

# KONUM GEOMETRİSİ ÜZERİNE BİR PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ

Yazan: Leonhard EULER

Çevirenler: Müge KANUNİ ER - Suat SERT

*Gülnihal Yücel'in anısına  
19 Mart 2018 – DÜZCE*

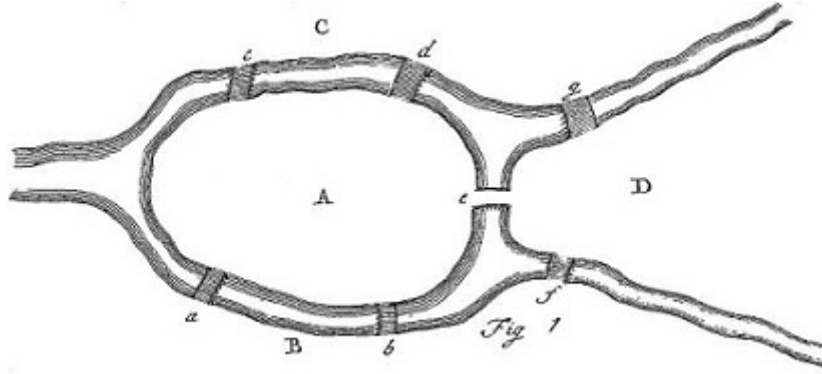
## **Latince Orijinal Makale:**

Euler, L.; Solutio Problematis Ad Geometriam Situs Pertinentis,  
*Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 8 (1736), 128-140.

## KONUM GEOMETRİSİ ÜZERİNE BİR PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ

**1** Büyüklüklerle ilgili olan ve her zaman en çok dikkat çeken geometri alanına ek olarak, önceden neredeyse hiç bilinmeyen ve ilk olarak Leibniz'in sözünü ederek *konum geometrisi* diye isimlendirdiği bir alan daha vardır. Bu alan sadece konumun belirlenmesi ve onun özellikleri ile ilgilenir; ölçümleri ve ölçümlerle yapılan hesaplamaları içermez. Hangi tür problemlerin, bu konum geometrisi ile ilgili olduğu veya bu problemlerin çözümünde hangi yöntemlerin kullanılacağı henüz tatminkâr bir şekilde belirlenmemiştir. Bu nedenle, son zamanlarda geometrik görünen ancak uzaklıkların ölçümüne ihtiyaç duyulmayacak şekilde inşa edilmiş, hesaplamanın hiç olmadığı bir problemin, yakın zamanda ortaya atılan konum geometrisiyle ilgili olduğundan şüphem yok. Zira, çözümü sadece konumla ilgili olup, hiçbir hesaplamaya ihtiyaç duyulmamıştır. Bundan ötürü, bu tür bir problemi çözmek için bulduğum yöntemi konum geometrisine bir örnek olarak burada vermeye karar verdim.

**2** Herkesçe bilindiğini duyduğum problem şu şekildedir: Prusya'da bulunan Königsberg'de *Kneiphof* adında bir A adası vardır. Onu çevreleyen nehir Şekil 1'de görüldüğü gibi iki kola ayrılır. Bu kollar a, b, c, d, e, f ve g ile gösterilen yedi köprü ile geçilir. Bu köprüler



Şekil 1

ile ilgili olarak, bir gezginin her köprüden bir kez ve sadece bir kez geçerek bir rota bulup bulamayacağı sorusu sorulmuş. Bana söylenene göre: Bazı insanlar bunun imkansız olduğunu savunurken, bazıları şüphe duymuşlar, ancak hiç kimse gerçekte yapılabileceğini iddia edememiş. Buradan yola çıkarak ben de genel problemi ifade ettim: Nehrin dallara bölünmesi, sıralanışı ve köprü sayısı ne olursa olsun, her köprüyü tam bir kez geçmek mümkün müdür?

**3** Königsberg'in yedi köprü problemi, olası tüm rotaların ayrıntılı bir listesini yaparak ve herhangi bir rotanın problemin koşullarını yerine getirip getirmediğini bularak çözülebilir. Olasılıkların sayısının çokluğundan dolayı, bu çözüm yöntemi çok zor ve zahmetli olur ve daha fazla köprü olan diğer problemlerde imkansız olurdu. Ayrıca, eğer bu metotla çözüme varılsaydı, yöntemin zorluğu nedeniyle pek çok ilgisiz rota bulunacaktı. Dolayısıyla bu çözüm yöntemini bir kenara bırakıp, belirtilen rotanın bulunup bulunamamasına ilişkin problemin çözümüne yönelik başka bir yöntem araştırdım. Böyle bir yöntemin daha basit olacağını düşündüm.

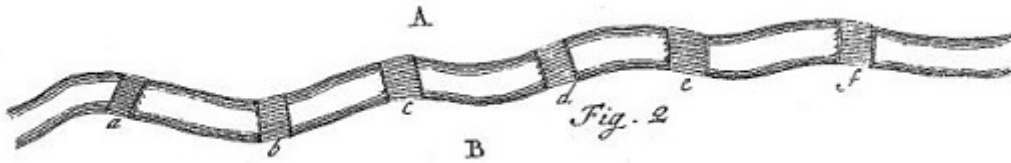
4 Çözüm yöntemim, köprü geçişini ifade eden en uygun gösterime dayanıyor. Bu nedenle, nehir tarafından ayrılmış bölgelerin her biri için A, B, C, D büyük harflerini kullandım. Şehri turlayacak bir gezgin a veya b köprüleri üzerinden A'dan B'ye giderse, bu yolu AB olarak ifade ediyorum, ilk harf gezginin ayrıldığı bölgeyi, ikincisi köprüyü geçtikten sonra geldiği bölgeyi ifade ediyor. Daha sonra gezgin B bölgesini terk edip, f köprüsü üzerinden D bölgesine geçerse, bu geçişi BD ile ifade ediliyorum. AB ve ardından BD ile ifade edilen geçişi üç harf ABD ile ifade ediyorum. Burada B, hem ilk geçiş ile gelinen bölgeyi, hem de ikinci geçişte terk edilen bölgeyi belirtiyor.

5 Aynı şekilde, yoluna devam eden gezgin g köprüsü üzerinden D'den C'ye giderse, bu üç ardışık geçişi dört harf ABDC ile ifade ediyorum. Bu da gezginin A'dan başlayarak B'ye geçtiğini, ardından D'ye devam edip sonunda C'ye geldiğini ifade eder. Her bölge nehrin bir kolu tarafından birbirinden ayrıldığından, turu yapan gezgin bu rotada üç köprüyü geçmiş olmalıdır. Benzer şekilde, dört köprüünün ardışık geçişi beş harfle temsil edilecektir. Genellersek, turu yapan gezgin kaç köprüden geçerse, bu yolculukta geçtiği bölgeler köprü sayısının bir fazlası harf ile gösterilir. Dolayısıyla yedi köprüden geçilmesi, bu turu temsil etmek için sekiz harf gerektirir.

6 Bu gösterim yönteminde turun hangi köprüleri geçerek yapıldığını hesaba katmıyorum. Ancak, eğer bir bölgeden diğerine olan geçiş birden fazla köprü tarafından yapılabiliyorsa, gerekli bölgeye ulaşıldığı sürece, geçiş için herhangi bir köprü kullanılabilir. Dolayısıyla, [Şekil 1'deki] yedi köprü boyunca yapılacak tur, her bir köprüden bir kez geçilecek ve hiçbirinden iki kez geçilmeyecek şekilde düzenlenirse, turun rotası sekiz harf ile temsil edilebilir. Öyle ki, A ve B harfleri yan yana iki defa gelebilir, çünkü bu bölgeleri birbirine bağlayan iki köprü a ve b var. Benzer şekilde A ve C sekiz harflik seride iki kez birlikte olmalıdır. A ve D, B ve D, C ve D çiftlerinin her biri ise bir kez birlikte bulunmalıdır.

7 Bu nedenle problem, belirtilen harf çiftlerinin istenen sayı kadar birlikte bulunduğu A, B, C ve D harflerinden oluşan sekiz harflik diziyi bulmaya indirgenir. Bu diziyi bulma problemine yönelmeden önce, harflerin istenilen şekilde düzenlenmesinin mümkün olup olmadığını keşfetmemiz yararlı olacaktır. Çünkü böyle bir düzenlemenin olmayacağını göstermek mümkün olsaydı, problemin çözümünü bulmaya yönelik yapılacak herhangi bir çalışma boşa gidecekti. Bu nedenle, bu ve buna benzer problemlerin çözümünde, böyle bir düzenlemenin yapılıp yapılamayacağını belirlemede faydalı olacak bir kural bulmaya çalıştım.

8 Böyle bir kural bulmak için, a, b, c, d, vb. köprülerinin bağlandığı tek bir A bölgesini düşündüm ([Şekil 2]). Önce A bölgesine giden a köprüsünü ele alalım: eğer gezgin bu



Şekil 2

köprüyü geçerse, ya geçmeden önce A bölgesinde olmalı ya da geçtiğinde A bölgesine

girmiş olmalı. Böylece her iki durumda da yukarıda açıklanan harf düzenine göre A harfi bir kere gözükecektir. Eğer üç köprünün (a, b ve c diyelim) A bölgesi ile bağlantısı varsa ve gezgin her üç köprüyü de geçerse, tura A bölgesinden başlasın ya da başlamasın A harfi iki kez kullanılacaktır. Benzer şekilde, eğer A bölgesi ile bağlı beş köprü varsa, bu tur için A harfi üç kez kullanılır. Ve genel olarak köprü sayısı tek ise, A harfinin kullanım sayısı köprü sayısının bir fazlasının yarısı olacaktır.

**9** Königsberg köprüleri söz konusu olduğunda, A bölgesine bağlı beş köprü (a, b, c, d, e) olduğundan, turun rotasının gösteriminde A harfi üç kez gözükmelidir. Diğer bölgeler için, B bölgesine üç köprü bağlandığından B harfi iki kez kullanılır, C ve D bölgeleri için de benzer şekilde C ve D harfleri iki kez kullanılır. Böylece yedi köprünün geçişini temsil eden sekiz harflik harf dizisi için A harfinin üç kez, B, C ve D harflerinin her biri iki kez kullanılmalıdır. Ancak sekiz harflik harf dizisi bu koşullara göre gerçekleşmez. Bu nedenle böyle bir tur Königsberg'in yedi köprüsü için yapılamaz.

**10** Aynı şekilde, her bölgeye bağlı olan köprü sayısı tek olduğu zaman, köprülerin herhangi bir sıralaması için, her köprüden bir kez geçilerek bir turun atılabilirliğini söylemek mümkündür. Her harfin kullanım sayılarının toplamı köprülerin sayısından bir fazla olduğu için bu tur yapılabilir; buna karşın, eğer örneğimizde olduğu gibi kullanım sayısı köprü sayısının bir fazlasından daha büyükse bu tur asla başarılamaz. A alanına giden köprülerin sayısını kullanarak A harfinin kullanım sayısını bulmak için verdiğim kural, Şekil 3'te gösterildiği gibi köprülerin tümünün B alanından ya da farklı bölgelerden gelip gelmediklerinden bağımsız olarak doğrudur. Çünkü sadece A alanını düşünüyorum ve A harfinin kaç kez ortaya çıkacağını bulmaya çalışıyorum.

**11** Bununla birlikte, A'ya giden köprülerin sayısı çift ise, o zaman turun tanımlanmasında gezginin yolculuğuna A'dan başlayıp başlamayacağına karar vermelidir; çünkü eğer A'ya iki köprü bağlıysa, ve gezgin A'dan başlarsa, A harfi iki kez kullanılır, ilki bir köprüyle A'dan ayrıldığı zaman ve ikincisi ise diğer köprüyle A'ya döndüğü zaman. Bununla birlikte, gezgin tura başka bir alandan başlarsa, benim temsil yöntemime göre A harfi sadece bir kez kullanılır; tek A harfi hem A'ya gelişini hem de A'dan ayrılışını temsil eder.

**12** A bölgesine giden dört köprü varsa ve turu atan gezgin A bölgesinden başlıyorsa, her köprüden bir kez geçileceği için A harfi üç kez kullanılır. Eğer tura başka bir alandan başlanırsa A harfi iki kez kullanılır. A bölgesine giden altı köprü varsa, tur A bölgesinden başlarsa A harfi dört kez, başka bölgeden başlarsa A harfi üç kez kullanılır. Genel olarak köprülerin sayısı çift olursa, tur A bölgesinden başlamazsa A harfi köprü sayısının yarısı kadar kullanılır. Eğer tur A bölgesinden başlarsa, köprü sayısının yarısından bir fazla sayıda A harfi kullanılır.

**13** Tura sadece bir bölgeden başlanabileceği için, her bölgeye giden köprü sayısına karşılık bölgeyi temsil eden harf sayısını eğer köprü sayısı tek ise köprü sayısının bir fazlasının yarısı, eğer köprü sayısı çift ise köprü sayısının yarısı olarak tanımlayacağım. Sonra tüm harflerin toplamı köprü sayısının bir fazlasına eşit olursa tur mümkün olacak ve tur tekli sayıda köprü bağlanan bölgeden başlarsa gerçekleşecek. Eğer tüm harflerin toplamı köprü sayısının bir fazlasından bir eksik ise tur çift sayıda köprü bulunan bölgeden başlarsa yine mümkün olacak, çünkü harflerin sayısı bu kez bir artacak.

14 Bu nedenle, su ve köprülerin düzenlemesi ne verilirse, aşağıdaki yöntem her köprüyü geçmenin mümkün olup olmadığını belirleyecektir: İlk olarak, A, B, C, vb. harfler ile suyla birbirinden ayrılmış bölgeleri ifade ediyorum. Daha sonra toplam köprü sayısını alıp, bir tane ekliyorum ve sonucu aşağıdaki çalışmanın üstüne yazıyorum. Üçüncü olarak, A, B, C, vb. harfleri bir sütuna yazıyorum ve her birinin yanına onlara ait köprülerin sayısını yazıyorum. Dördüncü olarak, yanlarında çift sayı olan harfleri yıldız ile belirtiyorum. Beşinci olarak, her birinin yanında çift sayı varsa yarısını yazıyorum, tek ise bir fazlasının yarısını alıp yazıyorum. Altıncı olarak, bu son sayıları topluyorum, ve eğer bu toplam, yukarıda yazılan sayıdan bir eksik veya sayıya eşitse, bu da köprü sayısının bir fazlası olan sayıdır, gerekli yolculuğun mümkün olduğu sonucuna varıyorum. Hatırlanmalıdır ki, toplamın yukarıda yazılan sayıdan bir az olması durumunda, yolculuğun, yıldızla işaretlenmiş alanlardan birinden başlaması ve toplamın eşit olması durumunda da işaretlenmemiş alandan başlaması gerekmektedir.

Böylece Königsberg problemindeki çalışmayı şöyle yaptım:

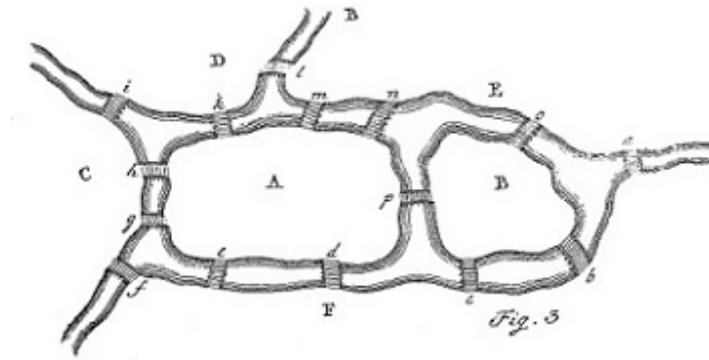
Köprü sayısı 7, bu da 8'i verir

Bridges		
A,	5	3
B,	3	2
C,	3	2
D,	3	2

Şekil 3

Toplam 8'den fazla verdiğinden, böyle bir yolculuk asla gerçekleştirilemez.

15 Şekil 4'teki gibi dört nehir arasında oluşan A ve B gibi iki ada olduğunu düşünelim. On beş köprü (a, b, c, d, vb.) nehirlerle ve sularla çevrili adaları birbirine bağlamakta



Şekil 4

olup, her bir köprüden bir kez geçerek bir tur düzenlenip düzenlenemeyeceğini belirlemek gerekmektedir. İlk olarak, suyla ayrılmış altı tane bölgeyi A, B, C, D, E, F olarak adlandırıyorum. Ardından, 15 olan köprü sayısını bir artırıyorum ve sonucu 16 aşağıdaki çalışmanın üstüne yazıyorum. Üçüncü olarak, A, B, C, vb. harfleri bir sütunda yazıyorum ve her birine karşılık gelen köprü sayısını karşılıklarına yazıyorum, A'ya sekiz köprü, B'ye dört, vb. gibi. Dördüncü olarak, yanlarında çift sayı olan harfleri yıldız ile belirtiyorum. Beşinci olarak, köprü sayılarından çift olanların yarısını, tek olanların bir fazlasının yarısını

		16
$A^*$ ,	8	4
$B^*$ ,	4	2
$C^*$ ,	4	2
$D$ ,	3	2
$E$ ,	5	3
$F^*$ ,	6	3
		16

Şekil 5

yanlarına üçüncü sütun olarak yazıyorum. Altıncı olarak, sırayla üçüncü sütundaki tüm sayıları topladım ve 16 toplamını buldum; bu, yukarıda yazılan sayıya 16 eşit olduğu için, tur yıldız ile işaretli olmayan D veya E bölgelerinden başlıyorsa yapılabilir. Tur şu şekilde yapılabilir:

$$EaFbBcFdAeFfCgAhCiDkAmEnApBoElD$$

Burada büyük harflerin arasına geçilen köprüleri yazdım.

**16** Bu yolla, en karmaşık durumlarda bile, her köprüyü bir kez ve sadece bir kez geçerek bir turun yapılıp yapılamayacağını belirlemek kolay olacaktır. Bununla birlikte, birkaç tane basit gözlem yaptıktan sonra, bu yöntemden türetilmesi zor olmayan, çok daha basit bir yöntemi açıklamalıyım. Önce A, B, C harflerinin yanında yazılan köprü sayılarının toplamının, toplam köprü sayısının iki katı olduğunu gözlemledim. Bunun nedeni, belirli bir bölgeden diğer bölgeye giden her köprünün, her iki bölge için ayrı ayrı olmak üzere iki kere hesaplanmasıydı.

**17** Her bir bölgeye giden köprülerin sayısının toplamının çift sayı olması gerekir, çünkü bu sayının yarısı köprü sayısına eşittir. Bu sayılardan yalnızca bir tanesi tek ise, ya da üçü tek, beşi tek ise, bu tur imkansızdır. Dolayısıyla, A, B, C, vb. harflerine bağlanan köprü sayısı tek ise, bu bölgelerin sayısının çift olması gerekir. Böylece Königsberg probleminde, Paragraf 14'te de görülebileceği gibi A, B, C ve D harflerine karşılık tek sayılar gelmişti ve son örnekte (Paragraf 15) sadece D ve E harflerine karşılık gelen iki sayı tekti.

**18** A, B, C, vb. harflerin yanına yazılan sayıların toplamının köprü sayısının iki katı olduğu bilindiğine göre, bu toplama iki eklenip ikiye bölündüğünde örnekteki çalışma üzerine yazılan sayıyı verir. Bu nedenle, A, B, C, D, vb. harflerin yanına yazılan tüm sayılar çift ve bu sayıların yarısı üçüncü sütunu oluşturuyorsa, bu sayıların toplamı üste yazılan sayıdan bir eksik olacaktır. Turun başlangıcı hangi bölge olursa olsun, beklendiği gibi bu bölgeye çift sayıda köprü bağlanacaktır. Königsberg probleminde turu atan gezgin her bir köprüden iki kez geçerse bu gerçekleşecektir, zira her köprü ikiye bölünmüş gibi düşünülebilir, ve bu durumda her bir bölgeye giden köprü sayısı çift olacaktır.

**19** Ayrıca A, B, C, vb. gibi harflere karşılık gelen sayılardan sadece ikisi tek geri kalanlar çift ise, tur tek sayıda köprü olan bölgeden başlamak şartı ile her zaman mümkün olabilir. Çünkü, çift olan sayıların yarısı ve tek olan sayıların bir fazlasının yarısı alınırsa elde edilen sayıların toplamı üste yazılan sayıya yani köprü sayısının bir fazlasına eşit olur. Ayrıca, ikinci sütunda ya dört, ya altı, ya sekiz, ya ... tane tek sayı varsa, üçüncü sütundaki

sayıların toplamı üste yazılan sayıdan ya bir, ya iki, ya üç, ya ... sayı daha büyük olacak ve bu durumda tur imkansız olacaktır.

**20** Bu nedenle, her bir köprüden bir kez geçerek bu turun yapıp yapılamayacağı aşağıdaki kurallara göre kolayca belirlenebilir.

- *İkiden fazla bölgenin tek sayıda köprüsü varsa bu tur yapılamaz.*
- *Köprü sayısı sadece iki bölge için tek diğer bölgeler için çift ise, bu tur tek olan bölgelerden başlamak kaydı ile yapılabilir.*
- *Eğer tek sayıda köprüye sahip hiç bölge yoksa, bu tur istenilen bölgeden başlanarak yapılabilir.*

Bu kurallar ile verilen problem her zaman çözülebilir.

**21** Böyle bir turun yapılacağı tespit edildiğinde, yine de nasıl bir rota düzenlemesi yapılması gerektiği bulunmalıdır. Bunun için şöyle bir kural kullanıyorum: Bir bölgeden diğerine götüren köprü çiftlerini zihinsel olarak çıkarın, böylece köprü sayısını önemli ölçüde azaltırsınız. Ardından, kalan köprüler arasında gerekli rotayı oluşturmak kolaydır. Zihinsel olarak kaldırılan köprüler bulunan rotayı önemli ölçüde etkilemez. Dolayısıyla, rotaların bulunmasıyla ilgili daha fazla ayrıntı vermenin gerekli olmadığını düşünüyorum.