekrümmten Linie dargestellt wurden, zur Hilfe genommen werden musste, damit daher die Variationen, welche das Verhältnis der Differentiale jeder Ordnung auf sich nehmen würde, angenehmer gefunden werden konnten. Deswegen, damit wir dem Kontinuitätsprinzip nicht allzu sehr widerstreben, wodurch die Anwendung lediglich analytischer Vorschriften zuvor verhindert wurde, wollen wir den einzelnen Werten von y unendlich kleine Variationen zuteilen, sodass die einzelnen darauf nach Belieben bestimmt werden und daher alle außer einer zu Null gemacht werden können, wonach wir notwendigerweise zu meinen ersten Lösungen gelangen.

§12 Weil wir aber nun nicht nur einem Wert von y, sondern unzähligen, sogar allen zwar unendlich kleine, aber dennoch beliebige Variationen zuteilen, besteht kaum Zweifel, dass diese Methode sich um vieles weiter erstreckt als die vorhergehende und zu der Lösung vieler anderer Probleme führt, für welche die erste Methode entweder schwerer oder gar vergeblich verwendet werden würde. Wenn nämlich jene Variationen auf eine gewisse Weise bestimmt werden, werden mit der auf die Geometrie übertragenen Frage Probleme dieser Art aufgelöst werden können, in welchen nicht unter völlig allen gekrümmten Linien, sondern nur zwar an der Zahl unendlich vielen, die aber in einer gewissen Gattung erfasst werden, die angegeben werden muss, die mit der Eigenschaft eines gewissen Maximums oder Minimums versehen ist. Aber solche Fragen werden meistens sehr viel an Schwierigkeit zu verwickeln entdeckt; aber außerdem lassen sich daher mit Recht noch viele Zuwächse in der Analysis erwarten.

§13 Weil wir also hier den einzelnen Werten von y unendlich kleine Variationen zuteilen, wollen wir zwei Zustände der Formel $\int Zdx$ betrachten, in deren einem die einzelnen Werte von y die selbst seien, welche die gesuchte Relation zwischen x und y erfordert, in dem anderen hingegen aber dieselben Werte variiert enthalten sind; den ersten Zustand werde ich der Unterscheidung wegen den anfänglichen, den anderen aber den variierten Zustand nennen. Die Natur der Maxima und Minima erfordert also, dass die Differenz zwischen diesen zwei Zuständen verschwindet. Wie also im anfänglichem Zustand der Wert irgendeines y, während die Variable x um das Differential $\mathrm{d}x$ zu wachsen angenommen wird, den Zuwachs $\mathrm{d}y$ zu erhalten angesehen wird, so, während x dasselbe bleibt, während wir vom anfänglichen Zustand zum variierten Zustand fortschreiten, wollen wir den Wert von y um das Element δy vermehrt zu werden festlegen; daher werde der Unterschied zwischen diesen zwei Differentialausdrücken $\mathrm{d}y$ und δy aber aufmerksam zu Kenntnis genommen. Während wir aber den einzelnen Werten von y, nach Übergang zum variierten Zustand, Zuwächse δy dieser Art zuteilen, sind sie als vollkommen unbestimmt und auf keine Weise von den Werten von y abhängig anzusehen.

§14 Nach Festsetzen dieser Dinge muss untersucht werden, einen wie großen Zuwachs irgendeine Funktion Z für einen beliebigen Wert von x, während er vom anfänglichen Zustand zum variierten übertragen wird, erhält; dieser Zuwachs nimmt seinen Ursprung allein von der Variation von y, sofern er mit dieser Translation um das Element δy vermehrt wird. Wir wollen diesen Zuwachs durch δZ bezeichnen, sodass der Wert von Z vom anfänglichen Zustand zum variierten translatiert gleich $Z + \delta Z$ ist; und zuerst ist freilich sofort klar, wenn die Funktion Z allein von der Variable x abhinge und nicht die andere involvierte, dass $\delta Z = 0$ sein wird; und daher trüge die Variable x, wie auch immer sie in die Bildung der Funktion Z eingeht, nichts zu δZ bei, sondern es resultiert ihr Wert allein vom Element δy, um welches die Variable y zu wachsen angenommen wird. Hier aber, je nachdem ob Z entweder allein die endlichen Größen x und y oder auch das Verhältnis derer Differentiale oder gar Integralformeln involviert, werden deshalb verschiedene Fälle zu untersuchen sein.

§15 Wir wollen also festlegen, dass die Funktion Z zuerst nur die endlichen Größen x und y selbst involviert, sodass weder das Verhältnis der Differentiale noch Integralformeln in sie eingehen, und um ihre Variation δZ zu bestimmen, muss in der Funktion Z überall $y + \delta y$ anstelle von y geschrieben werden, wobei x unverändert gelassen werde, und so wird der variierte Wert $Z + \delta Z$ hervorgehen, wenn von selbigem der anfängliche Z subtrahiert wird, die Variation δZ zurückbleiben wird. Es ist also klar, dass diese Variation erhalten wird, wenn die Funktion Z auf die gewohnte Weise für alleinig variabel festgelegtes y differentiert wird, solange δy für $\mathrm{d}y$ geschrieben wird. Daher, wenn nach der auf gewohnten Weise unternommenen Differentiation und nachdem jene der beiden Größen x und y variabel angenommen wurden, galt

$$\mathrm{d}Z = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y,$$

wird für die Translation vom anfänglichen zum variierten Zustand diese sein

$$\delta Z = N\delta y;$$

diese Variation wird also gefunden, wenn im gewöhnlichen Differential 0 für dx geschrieben wird, für dy aber δy; und auf diese Weise haben wir den ersten Fall sehr leicht abgehandelt.

§16 Wir wollen aber weiter sehen, wie für den diesen ersten Fall, in welchem Z eine Funktion nur von x und y ist, der maximale oder minimale Wert der Integralformel $\int Z\mathrm{d}x$ gefunden werden kann. Weil also für jeden Wert von x die Funktion Z um das Element $N\delta y$ wächst und daher $Z\mathrm{d}x$ um das Stück $N\mathrm{d}x\delta y$, wird die Summe all dieser Stücke von der Grenze $x = 0$ bis hin zu $x = a$ erstreckt die Variation von A geben, wenn welche δA gesetzt wird, gelten wird

$$\delta A = \int N\mathrm{d}x\delta y;$$

weil dieser Ausdruck verschwinden muss, welches Gesetz auch immer die Variationen δy festlegen, ist es notwendig, dass für die einzelnen Werte von x gilt

$$N = 0.$$

Diese Gleichung drückt also die zwischen x und y gesuchte Relation aus, aus welcher Formel $\int Z\mathrm{d}x$ einen maximalen oder minimalen Wert erhält; und diese Eigenschaft wird nicht nur im vorgeschriebenen Fall $x = a$ Geltung haben, sondern auch, welcher andere Wert auch immer x zugeteilt wird.

§17 Es umfasse die Funktion Z als zweites außer x und y auch das Verhältnis der ersten Differentiale, oder für $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$ gesetzt sei Z irgendeine Funktion der Größen x, y und p, nach Differentieren welcher auf die gewohnte Weise hervorgehe

$$\mathrm{d}Z = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p.$$

Daher muss also die Variation von Z gesucht werden, während sie vom anfänglichen Zustand in den variierten Zustand überführt wird, bei welcher Translation die Größe x dieselbe bleibt, y aber um das Element δy vermehrt wird, das Element aber, um welches die Größe p wächst, sei δp. Weil aber $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ist, wird, wenn wir im anfänglichen Zustand den Wert von y, der $x + \mathrm{d}x$ entspricht, mit y' bezeichnen, $p = \frac{y'-y}{\mathrm{d}x}$ sein; es wachse nun in der Translation zur variierten Lage y um das Element δy und y' um das Element $\delta y'$, und es wird gelten

$$\delta p = \frac{\delta y' - \delta y}{\mathrm{d}x}.$$

Aber $\delta y' - \delta y$ drückt den Zuwachs von δy aus, während x um das Differential $\mathrm{d}x$ wächst, sodass gilt

$$\delta y' - \delta y = \mathrm{d}\delta y;$$

dann aber kann auch $\delta y' - \delta y$ wie die Variation von $y' - y = \mathrm{d}y$ angesehen werden, während wir zum variierten Zustand fortschreiten, und so wird auch gelten

$$\delta y' - \delta y = \delta \mathrm{d}y;$$

daher wird abschließend gefolgert, dass gilt

$$\mathrm{d}\delta y = \delta \mathrm{d}y \quad \text{und daher} \quad \delta p = \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} = \frac{\delta \mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

§18 Auf die gleiche Weise aber, wenn Z außer x und y auch Differentiale höherer Ordnungen involviert, sodass nach Festlegen von

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p, \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = q, \quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x} = r \quad \text{etc.}$$

Z irgendeine Funktion der Größen x, y, p, q etc. ist und auf gewohnte Weise durch Differentieren

$$\mathrm{d}Z = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + \text{etc.}$$

ist, werden die Zuwächse der Größen q, r etc., während sie vom anfänglichen Zustand in den variierten überführt werden, bestimmt. Denn wegen $q = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ wird sein

$$\delta q = \frac{\delta p' - \delta p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}x} = \frac{\delta \mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \quad \text{und gleichermaßen} \quad \delta r = \frac{\mathrm{d}\delta q}{\mathrm{d}x} = \frac{\delta \mathrm{d}q}{\mathrm{d}x} \quad \text{etc.}$$

Aber aus dem Oberen ist

$$\mathrm{d}\delta p = \frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\delta\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \text{und} \quad \delta\mathrm{d}p = \frac{\delta\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}x},$$

sodass gilt

$$\delta q = \frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}\delta\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\delta\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}x^2},$$

auf dieselbe Weise wird aber erkannt, dass sein wird

$$\delta r = \frac{\mathrm{ddd}\delta y}{\mathrm{d}x^3} = \frac{\mathrm{dd}\delta\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x^3} = \frac{\mathrm{d}\delta\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}x^3} = \frac{\delta\mathrm{ddd}y}{\mathrm{d}x^3},$$

die Gleichheit welcher bezüglich der Gattung verschiedener Formeln sorgsam festzuhalten ist.

§19 Während also die Funktion Z aus dem anfänglichen Zustand in den variierten übergeht, weil die Größe x keinen Zuwachs erfährt, y aber den Zuwachs δy, dann die Größe p den Zuwachs $\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}$, die Größe q den Zuwachs $\frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2}$, die Größe r den Zuwachs $\frac{\mathrm{ddd}\delta y}{\mathrm{d}x^3}$ etc., wird der dieser Translation entsprechende Zuwachs der Funktion Z durch eine gewöhnliche Differentiation gefunden werden, indem festgelegt wird

$$\mathrm{d}x = 0, \quad \mathrm{d}y = \delta y, \quad \mathrm{d}p = \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}, \quad \mathrm{d}q = \frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2}, \quad \mathrm{d}r = \frac{\mathrm{ddd}\delta y}{\mathrm{d}x^3} \quad \text{etc.},$$

woher er sein wird

$$\delta Z = N\delta y + P\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} + Q\frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2} + R\frac{\mathrm{ddd}\delta y}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}$$

Und daher wird also die Variation der Funktion Z für jeden Wert von x bestimmt werden können; diese Form wird noch mehr illustriert werden, wenn, wie gilt

$$\mathrm{d}Z = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + \text{etc.},$$

bemerkt wird, dass wegen $\delta x = 0$ dann ist

$$\delta Z = N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.},$$

dann ist aber wegen $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $q = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$, $r = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}$ etc. weiter

$$\delta p = \frac{\delta\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}, \quad \delta q = \frac{\delta\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2}, \quad \delta r = \frac{\mathrm{ddd}\delta y}{\mathrm{d}x^3}.$$

§20 Weil also durch die Translation in den variierten Zustand die Funktion Z den Zuwachs δZ erhält, wird die Formel $\int Z\mathrm{d}x$ selbst den Zuwachs $\int \delta Z\mathrm{d}x$ erhalten, welcher deshalb sein wird:

$$\int \mathrm{d}x \left(N\delta y + P\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} + Q\frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2} + R\frac{\mathrm{ddd}\delta y}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \right),$$

wenn in welchem nach der Integration $x = a$ gesetzt wird, die Variation von A oder δA erhalten werden wird, die gleich Null gesetzt der Größe A den maximalen oder minimalen Wert aufprägen wird. Bei dieser Integration wird aber nicht weiter auf den Übergang in den variierten Zustand geachtet, sondern sie muss durch alle Zuwächse von x hindurch erstreckt werden, weil sie die Summe aller den einzelnen Werten von x von der Grenze $x = 0$ bis hin zu $x = a$ entsprechenden Variationen bezeichnet. Damit also das Verhältnis der durch δ kenntlich gemachten Differentiale nicht stört, werde w für δy geschrieben, sodass w eine unendlich kleine beliebige irgendwie von x abhängende Größe bezeichnet; und der obere Null gleich zu setzende Zuwachs wird sein:

$$\int \mathrm{d}x \left(Nw + P\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + Q\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} + R\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} \right).$$

§21 Es ist ersichtlich, dass in diesen oberen Differentialen das Element $\mathrm{d}x$ konstant angenommen wurde; weil wir nämlich festgelegt haben

$$\frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}x} \quad \text{oder} \quad \mathrm{d}\frac{\delta p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2}$$

wegen $\delta p = \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}$, ist offenbar $\mathrm{d}x$ konstant angenommen worden. Nach Bemerken dessen, wenn wir die einzelnen Anteile des gefundenen Integrals jeweils entwickeln, werden wir haben:

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}x \cdot Nw &= \int Nw\mathrm{d}x, \\
\int \mathrm{d}x \cdot P\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} &= \int P\mathrm{d}w = Pw - \int w\mathrm{d}P, \\
\int \mathrm{d}x \cdot Q\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} &= \int \frac{Q\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x} = \frac{Q\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} - \frac{w\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} + \int \frac{w\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x}, \\
\int \mathrm{d}x \cdot R\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3} &= \int \frac{R\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^2} = \frac{R\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}R\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{w\mathrm{dd}R}{\mathrm{d}x^2} - \int \frac{w\mathrm{d}^3 R}{\mathrm{d}x^2} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Daher wird deshalb die gesuchte Variation teils aus Integralgleichungen, teils aus absoluten Gliedern bestehen, und es wird sein

$$\int w\mathrm{d}x\left(N-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3}+\text{etc.}\right)+w\left(P-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{dd}R}{\mathrm{d}x^2}-\text{etc.}\right)$$
$$+\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\left(Q-\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+\text{etc.}\right)+\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}x^2}\left(R-\text{etc.}\right).$$

§22 Wir wollen wieder δy für w einsetzen, und der Zuwachs der Integralformel $\int Z\mathrm{d}x$, während gilt

$$\mathrm{d}Z = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + S\mathrm{d}s \quad \text{etc.}$$

und

$$p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\quad q=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x},\quad r=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x},\quad s=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}\quad \text{etc.},$$

während sie in irgendeinen variierten Zustand überführt wird, welcher sich auf diese Weise $\delta\int Z\mathrm{d}x$ ausdrücken lässt, wird sich so verhalten:

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}x\delta y\left(N-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3}+\frac{\mathrm{d}^4S}{\mathrm{d}x^4}-\text{etc.}\right)\\
&+\delta y\left(P-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{dd}R}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x^3}+\text{etc.}\right)\\
&+\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}\left(Q-\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{dd}S}{\mathrm{d}x^2}-\text{etc.}\right)\\
&+\frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x}\left(R-\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}+\text{etc.}\right)\\
&+\frac{\mathrm{d}^3\delta y}{\mathrm{d}x^3}\left(S-\text{etc.}\right)\\
&+\text{etc.},
\end{aligned}$$

in welchen Formeln, sofern sie Differentiale höherer Grade involvieren, das Differential $\mathrm{d}x$ konstant angenommen wurde. Aber δy hat für die einzelnen Werte von x einen beliebigen Wert.

§23 Wenn also für den Wert $x = a$ die Formel $\int Z\mathrm{d}x$ maximal oder minimal werden muss, muss der auf diese Weise gefundene Zuwachs, wenn in ihm

$x = a$ gesetzt wird, gleich Null gesetzt werden und dies so, dass er immer verschwindet, auf welche Weise auch immer die Variationen δy angenommen werden. Daher muss auch, wenn eine solche Variation einem gewissen Wert y, der irgendeinem Wert x kleiner als a entspricht, zugeteilt wird, der gefundene Ausdruck verschwinden. Dann aber wird daher den letzten Werten von y, die $x = a$ entsprechen, keine Veränderung aufgeprägt; daher, weil für $x = a$ gesetzt der absolute Teil des Zuwachses

$$\delta y\left(P - \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}R}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}\right) + \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}\left(Q - \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}S}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.}\right) + \frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2}\left(R - \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} + \text{etc.}\right) + \text{etc.}$$

nur von der Variation der letzten Werte von y abhängt, wird für diese sein

$$\delta y = 0, \quad \mathrm{d}\delta y = 0, \quad \mathrm{dd}\delta y = 0 \quad \text{etc.},$$

und so verschwindet dieser Teil von selbst. Daher ist es notwendig, dass allein der Integralteil einzeln zu Null gemacht wird und daher werden muss:

$$\int \mathrm{d}x\delta y\left(N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}^4S}{\mathrm{d}x^4} - \text{etc.}\right) = 0.$$

§24 Aber dieser Ausdruck umfasst die Summe aller Variationen, die aus den Variationen der einzelnen von y entstehen; aber weil eine solche Veränderung bei einem einzigen Wert zu geschehen aufgefasst wird, wird die ganze Summe auf diese eine Variation zurückgeführt, während alle übrigen verschwinden; daher ist es notwendig, dass für diesen Fall gilt

$$N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}^4S}{\mathrm{d}x^4} - \text{etc.} = 0.$$

Weil ja aber, in welcher Stelle auch immer diese Variation zu geschehen aufgefasst wird, die Natur des Maximums oder Minimums gleichermaßen diese Annihilation erfordert, ist es notwendig, dass für alle Werte von x gilt

$$N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}^4S}{\mathrm{d}x^4} - \text{etc.} = 0;$$

diese Gleichung enthält also die unbestimmte Relation zwischen x und y, mit welcher bewirkt wird, dass der daher entstammende Wert der Integralformel $\int Z\mathrm{d}x$ für $x = a$ gesetzt maximal oder minimal wird, woher klar ist, dass diese Relation nicht von dieser Größe a abhängt.

§25 Dies ist schon dieselbe Gleichung, welche ich für die Lösung desselben Problems einst in meinem Traktat über Maxima und Minima gegeben habe, nun aber aus lediglich analytischen Prinzipien abgeleitet habe; diese Aufgabe gelang daher so angenehm, weil ich angenommen habe, dass den einzelnen Werten von y Variationen zukommen, mit welchen sie in den variierten Zustand überführt werden. Des Weiteren hat aber die in Paragraph 21 ausgeführte Reduktion der Integralformeln die Aufgabe völlig erledigt, in welcher jene so in Teile aufgelöst waren, dass die einen vom Integralzeichen $\int$ befreit waren, die aber dadurch beschränkt geblieben sind, dass sie nur die Variation $w = \delta y$ ohne ihre Differentiale involvierten; dadurch haben wir diesen Vorteil erhalten, dass, weil jede beliebige Variation einzeln zu Null gemacht werden muss, die Integralformel sofort diese Gleichung geliefert hat

$$N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} = 0,$$

mit welcher unbestimmt die Relation zwischen x und y ausgedrückt wurde, die übrigen absoluten Teile des Zuwachses hingegen, natürlich die sich nur auf die letzten Werte von y beziehenden, gar nicht in die Rechnung eingingen.

§26 Und dennoch sind diese absoluten Teile nicht vergeblich gefunden worden, sondern leisten den außerordentlichen Dienst, zu welchem meine erste Methode, die nur diese Gleichung

$$N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.} = 0$$

lieferte, weniger geeignet war; dieses Grundes wegen ist diese Methode jener weit vorzuziehen. Um diesen Nutzen deutlicher zu erklären, sei Z zuerst eine Funktion nur von x und y, deren Differentiale nicht involvierend, sodass $\mathrm{d}Z = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y$ ist, während $P = 0$, $Q = 0$ etc. ist, und es ist klar, dass in diesem Fall die absoluten Teile von selbst verschwinden, und daher das Problem vollständig gelöst ist, sobald wir $N = 0$ setzen. So, wenn

$$\left(bb - nxy + \frac{y^3}{c}\right)\mathrm{d}x$$

ein Maximum oder Minimum sein muss, wird wegen

$$N = -nx + \frac{3yy}{c}$$

der Frage durch Setzen von $yy = \frac{1}{3}ncx$ Genüge geleistet, und hier ist nichts weiter zu Bestimmendes übrig.

§27 Aber wenn Z außerdem $p = \frac{dy}{dx}$ involviert, dass gilt

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp,$$

dann, sodass $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum wird, ist es natürlich nötig, dass $N - \frac{dP}{dx} = 0$ ist. Aber weil dies eine Differentialgleichung ist und sogar eine Differenzen-Differentialgleichung, wenn die Funktion P die Größe $p = \frac{dy}{dx}$ involviert, wird ihre Integration eine oder zwei beliebige Konstanten erhalten und deshalb wird die Relation zwischen x und y nicht vollständig bestimmt werden. Ich habe nun also in meinem Traktat bemerkt, dass diese dem Maximum oder Minimum entsprechende Relation so zusätzlich nach Belieben bestimmt werden kann, dass für $x = a$ die andere Variable y einen gegebenen Wert erhält, und wenn jene Gleichung $N - \frac{dP}{dx} = 0$ eine differentiale zweiten Grades war, dass darüber hinaus eine Bestimmung unserem Belieben überlassen wird. In diesen Fällen kann also der Bedingung des Maximums oder Minimums noch eine andere sich auf die äußersten Werte von y beziehende Bedingung hinzugefügt werden.

§28 Weiter kann also gefragt werden, weil in diesen Fällen die Relation zwischen x und y nicht vollkommen bestimmt wird und sie noch auf unendlich viele Arten dargeboten werden kann, welche in Bezug auf alle übrigen ein Maximum oder Minimum erzeugt. Dies werden wir aber aus dem absoluten, zuvor missachteten, Anteil des Zuwachses berechnen können, der in diesem Fall $P\delta y$ ist; dessen Wert, welchen er für $x = a$ gesetzt annimmt, muss also auch verschwinden. Und daher sehen wir im Allgemeinen ein, wenn $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum sein muss, während gilt

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds \quad \text{etc.},$$

dass die Gleichung

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.} = 0$$

so weiter bestimmt werden muss, dass für $x = a$ gesetzt den folgenden Gleichungen Genüge geleistet wird:

$$P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} + \text{etc.} = 0, \quad Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \text{etc.} = 0,$$
$$R - \frac{dS}{dx} + \text{etc.} = 0, \quad S - \text{etc.} = 0 \quad \text{etc.}$$

§29 Weil diese Dinge an einem Beispiel noch klarer werden, werde die Relation zwischen x und y gesucht, sodass für $x = a$ gesetzt diese Formel

$$\int \frac{dx\sqrt{1+pp}}{\sqrt{y}}, \quad \text{während gilt} \quad p = \frac{dy}{dx},$$

den größten oder kleinsten Wert erhält. Weil also gilt

$$Z = \frac{\sqrt{1+pp}}{\sqrt{y}},$$

wird sein

$$M = 0, \quad N = -\frac{\sqrt{1+pp}}{2y\sqrt{y}} \quad \text{und} \quad P = \frac{p}{\sqrt{y(1+pp)}},$$

und so ist zuerst diese Gleichung zu erfüllen $N - \frac{dP}{dx} = 0$ oder diese $Ndx - dP = 0$, welche mit p multipliziert $Ndy = pdP$ gibt. Aber es ist wegen $M = 0$

$$dZ = Ndy + Pdp \quad \text{und daher} \quad dZ = pdP + Pdp,$$

die integriert liefert

$$Z = Pp + C \quad \text{oder} \quad \frac{\sqrt{1+pp}}{\sqrt{y}} = \frac{pp}{\sqrt{y(1+pp)}} + C,$$

das heißt

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+pp)}} = C = \frac{1}{\sqrt{b}}.$$

Daher erhalten wir weiter

$$b = y(1+pp) \quad \text{und} \quad p = \sqrt{\frac{b-y}{y}} = \frac{dy}{dx},$$

sodass gilt

$$\mathrm{d}x = \frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{by - yy}},$$

und durch Integrieren

$$x = c - \sqrt{by - yy} + bA\sin\frac{2\sqrt{by - yy}}{b}.$$

Aber zur vollständigen Bestimmung muss für $x = a$ gesetzt $P = 0$ sein, das heißt $p = 0$ und $y = b$; daher wird nach Setzen von $x = a$ und $y = b$ die Konstante c so bestimmt, dass $c = a - \pi b$ ist. Und wenn wir wollen, muss $b = \frac{a}{\pi}$ sein.

§30 Bevor wir diese analytische Untersuchung auf Fälle, in denen die Funktion Z auch Integralformeln in sich umfasst, anwenden, wollen wir die Analysis selbst, die wir bisher benutzt haben, ein wenig sorgfältiger untersuchen und die wichtigsten Dinge, auf die sie gestützt ist, genauer betrachten. Diese Analysis ist aber über zwei Variablen x und y, die teils auf den Zustand, den ich den anfänglichen genannt habe, teils auf den variierten Zustand bezogen, sodass deren eine x sich auf jeden der beiden Zustände gleichermaßen erstreckt, die andere y hingegen, während sie vom anfänglichen Zustand zum variierten bewegt wird, den Zuwachs δy erfährt, während sie aber in demselben Zustand zum Wert $x + \mathrm{d}x$ vorwärts bewegt wird, als Vermehrung das übliche Differential $\mathrm{d}y$ erhält; wenn daher die Variable y zugleich vom anfänglichen Zustand zum variierten und der $x + \mathrm{d}x$ entsprechenden Stelle vorwärts bewegt wird, wird ihre Vermehrung $\mathrm{d}y + \delta y$ sein. Weil aber x auf jeden der beiden Zustände gleichermaßen bezogen wird, wird $\delta x = 0$ sein.

§31 Wenn man nun irgendeine andere im anfänglichen Zustand auf die Stelle x bezogene Funktion V hat und sie in demselben Zustand zur Stelle $x + \mathrm{d}x$ vorwärts bewegt wird, wollen wir ihren Zuwachs, welcher ihr zukommt, auf gewohnte Weise mit $\mathrm{d}V$ ausdrücken. Wenn sie aber, während der Wert von x derselbe bleibt, von dem anfänglichen Zustand in den variierten gebracht wird, wollen wir ihre Vermehrung auf die neue Weise durch δV ausdrücken. Wenn daher nun jene Funktion V aus den Größen x, y, p, q, r etc. wie auch immer zusammengesetzt ist, aber die Buchstaben p, q, r etc. Größen solcher Art bezeichnen, von welchen jede der beiden Zuwächse

$$\mathrm{d}p, \quad \mathrm{d}q, \quad \mathrm{d}r \quad \text{etc.} \quad \text{und} \quad \delta p, \quad \delta q, \quad \delta r \quad \text{etc.}$$

dargeboten werden können, werden daher auf die übliche Weise zu differentieren auch die beiden Zuwächse der Funktion V angegeben werden können. Wenn nämlich für die Translation von der Stelle x zur Stelle $x + \mathrm{d}x$ in demselben Zustand aus der üblichen Differentiation war

$$\mathrm{d}V = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r \quad \text{etc.},$$

wird für die Translation vom anfänglichen Zustand in den variierten, während aber an derselben Stelle x, wie wir bemerkt haben, $\delta x = 0$ ist, sein

$$\delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r \quad \text{etc.}$$

§32 Des Weiteren, wenn diese Differentiale der zwei Arten untereinander vermischt werden, ist aus dem Oberen schon bekannt, dass gilt

$$\delta \mathrm{d}V = \mathrm{d}\delta V.$$

Daher, wenn V nun das Differential der Form $\mathrm{d}U$ ist, wird sein

$$\delta\mathrm{dd}U = \mathrm{d}\delta\mathrm{d}U = \mathrm{dd}\delta U \quad \text{wegen} \quad \delta\mathrm{d}U = \mathrm{d}\delta U$$

und im Allgemeinen, in welcher Reihenfolge auch immer die zwei Differentiationszeichen d und δ festgelegt wurden, deren Reihenfolge nach Belieben unter Beibehalt der Bedeutung vertauscht werden kann; so wird sein

$$\delta\mathrm{d}^3V = \mathrm{d}\delta\mathrm{d}^2V = \mathrm{d}^2\delta\mathrm{d}V = \mathrm{d}^3\delta V.$$

Weil wir hier aber nur den variierten Zustand betrachten wollen, der Übergang zu welchem mit dem Zeichen δ angezeigt wird, kann dieses Zeichen nie mehr als einmal in Zusammensetzungen dieser Art enthalten sein; es ist aber immer zum Vorteil, das Zeichen δ in solchen Formeln nach ganzen hinten zu bewegen.

§33 Dieselbe Vertauschung wird auch auf Integralzeichen ausgedehnt; wenn nämlich die Integralformel $\int V$ vorgelegt wird, während $\int$ die Summe aller Werte in dem Zustand, die allen Werten von x entsprechen, genommen bezeichnet, wird auch sein

$$\delta \int V = \int \delta V,$$

was per se klar ist, weil der Zuwachs der Translation der ganzen Summe gleich der Summe aller elementaren Zuwächse, die sich in derselben Translation befinden, ist. Und aus dieser Quelle selbst ist die obere Analysis abgeleitet worden; denn nachdem die Integralformel $\int Z\mathrm{d}x$ vorgelegt worden war, deren Variation in den variierten Zustand zu bestimmen war, haben wir angenommen, dass gilt

$$\delta \int Z\mathrm{d}x = \int \delta(Z\mathrm{d}x) = \int \delta Z \cdot \mathrm{d}x,$$

weil ja ist

$$\delta(Z\mathrm{d}x) = \delta Z\mathrm{d}x + Z\delta\mathrm{d}x,$$

ist aber $\delta\mathrm{d}x = 0$, wie $\delta x = 0$. Ja es wäre sogar, wenn eine zweifache Integration $\int\int V$ auftauchen würde, auf dieselbe Weise

$$\delta \int\int V = \int \delta \int V = \int\int \delta V.$$

§34 Ein anderer Kunstgriff besteht in der Transformation der Integrale, wann immer unter dem Integralzeichen die Zeichen d und δ miteinander verbunden werden, dass zumindest in der Integration das Zeichen δ allein zurückbleibt. So wird nach Vorlegen der Integralformel $\int V\delta\mathrm{d}v$ wegen $\delta\mathrm{d}v = \mathrm{d}\delta v$, indem δv wie eine einfache Größe betrachtet wird, sein

$$\int V\delta\mathrm{d}v = \int V\mathrm{d}\delta v = V\delta v - \int \delta v\mathrm{d}V.$$

Und auf dieselbe Weise wird weiter erkannt, dass sein wird

$$\int V\mathrm{dd}\delta v = V\mathrm{d}\delta V - \delta v\mathrm{d}V + \int \delta v\mathrm{dd}V,$$

$$\int V\mathrm{d}^3\delta v = V\mathrm{dd}\delta v - \mathrm{d}\delta v\mathrm{d}V + \delta v\mathrm{dd}V - \int \delta v\mathrm{d}^3 V,$$

$$\int V\mathrm{d}^4\delta v = V\mathrm{d}^3\delta v - \mathrm{d}^2\delta v\mathrm{d}V + \mathrm{d}\delta v\mathrm{dd}V - \delta v\mathrm{d}^3 V + \int \delta\mathrm{d}^4 V$$

etc.;

es ist nämlich

$$\int V\mathrm{d}\mathrm{d}\delta v = V\mathrm{d}\delta v - \int \mathrm{d}\delta v\mathrm{d}V,$$

aber es ist

$$\int \mathrm{d}\delta v\mathrm{d}V = \delta v\mathrm{d}V - \int \delta v\mathrm{d}\mathrm{d}V,$$

woher die Beschaffenheit und die Begründung dieser Transformationen erkannt wird.

§35 Nach Vorausschicken dieser analytischen Regeln wird es nicht schwer sein, alle Fragen dieser Art über Maxima und Minima aufzulösen, auch wenn in der Formel $\int Z\mathrm{d}x$ die Funktion Z irgendwelche Integralformeln in sich umfasst. Die ganze Aufgabe geht natürlich darauf zurück, dass der Zuwachs $\delta \int Z\mathrm{d}x$, welchen die vorgelegte Formel $\delta Z\mathrm{d}x$, während sie vom anfänglichen Zustand in den variierten gebracht wird, erhält, bestimmt wird; dieser wird natürlich gleich Null gesetzt die Lösung des Maximums oder Minimums enthalten. Ich werde aber diesen Zuwachs *Differentialvariation* der Formel $\int Z\mathrm{d}x$ nennen, welche zu entstehen zu verstehen ist, wenn die einzelnen Werte von y um unendlich kleine Stücke δy, und zwar beliebige, vermehrt werden. Dass dann aber diese Variation durch alle Werte von x hindurch von der Grenze $x = 0$ bis hin zur Grenze $x = a$ erstreckt werden muss, ist klar, für deren vollständige Bestimmung zu bemerken ist, dass sie so genommen werden muss, dass sie für $x = 0$ gesetzt verschwindet. Daher also wollen wir die folgenden Probleme mit Hilfe dieser Methode auflösen, über welche festzuhalten ist, dass die Buchstaben p, q, r, s etc. das Verhältnis der zwei Variablen x und y so involvieren, dass gilt

$$p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad q = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \quad r = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}, \quad s = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} \quad \text{etc.}$$

Problem 1

Wenn Z irgendeine Funktion der Variablen x und y und deren Differentiale involvierenden Größen p, q, r, s etc. ist, sodass ihr Differential von dieser Art ist

$$\mathrm{d}Z = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + S\mathrm{d}s + etc.,$$

die Differentialvariation der Integralformel $\int Z\mathrm{d}x$ von der Grenze $x = 0$ bis hin zu $x = a$ erstreckt zu finden.

Lösung

Es muss also $\delta \int Z\mathrm{d}x$ gesucht werden, und weil $\delta \int Z\mathrm{d}x = \int \delta Z\mathrm{d}x$ ist, werden wir sofort wegen $\delta x = 0$ haben

$$\delta Z = N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + S\delta s + \text{etc.}$$

Es ist aber für konstant genommenes Differential dx

$$\begin{aligned}
\delta p &= \frac{\delta \mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}, \\
\delta q &= \frac{\delta \mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\delta p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x^2}, \\
\delta r &= \frac{\delta \mathrm{d}q}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\delta q}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^3\delta y}{\mathrm{d}x^3}, \\
\delta s &= \frac{\delta \mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\delta r}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^4\delta y}{\mathrm{d}x},
\end{aligned}$$

woher wir erhalten werden

$$\delta Z = N\delta y + P\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} + Q\frac{\mathrm{d}^2\delta y}{\mathrm{d}x^2} + R\frac{\mathrm{d}^3\delta y}{\mathrm{d}x^3} + S\frac{\mathrm{d}^4\delta y}{\mathrm{d}x} + \text{etc.}$$

Nun haben wir für die termweise zu unternehmende Integration der Formel $\int \delta Z\mathrm{d}x$ gesehen, dass ist

$$\begin{aligned}
\int N\delta y\mathrm{d}x &= \int \delta y\mathrm{d}x \cdot N, \\
\int P\mathrm{d}\delta y &= P\delta y - \int \delta y\mathrm{d}P,
\end{aligned}$$

$$\int Q\frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x} = Q\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} - \frac{\delta y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}Q + \int \frac{\delta y}{\mathrm{d}x}\mathrm{dd}Q,$$

$$\int R\frac{\mathrm{d}^3\delta y}{\mathrm{d}x^2} = R\frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}R + \frac{\delta y}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{dd}R - \int \frac{\delta y}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}^3R,$$

$$\int S\frac{\mathrm{d}^4\delta y}{\mathrm{d}x^3} = S\frac{\mathrm{d}^3\delta y}{\mathrm{d}x^3} - \frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^3}\mathrm{d}S + \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x^3}\mathrm{dd}S - \frac{\delta y}{\mathrm{d}x^3}\mathrm{d}^3S - \int \frac{\delta y}{\mathrm{d}x^3}\mathrm{d}^4S$$

etc.

Aus diesen wird also die gesuchte Differentialvariation berechnet:

$$\begin{aligned}\delta\int Z\mathrm{d}x = \int \delta y\mathrm{d}x &\left(N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}^4S}{\mathrm{d}x^4} - \text{etc.}\right)\\
+ \quad \delta y &\left(P - \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}R}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}\right)\\
+ \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} &\left(Q - \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}S}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.}\right)\\
+ \frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2} &\left(R - \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} + \text{etc.}\right)\\
+ \frac{\mathrm{d}^3\delta y}{\mathrm{d}x^3} &\left(S - \text{etc.}\right)\\
+ \text{etc.},&\end{aligned}$$

wo der erste Integralanteil von der Grenze $x = 0$ bis hin zu $x = a$ erstreckt werden muss, welcher also alle dazwischen liegenden Variationen umfasst; in den übrigen Anteilen lässt sich aber sofort $x = a$ setzen, und δy wird den Zuwachs des äußersten Wertes von y bezeichnen; aber $\mathrm{d}\delta y$, $\mathrm{dd}\delta y$ etc. werden darüber hinaus von den Zuwächsen der benachbarten Werte abhängen.

KOROLLAR 1

Wenn also die Integralformel $\int Z\mathrm{d}x$ ein Maximum oder Minimum für die Grenze $x = a$ sein muss, ist es notwendig, dass ihr Variationsdifferential verschwindet, auf welche Weise auch immer die Variationen δy angenommen werden. Zuerst ist es also nötig, dass für alle Zwischenwerte von x gilt

$$N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}^4S}{\mathrm{d}x^4} - \text{etc.} = 0,$$

in welcher Gleichung die gesuchte Relation zwischen x und y enthalten ist.

Korollar 2

Daher aber, wenn die Terme P, Q, R etc. vorhanden sind, wird wegen der zu untersuchenden Integrationen die Relation zwischen x und y nicht völlig bestimmt, weil in sie durch die einzelnen Integrationen beliebige konstante Größen eingehen. In diesen Fällen können also zur Frage des Maximums oder Minimums einige Bedingungen hinzugefügt werden, wie beispielsweise dass für gewisse Werte von x die andere Variable y gegebene Werte erhält.

Korollar 3

Nachdem aber Bedingungen solcher Art weggelassen werden, kann eine neue Frage gestellt werden, wie jene durch Integration eingeführten Konstanten bestimmt werden müssen, sodass entweder das Maximum der Maxima oder das Minimum der Minima erhalten wird: Dafür ist es aber notwendig, dass für $x = a$ diesen Gleichungen Genüge geleistet wird:

$$\begin{aligned}
&P - \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}R}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3S}{\mathrm{d}x^3} = 0,\\
&Q - \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}S}{\mathrm{d}x^2} = 0,\\
&R - \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = 0,\\
&S = 0.
\end{aligned}$$

Korollar 4

Des Weiteren ist es aber wegen derselben Gründe von Nöten, dass für die andere Grenze $x = 0$ diesen selben Gleichungen Genüge geleistet wird. Denn weil das Variationsdifferential für $x = 0$ gesetzt verschwinden muss, involviert der Integralanteil eine Konstante solcher Art, die diese Bedingung erfüllt; aber diese Konstante muss die absoluten Terme, wenn in ihnen $x = 0$ gesetzt wird, zu Null machen. Daher müssen jene Formeln

$$P - \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}R}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.}, \quad Q - \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} + \text{etc.}, \quad R - \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} + \text{etc.}$$

gleichermaßen im Fall $x = 0$ und im Fall $x = a$ verschwinden.

PROBLEM 2

Wenn die Funktion Z außer den Größen x, y, p, q, r etc. auch eine gewisse Integralgröße $\Phi = \int \mathfrak{Z}\mathrm{d}x$ wie auch immer verwickelt, dass gilt

$$\mathrm{d}Z = L\mathrm{d}\Phi + M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + S\mathrm{d}s + \textit{etc.},$$

in der Formel Φ aber $\mathfrak{Z}$ irgendeine Funktion von x, y, p, q, r etc. ist, wobei gilt

$$\mathrm{d}\mathfrak{Z} = \mathfrak{M}\mathrm{d}x + \mathfrak{N}\mathrm{d}y + \mathfrak{P}\mathrm{d}p + \mathfrak{Q}\mathrm{d}q + \mathfrak{R}\mathrm{d}r + \mathfrak{S}\mathrm{d}s + \textit{etc.},$$

und diese sich so verhalten, soll die Differentialvariation dieser Integralformel $\int Z\mathrm{d}x$ von der Grenze $x = 0$ bis hin zur Grenze $x = a$ erstreckt bestimmt werden.

LÖSUNG

Weil $\delta \int Z\mathrm{d}x = \int \delta Z\mathrm{d}x$ gilt, wollen wir vor allem δZ suchen, und zuerst ist freilich sofort klar, dass gilt

$$\delta Z = L\delta\Phi + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.},$$

wo man wie zuvor haben wird

$$\delta p = \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}, \quad \delta q = \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x^2}, \quad \delta r = \frac{\mathrm{d}^3\delta y}{\mathrm{d}x^3}, \quad \delta s = \frac{\mathrm{d}^4\delta y}{\mathrm{d}x^4} \quad \text{etc.},$$

aber wegen $\delta\Phi = \delta \int \mathfrak{Z}\mathrm{d}x = \int \delta\mathfrak{Z}\mathrm{d}x$ wird auf die gleiche Weise sein

$$\delta\mathfrak{Z} = \mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.}$$

und daher

$$\delta\Phi = \int \mathrm{d}x \left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.}\right).$$

Weil also $L\mathrm{d}x\delta\Phi$ das erste Glied der Formel $\delta Z\mathrm{d}x$ ist, wird sein

$$\int L\mathrm{d}x\delta\Phi = \int L\mathrm{d}x \int \left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.}\right)\mathrm{d}x.$$

Es werde nun $\int L\mathrm{d}x = V$ festgelegt, und man wird haben

$$\begin{aligned}\int L\mathrm{d}x\delta\Phi = {} & V \int \mathrm{d}x \left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathrm{R}\delta r + \text{etc.}\right) \\ & - \int V\mathrm{d}x \left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathrm{R}\delta r + \text{etc.}\right).\end{aligned}$$

Es ist hier egal, nach welchem Gesetz das Integral $\int Ldx = V$ genommen wird; was für eine Konstante auch immer wir nämlich hinzufügen würden, sie würde in diesem Ausdruck wiederum beseitigt werden. Wir wollen also dieses Integral festlegen so genommen zu werden, dass es für $x = a$ gesetzt verschwindet, und weil die Differentialvariation an die Grenze $x = a$ angepasst werden muss, wird sein

$$\int L\mathrm{d}x\delta\Phi = -\int V\mathrm{d}x\,(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.})\,,$$

wenn zu welchem die übrigen Teile addiert werden, berechnen wir, dass sein wird:

$$\delta\int Z\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x(N - V\mathfrak{N})\delta y + (P - V\mathfrak{P})\delta p + (Q - V\mathfrak{Q})\delta q + \text{etc.},$$

wo, wenn wir die oben angegebenen Reduktionen verwenden, diese schon auf die Grenze beschränkte Differentialvariation hervorgehen wird

$$\begin{aligned}
&\int \delta y\mathrm{d}x\left((N - V\mathfrak{N}) - \frac{\mathrm{d}(P - V\mathfrak{P})}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}(Q - V\mathfrak{Q})}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3(R - V\mathfrak{R})}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}\right)\\
&+\ \delta y\ \left((P - V\mathfrak{P})\ - \frac{\mathrm{d}(Q - V\mathfrak{Q})}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}(R - V\mathfrak{R})}{\mathrm{d}x^2}\ - \text{etc.}\right)\\
&+\ \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}\left((Q - V\mathfrak{Q}) - \frac{\mathrm{d}(R - V\mathfrak{R})}{\mathrm{d}x^2} + \text{etc.}\right)\\
&+\ \frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2}\left((R - V\mathfrak{R})\ - \text{etc.}\right),
\end{aligned}$$

die Konstruktion welches Ausdrucks per se klar ist.

KOROLLAR 1

Diese Lösung entsteht also aus den vorhergehenden, wenn anstelle der einfachen Größen N, P, Q, R etc. diese zusammengesetzten eingesetzt werden

$$N - V\mathfrak{N},\quad P - V\mathfrak{P},\quad Q - V\mathfrak{Q},\quad R - V\mathfrak{R}\quad \text{etc.},$$

wo $V = \int L\mathrm{d}x$ ist, nachdem dieses Integral so genommen wurde, dass es für $x = a$ gesetzt verschwindet.

KOROLLAR 2

Wenn also die Integralformel $\int Z\mathrm{d}x$ für die Grenze $x = a$ zum Maximum oder Minimum gemacht werden muss, ist dafür zu sorgen, dass aus der Variation aller Zwischenwerte von x keine Differentialvariation entsteht, woher die Relation zwischen x und y so bestimmt wird, dass gilt

$$(N - V\mathfrak{N}) - \frac{\mathrm{d}(P - V\mathfrak{P})}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}(Q - V\mathfrak{Q})}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3(R - V\mathfrak{R})}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} = 0,$$

welche Relation also schon die vorhergehende Grenze $x = a$ involviert, sodass, wenn eine andere Grenze vorgeschrieben wird, auch eine andere unbestimmte Relation zwischen x und y resultieren wird, deshalb weil die Größe V diesen Wert $x = a$ in sich umfasst.

KOROLLAR 3

Auf diese Weise wird eine Relation solcher Art zwischen x und y gefunden, aus welcher die Formel $\int Z\mathrm{d}x$ so einen maximalen oder minimalen Wert erhält, dass, während die äußersten Werte von y dieselben bleiben, auf welche Weise auch immer die Zwischenwerte verändert werden, der Wert der Formel $\int Z\mathrm{d}x$ immer entweder kleiner als der Fall des Maximums oder größer als der Fall des Minimums hervorgehen wird, als wenn die richtige Relation verwendet werden würde.

KOROLLAR 4

Wenn aber auch die äußersten Werte für unsere Bestimmung zugelassen werden, lassen sich aus der gefundenen Differentialvariation auch diese bestimmen. Die gefundene Relation muss natürlich durch Integration so bestimmt werden, dass für $x = a$ gesetzt auch der absolute Teil verschwindet. Daher ist deshalb zu erwirken, dass für $x = a$ gesetzt gilt

$$\begin{aligned}
(P - V\mathfrak{P}) - \frac{\mathrm{d}(Q - V\mathfrak{Q})}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}(R - V\mathfrak{R})}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.} = 0,\\
(Q - V\mathfrak{Q}) - \frac{\mathrm{d}(R - V\mathfrak{R})}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}(S - V\mathfrak{S})}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.} = 0,
\end{aligned}$$

$$(R - V\mathfrak{R}) - \frac{\mathrm{d}(S - V\mathfrak{S})}{\mathrm{d}x} + \text{etc.} = 0$$

etc.

KOROLLAR 5

In diesem Fall wird freilich $V = 0$, aber dennoch lassen sich daher nur die Grenzen, die die Größe V selbst involviert, herauswerfen. Wo nämlich ihre Differentiale auftauchen, weil $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = L$ ist, muss für L der Wert geschrieben werden, welchen es für $x = a$ gesetzt annimmt, der unter Umständen in diesem Fall nicht verschwindet, welches selbe freilich über die folgenden Differentiale festzuhalten ist:

$$\frac{\mathrm{dd}V}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}^3V}{\mathrm{d}x^3} = \frac{\mathrm{dd}L}{\mathrm{d}x^2} \quad \text{etc.},$$

welche Werte zuerst im Allgemeinen zu nehmen sind, bevor in ihnen $x = a$ gesetzt wird.

KOROLLAR 6

Wenn aber die ersten Werte von y unserer Bestimmung überlassen werden, dann muss denselben Gleichungen durch Setzen von $x = 0$ Genüge geleistet werden, wo dasselbe zu bemerken ist, was wir gerade bemerkt haben. Diese Gleichungen müssen natürlich zuvor vollkommen entwickelt werden, bis in ihnen $x = 0$ gesetzt wird. Mit diesen Bedingungen werden aber nur die in die unbestimmte Relation zwischen x und y eingehenden konstanten Größen bestimmt.

PROBLEM 3

Wenn die Funktion Z außer den Größen x, y, p, q, r etc. auch diese zwei Integralformeln $\Phi = \int \mathfrak{Z}\mathrm{d}x$ und $\Phi' = \int \mathfrak{Z}'\mathrm{d}x$ wie auch immer involviert, dass gilt

$$\mathrm{d}Z = L\mathrm{d}\Phi + L'\mathrm{d}\Phi' + M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + etc.,$$

in diesen Formeln Φ und Φ' aber die Funktionen $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}'$ nur durch die Größen x, y, p, q, r etc. bestimmt werden, sodass ist

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathfrak{Z} &= \mathfrak{M}\mathrm{d}x + \mathfrak{N}\mathrm{d}y + \mathfrak{P}\mathrm{d}p + \mathfrak{Q}\mathrm{d}q + \mathfrak{R}\mathrm{d}r + \textit{etc.}, \\ \mathrm{d}\mathfrak{Z}' &= \mathfrak{M}'\mathrm{d}x + \mathfrak{N}'\mathrm{d}y + \mathfrak{P}'\mathrm{d}p + \mathfrak{Q}'\mathrm{d}q + \mathfrak{R}'\mathrm{d}r + \textit{etc.}, \end{aligned}$$

die Relation zwischen x und y zu bestimmen, dass diese Integralformel $\int Z\mathrm{d}x$, sofern sie von der Grenze $x = 0$ bis hin zu $x = a$ erstreckt wird, den maximalen oder minimalen Wert erhält.

LÖSUNG

Es muss also die Differentialvariation der Formel $\int Z\mathrm{d}x$ bestimmt werden, weil welche $\delta \int Z\mathrm{d}x = \int \delta Z\mathrm{d}x$ ist, haben wird zuerst:

$$\delta Z = L\delta\Phi + L'\delta\Phi' + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.},$$

darauf ist aber

$$\delta\Phi = \delta \int \mathfrak{Z}\mathrm{d}x = \int \delta\mathfrak{Z}\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \delta\Phi' = \int \delta\mathfrak{Z}'\mathrm{d}x$$

und deshalb

$$\begin{aligned} \delta\mathfrak{Z} &= \mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.}, \\ \delta\mathfrak{Z}' &= \mathfrak{N}'\delta y + \mathfrak{P}'\delta p + \mathfrak{Q}'\delta q + \mathfrak{R}'\delta r + \text{etc.}, \end{aligned}$$

aus welchen wir berechnen

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= \int \mathrm{d}x(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.}), \\ \delta\Phi' &= \int \mathrm{d}x(\mathfrak{N}'\delta y + \mathfrak{P}'\delta p + \mathfrak{Q}'\delta q + \mathfrak{R}'\delta r + \text{etc.}). \end{aligned}$$

Weil also die gesuchte Differentialvariation ist

$$\delta \int Z\mathrm{d}x = \int L\mathrm{d}x\delta\Phi + \int L'\mathrm{d}x\delta\Phi' + \int N\mathrm{d}x\delta y + \int P\mathrm{d}x\delta p + \text{etc.},$$

wollen wir $\int L\mathrm{d}x = V$ und $\int L'\mathrm{d}x = V'$ festsetzen, und es wird wie oben sein

$$\int L\mathrm{d}x\delta\Phi = V \int \mathrm{d}x\ (\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.})$$

$$- \int V \mathrm{d}x \ \ (\mathfrak{N}\delta y \ + \mathfrak{P}\delta p \ + \mathfrak{Q}\delta q \ + \mathfrak{R}\delta r \ + \text{etc.}),$$

$$\int L' \mathrm{d}x \delta \Phi' = V' \int \mathrm{d}x (\mathfrak{N}'\delta y + \mathfrak{P}'\delta p + \mathfrak{Q}'\delta q + \mathfrak{R}'\delta r + \text{etc.})$$
$$- \int V' \mathrm{d}x \ (\mathfrak{N}'\delta y + \mathfrak{P}'\delta p + \mathfrak{Q}'\delta q + \mathfrak{R}'\delta r - \text{etc.}).$$

Wir wollen aber diese Integrale $V = \int L\mathrm{d}x$ und $V' = \int L'\mathrm{d}x$ festlegen so genommen zu werden, dass sie für $x = a$ gesetzt verschwinden, und die ersten Teile der vorausgehenden Formeln werden von selbst verschwinden, wenn freilich deren Werte für die Grenze $x = a$ genommen werden. Indem also alle Teile zusammengefasst werden, werden wir erhalten

$$\begin{aligned} \delta \int Z \mathrm{d}x = & \int \mathrm{d}x \delta y (N - V\mathfrak{N} - V'\mathfrak{N}'), \\ & + \int \mathrm{d}x \delta p (P - V\mathfrak{P} - V'\mathfrak{P}'), \\ & + \int \mathrm{d}x \delta q \, (Q - V\mathfrak{Q} - V'\mathfrak{Q}') \\ & + \int \mathrm{d}x \delta r \, (R - V\mathfrak{R} - V'\mathfrak{R}') \end{aligned}$$

etc.

Weil aber gilt

$$\begin{aligned} \int P \mathrm{d}x \delta p &= P\delta y - \int \delta y \mathrm{d}P, \\ \int Q \mathrm{d}x \delta q &= Q\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} - \frac{\delta y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}Q + \int \frac{\delta y}{\mathrm{d}x}\mathrm{dd}Q, \\ \int R \mathrm{d}x \delta r &= R\frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}R + \frac{\delta y}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{dd}R - \int \frac{\delta y}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}^3 R \end{aligned}$$

etc.,

werden wir die gesuchte Differentialvariation finden

$$\begin{aligned} & \delta \int Z \mathrm{d}x \\ = & \int \mathrm{d}x \delta y \left((N - V\mathfrak{N} - V'\mathfrak{N}') - \frac{\mathrm{d}(P - V\mathfrak{P} - V'\mathfrak{P}')}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}(Q - V\mathfrak{Q} - V'\mathfrak{Q}')}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.} \right) \\ & + \delta y \left((P - V\mathfrak{P} - V'\mathfrak{P}') - \frac{\mathrm{d}(Q - V\mathfrak{Q} - V'\mathfrak{Q}')}{\mathrm{d}x} + \text{etc.} \right) \end{aligned}$$

$$+\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}\left((Q-V\mathfrak{Q}-V'\mathfrak{Q}')-\frac{\mathrm{d}(R-V\mathfrak{R}-V'\mathfrak{R}')}{\mathrm{d}x}+\text{etc.}\right)$$
$$+\frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2}\left((R-V\mathfrak{R}-V'\mathfrak{R}')-\text{etc.}\right)$$
$$+\text{etc.}$$

KOROLLAR 1

Wir wollen der Kürze wegen festlegen:

$$N-V\mathfrak{N}-V'\mathfrak{N}'=(N),\ P-V\mathfrak{P}-V'\mathfrak{P}'=(P),\ Q-V\mathfrak{Q}-V'\mathfrak{Q}'=(Q)\ \text{etc.},$$

und die unbestimmte Relation zwischen x und y wird mit dieser Gleichung ausgedrückt werden

$$(N)-\frac{\mathrm{d}(P)}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{dd}(Q)}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}^3(R)}{\mathrm{d}x^3}+\text{etc.}=0,$$

die dennoch nur die vorgeschriebene Grenze $x=a$ involviert, weil die Integralformeln $V=\int L\mathrm{d}x$ und $V'=\int L'\mathrm{d}x$ so genommen wurden, dass sie für $x=a$ gesetzt verschwinden.

KOROLLAR 2

Weil aber die Integration dieser Gleichung, wenn sie eine differentiale war, beliebige Konstanten involviert, wenn auch diese unserer Bestimmung überlassen werden, dass die Formel $\int Z\mathrm{d}x$ den größten oder kleinsten Wert aller erhält, ist es gefällig, dass sie so bestimmt werden, dass so für $x=0$ wie $x=a$ gesetzt auch diesen Gleichungen Genüge geleistet wird

$$(P=-\frac{\mathrm{d}(Q)}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{dd}(R)}{\mathrm{d}x^2}-\text{etc.}=0,\quad (Q)-\frac{\mathrm{d}(R)}{\mathrm{d}x}+\text{etc.}=0,\quad (R)-\text{etc.}=0.$$

KOROLLAR 3

Wenn die Funktion Z nicht nur zwei Integralformeln dieser Art $\Phi=\int\mathfrak{Z}\mathrm{d}x$, $\Phi'=\int\mathfrak{Z}'\mathrm{d}x$ involviert, sondern auch noch $\Phi''=\int\mathfrak{Z}''\mathrm{d}x$, $\Phi'''=\int\mathfrak{Z}'''\mathrm{d}x$ etc.

involviert, so werden dennoch, dass die Buchstaben $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}'$, $\mathfrak{Z}''$ etc. nur Funktionen der Größen x, y, p, q, r etc. bezeichnen und weiter keine Integralformeln involvieren, aus der Lösung des Problems auch derartig Differentialvariationen der Formeln dieser Art leicht angegeben.

PROBLEM 4

Wenn die Funktion Z außer den Größen x, y, p, q, r etc. auch die Integralformel $\Phi = \int \mathfrak{Z}dx$ irgendwie verwickelt, sodass gilt

$$dZ = Ld\Phi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + etc.,$$

die Funktion $\mathfrak{Z}$ aber außer x, y, p, q, r etc. erneut eine andere Integralformel $\Phi = \int \mathfrak{z}dx$ involviert, sodass gilt

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{L}d\Phi + \mathfrak{M}dx + \mathfrak{N}dy + \mathfrak{P}dp + \mathfrak{Q}dq + \mathfrak{R}dr + etc.,$$

die Funktion $\mathfrak{z}$ hingegen nur aus den Größen x, y, p, q, r etc. zusammengesetzt ist, wobei gilt

$$d\mathfrak{z} = \mathfrak{m}dx + \mathfrak{n}dy + \mathfrak{p}dp + \mathfrak{q}dq + \mathfrak{r}dr + etc.,$$

die Relation zwischen x und y zu bestimmen, dass diese Integralformel $\int Zdx$, sofern sie von der Grenze $x = 0$ bis hin zur Grenze $x = a$ erstreckt wird, den maximalen oder minimalen Wert erhält.

LÖSUNG

Für dieses Ziel muss also die Differentialvariation der Formel $\int Zdx$ herausgefunden werden; weil diese $\delta \int Zdx = \int \delta Zdx$ ist, haben wird zuerst:

$$\delta Z = L\delta\Phi + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.},$$

und daher wird die Differentialvariation sein

$$\delta \int Zdx = \int Ldx\delta\Phi + \int Ndx\delta y + \int Pdx\delta p + \int Qdx\delta q + \int Rdx\delta r + \text{etc.}$$

Nun werden wir aber wegen $\delta\Phi = \delta \int \mathfrak{Z}dx = \int \delta\mathfrak{Z}dx$ und

$$\delta\mathfrak{Z} = \mathfrak{L}\delta\Phi + \mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.}$$

auf die gleiche Weise auch haben

$$\delta\Phi = \int \mathfrak{L}\mathrm{d}x\delta\Phi + \int \mathfrak{N}\mathrm{d}x\delta y + \int \mathfrak{P}\mathrm{d}x\delta p + \int \mathfrak{Q}\mathrm{d}x\delta q + \int \mathfrak{R}\mathrm{d}x\delta r + \text{etc.}$$

Schließlich ist aber $\delta\Phi = \delta \int \mathfrak{z}\mathrm{d}x = \int \delta\mathfrak{z}\mathrm{d}x$, und daher wird wegen

$$\delta\mathfrak{z} = \mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\delta p + \mathfrak{q}\delta q + \mathfrak{r}\delta r + \text{etc.}$$

sein

$$\delta\Phi = \int \mathfrak{n}\mathrm{d}x\delta y + \int \mathfrak{p}\mathrm{d}x\delta p + \int \mathfrak{q}\mathrm{d}x\delta q + \int \mathfrak{r}\mathrm{d}x\delta r + \text{etc.}$$

Es sei nun $\int \mathfrak{L}\mathrm{d}x = v$, und es wir werden

$$\begin{aligned}\int \mathfrak{L}\mathrm{d}x\delta\Phi = v \int &\mathrm{d}x(\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\delta p + \mathfrak{q}\delta q + \mathfrak{r}\delta r + \text{etc.})\\ &- \int v\mathrm{d}x\ (\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\delta p + \mathfrak{q}\delta q + \mathfrak{r}\delta r + \text{etc.}),\end{aligned}$$

woher wir erhalten

$$\begin{aligned}\delta\Phi = v \int &\mathrm{d}x\ (\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\delta p + \mathfrak{q}\delta q + r\delta r + \text{etc.})\\ &+ \int \mathrm{d}x\delta y\ (\mathfrak{N} - v\mathfrak{n}) + \int \mathrm{d}x\delta p\ (\mathfrak{P} - v\mathfrak{p}) + \int \mathrm{d}x\delta q\ (\mathfrak{Q} - v\mathfrak{q}) + \text{etc.}\end{aligned}$$

Wir wollen also weiter $\int L\mathrm{d}x = V$ und $\int Lv\mathrm{d}x = T$ setzen, und es wird sein

$$\begin{aligned}\int L\mathrm{d}x\delta\Phi = T \int &\mathrm{d}x\ (\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\delta p + \mathfrak{q}\delta q + \mathfrak{r}\delta r + \text{etc.})\\ &- \int T\mathrm{d}x\ (\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\delta p + \mathfrak{q}\delta q + \mathfrak{r}\delta r + \text{etc.})\\ +V \int \mathrm{d}x\delta y(\mathfrak{N} - v\mathfrak{n}) &+ V \int \mathrm{d}x\delta p(\mathfrak{P} - v\mathfrak{p}) + V \int \mathrm{d}x\delta q(\mathfrak{Q} - v\mathfrak{q}) + \text{etc.}\\ -\int V\mathrm{d}x\delta y(\mathfrak{N} - v\mathfrak{n}) &+ \int V\mathrm{d}x\delta p(\mathfrak{P} - r\mathfrak{p}) + \int V\mathrm{d}x\mathrm{d}q(\mathfrak{Q} - v\mathfrak{q}) + \text{etc.}\end{aligned}$$

Durch Sammeln all dieser wird also die gewollte Differentialvariation hervorgehen

$$\begin{aligned}\delta \int Z\mathrm{d}x = T \int &\mathrm{d}x(\mathfrak{n}\delta y + \mathfrak{p}\delta p + \mathfrak{q}\delta q + \mathfrak{r}\delta r + \text{etc.})\\ &+ V \int \mathrm{d}x\delta y(\mathfrak{N} - v\mathfrak{n}) + V \int \mathrm{d}x\delta p(\mathfrak{P} - v\mathfrak{p}) + V \int \mathrm{d}x\delta q(\mathfrak{Q} - v\mathfrak{q}) + \text{etc.}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ V\int dx\delta y(N - V\mathfrak{N} + Vv\mathfrak{n} - T\mathfrak{n})\\
&+ \int dx\delta p(P - V\mathfrak{P} + Vv\mathfrak{p} - T\mathfrak{p})\\
&+ \int dx\delta q(Q - V\mathfrak{Q} + Vv\mathfrak{q} - T\mathfrak{q})\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\text{etc.},
\end{aligned}
$$

weil welche bis hin zur Grenze $x = a$ erstreckt werden muss, wollen wir die Integrale $\int Ldx = V$ und $\int Ldx \int \mathfrak{L}dx = T$, weil ja die Bestimmung der Integration unserem Belieben überlassen wird, festlegen so genommen zu werden, dass unser Ausdruck vereinfacht wird. Des Weiteren wollen wir aber der Kürze wegen festlegen

$$
\begin{aligned}
N - V\mathfrak{N} - (Vv - T)\mathfrak{n} &= (N),\\
P - V\mathfrak{P} - (Vv - T)\mathfrak{p} &= (P),\\
Q - V\mathfrak{Q} - (Vv - T)\mathfrak{q} &= (Q),\\
R - V\mathfrak{R} - (Vv - T)\mathfrak{r} &= (R)\\
&\text{etc.},
\end{aligned}
$$

während, wie wir angenommen haben, $v = \int \mathfrak{L}dx$ ist, und die gesuchte Differentialvariation wird auf diese Form zurückgeführt werden:

$$
\begin{aligned}
\delta\int Zdx = \int dx\delta y &\left((N) - \frac{d(P)}{dx} + \frac{dd(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \text{etc.}\right)\\
+ \quad \delta y &\left((P) - \frac{d(Q)}{dx} + \frac{dd(R)}{dx^2} - \text{etc.}\right)\\
+ \frac{d\delta y}{dx} &\left((Q) - \frac{d(R)}{dx} + \text{etc.}\right)\\
+ \frac{dd\delta y}{dx^2} &\left((R) - \text{etc.}\right)\\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Korollar 1

Weil $v = \int \mathfrak{L}dx$ ist, wird sein

$$Vv = \int Ldx \int \mathfrak{L}dx \text{ und } Vv - T = \int Ldx \int \mathfrak{L}dx - \int Ldx \int \mathfrak{L}dx = \int \mathfrak{L}dx \int Ldx.$$

Weil aber durch die angenommenen Bestimmungen der Ausdruck $Vv - T$ für $x = a$ gesetzt verschwindet, wenn wir $\int L\mathrm{d}x = V$ und $\int \mathfrak{L}V\mathrm{d}x = \mathfrak{V}$ setzen, müssen diese beiden Integrale so genommen werden, dass sie für $x = a$ gesetzt verschwinden.

Korollar 2

Nachdem also diese Formeln $\int L\mathrm{d}x = V$ und $\int \mathfrak{L}V\mathrm{d}x = \mathfrak{V}$ in die Rechnung eingeführt worden sind, wird festzulegen sein

$$\begin{aligned} N - V\mathfrak{N} + \mathfrak{V}\mathfrak{n} &= (N), \\ P - V\mathfrak{P} + \mathfrak{V}\mathfrak{p} &= (P), \\ Q - V\mathfrak{Q} + \mathfrak{V}\mathfrak{q} &= (Q), \\ R - V\mathfrak{R} + \mathfrak{V}\mathfrak{r} &= (R) \\ &\text{etc.,} \end{aligned}$$

und die Differentialvariation wird durch die Buchstaben (N), (P), (Q) etc. genauso ausgedrückt werden, wie sie oben im ersten Fall durch die Buchstaben N, P, Q etc. bestimmt worden war.

Korollar 3

Aus diesen lässt sich schon leicht berechnen, wenn auch die Funktion $\mathfrak{z}$ eine neue Integralformel involviert, wie dann die Differentialvariation ausgedrückt wird; wenn natürlich galt

$$\mathrm{d}\mathfrak{z} = \mathfrak{l}\mathrm{d}\Phi' + \mathfrak{m}\mathrm{d}x + \text{etc.},$$

dann käme zu den Formeln $v = \int L\mathrm{d}x$ und $\mathfrak{V} = \int \mathfrak{L}V\mathrm{d}x$ darüber hinaus die dritte $\mathfrak{v} = \int \mathfrak{l}\mathfrak{V}\mathrm{d}x$ hinzu; das Übrige wird sich dem Achtsamen leicht ergeben.

Problem 5

Wenn die Funktion Z außer den Größen x, y, p, q, r etc. auch die Integralformel $\Phi = \int \mathfrak{Z}\mathrm{d}x$ *irgendwie verwickelt, sodass gilt*

$$\mathrm{d}Z = L\mathrm{d}\Phi + M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + etc.,$$

die Funktion $\mathfrak{Z}$ aber außer den Größen x, y, p, q, r etc. erneut dieselbe Integralformel $\Phi = \int \mathfrak{Z}\mathrm{d}x$ involviert, sodass gilt

$$\mathrm{d}\mathfrak{Z} = \mathfrak{L}\mathrm{d}\Phi + \mathfrak{M}\mathrm{d}x + \mathfrak{N}\mathrm{d}y + \mathfrak{P}\mathrm{d}p + \mathfrak{Q}\mathrm{d}q + \mathfrak{R}\mathrm{d}r + etc.,$$

die Relation zwischen x und y zu bestimmen, dass diese Integralformel $\int Z\mathrm{d}x$, sofern sie von der Grenze $x = 0$ bis hin zur gegebenen Grenze $x = a$ erstreckt wird, den maximalen oder minimalen Wert erhält.

LÖSUNG

Die Differentialvariation ist wie bisher

$$\delta \int Z\mathrm{d}x = \int L\mathrm{d}x\delta\Phi \int N\mathrm{d}x\delta y + \int P\mathrm{d}x\delta p + \int Q\mathrm{d}x\delta q + \int R\mathrm{d}x\delta r + \text{etc.},$$

darauf haben wir aber $\delta\Phi = \delta \int \mathfrak{Z}\mathrm{d}x = \int \delta\mathfrak{Z}\mathrm{d}x$ und

$$\delta\mathfrak{Z} = \mathfrak{L}\delta\Phi + \mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\mathrm{d}q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.}$$

Weil aber $\Phi = \int \mathfrak{Z}\mathrm{d}x$ ist, wird sein

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x} \quad \text{und} \quad \delta\mathfrak{Z} = \frac{\delta\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\delta\Phi}{\mathrm{d}x}.$$

Wir wollen durchgehend festlegen

$$\delta\Phi = u \quad \text{und} \quad \mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.} = w,$$

sodass man diese Gleichung hat

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \mathfrak{L}u + w,$$

deren Integral nach Nehmen von e für die Zahl, deren Logarithmus gleich 1 ist, gilt

$$\mathrm{e}^{-\int \mathfrak{L}\mathrm{d}x}u = \int \mathrm{e}^{-\mathfrak{L}\mathrm{d}x}w\mathrm{d}x,$$

und daher

$$\delta\Phi = \mathrm{e}^{\int \mathfrak{L}\mathrm{d}x} \int \mathrm{e}^{-\int \mathfrak{L}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.}\right),$$

woher abgeleitet wird

$$\int L\mathrm{d}x\delta\Phi = \int \mathrm{e}^{\int \mathfrak{L}\mathrm{d}x} L\mathrm{d}x \int \mathrm{e}^{-\int \mathfrak{L}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.}\right).$$

Es werde nun $\int \mathrm{e}^{\int \mathfrak{L}\mathrm{d}x} L\mathrm{d}x = V$ gesetzt, welches Integral so genommen werde, dass es für $x = a$ gesetzt verschwinde, und es sei $\mathrm{e}^{-\int \mathfrak{L}\mathrm{d}x} V = U$, es wird gelten

$$\int L\mathrm{d}x\delta\Phi = -\int U\mathrm{d}x\left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.}\right);$$

wenn welchem Teil die übrigen Teile hinzuaddiert werden und die oberen Reduktionen gemacht werden, wird die gesuchte Differentialvariation $\delta \int Z\mathrm{d}x$ hervorgehen als

$$\begin{aligned}
= \int \mathrm{d}x\delta y &\left((N - U\mathfrak{N}) - \frac{\mathrm{d}(P - U\mathfrak{P})}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}(Q - U\mathfrak{Q})}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3(R - \mathfrak{U}\mathfrak{R})}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}\right)\\
+ \quad \delta y &\left((P - U\mathfrak{P}) - \frac{\mathrm{d}(Q - U\mathfrak{Q})}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}(R - U\mathfrak{R})}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.}\right)\\
+ \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} &\left((Q - U\mathfrak{Q}) - \frac{\mathrm{d}(R - U\mathfrak{R})}{\mathrm{d}x} + \text{etc.}\right)\\
+ \frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2} &\left((R - U\mathfrak{R}) - \text{etc.}\right),
\end{aligned}$$

aus welcher wie oben die Relation zwischen x und y gefunden wird, mit welcher der Integralformel $\int Z\mathrm{d}x$ für die Grenze $x = a$ der größte oder kleinste Wert zugeteilt wird; diese Relation wird nämlich mit dieser Gleichung ausgedrückt werden:

$$(N - U\mathfrak{N}) - \frac{\mathrm{d}(P - U\mathfrak{P})}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}(Q - U\mathfrak{Q})}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3(R - U\mathfrak{R})}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} = 0.$$

Dann werden aber für die Bestimmung der durch Integration eingebrachten Konstanten die absoluten Teile so für den Fall $x = a$ wie für den Fall $x = 0$ zu Null gemacht werden können.

KOROLLAR

Weil wir $\mathrm{e}^{-\int \mathfrak{L}\mathrm{d}x} V = U$ gesetzt haben, wird $V = \mathrm{e}^{\int \mathfrak{L}\mathrm{d}x} U$ sein, woher durch Differentieren werden wird

$$\mathrm{d}V = \mathrm{e}^{\int \mathfrak{L}\mathrm{d}x}(\mathrm{d}U + U\mathfrak{L}\mathrm{d}x).$$

Weil aber $\mathrm{d}V = \mathrm{e}^{\int \mathfrak{L}\mathrm{d}x} L\mathrm{d}x$ ist, wird man diese Differentialgleichung haben

$$\mathrm{d}U + U\mathfrak{L}\mathrm{d}x = L\mathrm{d}x,$$

aus welcher die Größe U so bestimmt werden muss, dass sie für $x = a$ gesetzt verschwindet.

PROBLEM 6

Wenn die Funktion Z außer den Größen x, y, p, q, r etc. auch die Integralformel $\Phi = \int Z\mathrm{d}x$ involviert, sodass gilt

$$\mathrm{d}Z = L\mathrm{d}\Phi + M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + \textit{etc.},$$

die Relation zwischen x und y zu bestimmen, dass diese Formel $\int Z\mathrm{d}x$ den maximalen oder minimalen Wert annimmt, sofern sie freilich von der Grenze $x = 0$ bis hin zur Grenze $x = a$ erstreckt wird.

LÖSUNG

Weil die Differentialvariation diese ist

$$\delta \int Z\mathrm{d}x = \int L\mathrm{d}x\delta\Phi + \int N\mathrm{d}x\delta y + \int P\mathrm{d}x\delta p + \int Q\mathrm{d}x\delta q + \int R\mathrm{d}x\delta r + \text{etc.},$$

wird man auch $\delta\Phi = \delta \int Z\mathrm{d}x$ haben, woher durch Differentieren wird

$$\mathrm{d}\delta\Phi = L\mathrm{d}x\delta\Phi + N\mathrm{d}x\delta y + P\mathrm{d}x\delta p + Q\mathrm{d}x\delta q + R\mathrm{d}x\delta r + \text{etc.},$$

und daher wird wie zuvor gefunden

$$\delta\Phi = \mathrm{e}^{\int L\mathrm{d}x} \int \mathrm{e}^{-\int L\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\left(N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}\right),$$

woher wir wegen $\int \mathrm{e}^{\int L\mathrm{d}x} L\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\int L\mathrm{d}x}$ erhalten

$$\begin{aligned}\int L\mathrm{d}x\delta\Phi = \mathrm{e}^{\int L\mathrm{d}x} &\int \mathrm{e}^{-\int L\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\left(N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}\right)\\ &- \int \mathrm{d}x\left(N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}\right),\end{aligned}$$

welches übrigen Glied von den übrigen Teilen weggeschafft wird. Daher, wenn wir $e^{-\int L\mathrm{d}x} = T$ festlegen, wird die ganze Differentialvariation sein

$$\begin{aligned}\delta\int Z\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int \mathrm{d}x\delta y &\left(TN - \frac{\mathrm{d}.TP}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}.TQ}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3.TR}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}\right)\\ + \quad \delta y \quad &\left(TP - \frac{\mathrm{d}.TQ}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}.TR}{\mathrm{d}x^2} - \text{etc.}\right)\\ + \quad \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} &\left(TQ - \frac{\mathrm{d}.TR}{\mathrm{d}x} + \text{etc.}\right)\\ + \frac{\mathrm{dd}\delta y}{\mathrm{d}x^2} &\left(TR - \text{etc.}\right)\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

Damit also die Formel $\int Z\mathrm{d}x$ maximal oder minimal wird, wird die unbestimmte Relation zwischen x und y mit dieser Gleichung ausgedrückt werden

$$TN - \frac{\mathrm{d}.TP}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}.TQ}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3.TR}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.} = 0;$$

die absoluten Anteile werden also zur Bestimmung der durch Integration eingegangenen Konstanten dienen.

Bemerkung

Während diese Analysis also keine geometrische Betrachtungen involviert, haben wir nicht nur dieselben Lösungen aller sich auf die Methode der Maxima und Minima beziehenden Probleme erhalten, welche ich in meinem Buch über Maxima und Minima angegeben habe, sondern auch hat diese Methode eine spezielle Bestimmung der Konstanten geliefert, die bei der ersten Methode unbestimmt blieben; daher können unzählige einzelne Probleme bequem aufgelöst werden, auf welche die erste Methode weniger passend angewendet wird. Wie wenn beispielsweise unter allen von einem gegebenen Punkt aus nicht zu einem anderen Punkt, sondern zu einer gewissen anderen entweder geraden oder gekrümmten Linie zu ziehenden Linien die verlangt wird, über welcher ein von jenem Punkt aus herabsinkender Körper in der kürzesten Zeit zu dieser Linie gelangt, wird durch Betrachtung jener absoluten Teile dieses Problem leicht gelöst, während ihnen diese Bedingung vorgeschrieben wird, dass die gesuchte Kurve zur gegebenen normal ist. Bevor ich aber zum Ende komme, möchte ich den Analytikern ein außergewöhnliches Theorem zur Untersuchung vorlegen, dessen Gültigkeit aus den bisher aufgestellten Prinzipien nicht schwer erkannt wird und was im Integralkalkül einen außerordentlichen Nutzen zu leisten scheint.

THEOREM

Nach Vorlegen der Differentialformel $Z\mathrm{d}x$, in welcher Z irgendeine Funktion der Größen x, y, $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $q = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$, $r = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}$ etc. sei, und nach ihrer Differentiation hervorgehe:

$$\mathrm{d}Z = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + \text{etc.},$$

sodass diese Differentialformel $Z\mathrm{d}x$ nicht nur erste, sondern auch höhere Differentiale jeder Ordnung involviert, dann wird leicht beurteilt werden können, ob diese Formel eine Integration zulässt oder ob das Differential vollständig ist oder nicht. Es werde nämlich dieser Ausdruck für konstant genommenes $\mathrm{d}x$ betrachtet

$$V = N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{dd}Q}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.};$$

wenn welcher gleich Null gefunden wird, wird die Formel $Z\mathrm{d}x$ integrierbar sein, wenn aber nicht $V = 0$ war, wird sie nicht integrierbar sein.