1911

Ein Brief Eulers an d'Alembert

Leonhard Euler

Ein Brief Eulers an d'Alembert.

Von PAUL STÄCKEL in Karlsruhe.

Von dem Briefwechsel zwischen EULER und d'ALEMBERT, der wenigstens zeitweise ziemlich lebhaft gewesen zu sein scheint, ist bis jetzt wenig bekannt geworden. D'ALEMBERT selbst hat 1768 Auszüge aus Briefen EULERS an ihn vom 27. Dezember 1748, 3. Januar 1750, 26. Juli 1763 und 20. Dezember 1763 veröffentlicht, die sich auf die Lehre von den imaginären Größen und das Problem der schwingenden Saite beziehen.[1]) Dazu kommen noch die Briefe vom 15. April 1747, 19. August 1747, 30. Dezember 1747, 28. September 1748 und einer ohne Datum aus dem Jahre 1749, die HENRY, nebst dem vollständigen Briefe vom 27. Dezember 1748, im Jahre 1886 herausgegeben hat[2]); die Originale befinden sich in der Bibliothek der Pariser Akademie der Wissenschaften. Hierzu bildet ein kürzlich aufgefundener Brief EULERS an d'ALEMBERT vom 15. Februar 1748 eine willkommene Ergänzung. Er wird von JACOBI in dem langen Schreiben an P. H. v. FUSS vom März/April 1848 erwähnt; JACOBI fügt hinzu, das Original besitze Herr Dr. FRIEDLÄNDER, der ihm erlaubt habe, eine Abschrift davon zu nehmen.[3]) Es lag nahe zu vermuten, daß es sich um denselben Dr. FRIEDLÄNDER handle, der 1847 in CRELLES Journal für die reine und angewandte Mathematik EULERS *Commentatio de matheseos sublimioris utilitate* zum Abdruck gebracht hatte[4]) und der, nach CRELLES Angabe, Beamter an der Königlichen Bibliothek zu Berlin gewesen war. Wenn sich auch hieraus feststellen ließ, daß FRIEDLÄNDER im Jahre 1860 gestorben sei, so blieben doch alle Bemühungen, etwas über den Verbleib

---

1) *Opuscules mathématiques*, T. 4, Paris 1768, S. 342—343, 146, 162; vgl. G. ENESTRÖM, *Verzeichnis der Schriften LEONHARD EULERS*, erste Lieferung, Leipzig 1910, S. 97, Nr. 365.

2) Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **19** (1886), S. 136—148; vgl. ENESTRÖM, a. a. O. Nr. 858.

3) *Briefwechsel zwischen JACOBI und FUSS*, herausgegeben von W. AHRENS und P. STÄCKEL, Leipzig 1908, S. 59; vgl. Bibl. math. (3) 8 (1908), S. 290.

4) Journal für Math. 35 (1847), S. 106—116; vgl. ENESTRÖM, a. a. O. Nr. 790.

seiner Autographen-Sammlung zu ermitteln, vergeblich, bis Herr Prof. Dr. Darmstädter in Berlin, der an den Nachforschungen teilnahm, in Erfahrung brachte, daß die Sammlung von dem kürzlich verstorbenen Geheimen Justizrat Lessing in Berlin angekauft worden war. Gegenwärtig befindet sich der Brief Eulers an d'Alembert sowie das Manuskript der erwähnten Eulerschen Abhandlung im Besitz von Herrn Rittergutsbesitzer G. Lessing in Berlin, der die Freundlichkeit gehabt hat, den Abdruck des Briefes zu gestatten.

Zu dem Briefe selbst ist folgendes zu bemerken:

1. Die Andeutungen über den Einfluß, den die Abweichung der Himmelskörper von der Kugelgestalt oder genauer die Ungleichheit der auf ihren Schwerpunkt bezogenen Hauptträgheitsmomente auf ihre Bewegungen hat, sind von Euler in der Abhandlung: *De perturbatione motus planetarum ab eorum figura non sphaerica oriunda*[1]) ausgeführt worden; nach Jacobi wurde diese Abhandlung am 4. Dezember 1749 in der Berliner Akademie gelesen. Denselben Gegenstand betraf wohl eine von Leonhard Euler am 23. November 1758 der Berliner Akademie vorgelegte Abhandlung: *Recherches des forces dont les corps célestes sont sollicités en tant qu'il ne sont pas sphériques;* denn man wird der Vermutung Jacobis beistimmen müssen, daß die von dem Sohne Johann Albrecht Euler am 7. November 1765 vorgelegte und in den Mémoires[2]) der Berliner Akademie abgedruckte Abhandlung gleichen Titels in Wirklichkeit von Leonhard Euler herrühre.[3]) Endlich vergleiche man Leonhard Eulers 1759 verfaßte *Astronomia mechanica,* in der die Frage nach dem Einfluß der Abweichung von der Kugelgestalt ausführlich behandelt wird.[4])

2. Nachdem 1745 das *Commercium philosophicum et mathematicum virorum celeb. G. Leibnitii et Joh. Bernoulli* erschienen war, hatte sich die Aufmerksamkeit auf den freundschaftlichen Streit gerichtet, den die beiden vom März 1712 bis Juli 1713 über die Logarithmen negativer und imaginärer Zahlen führten. Euler hat dazu Stellung genommen in der Abhandlung: *Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires,* die am 7. September 1747 der Berliner Akademie vorgelegt wurde[5])

---

1) Novi comment. acad. sc. Petrop. **3** (1750/51), 1753, S. 235—253; Eneström, a. a. O. Nr. 193. 2) **21** (1765), 1767, S. 414—432.

3) Vgl. meinen Aufsatz: *Johann Albrecht Euler;* Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich **55** (1910), S. 63—90.

4) *Opera postuma* **2** (1862), besonders S. 188—193 und 226—237; Eneström, a. a. O. Nr. 834.

5) Abgedruckt *Opera postuma* **1** (1862), S. 269—281; Eneström a. a. O. Nr. 807.

und von der eine Umarbeitung unter den Titel: *De la controverse entre Mrs. LEIBNITZ & BERNOULLI sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires* in den Mémoires der Berliner Akademie abgedruckt worden ist.[1]) Die Frage nach der Bedeutung von e^x, wenn der Exponent eine gebrochene Zahl ist, wird auch in § 14 der zuerst genannten Abhandlung gestreift; EULER meint hier, daß die Eindeutigkeit durch die Benutzung der Potenzreihe für e^x gesichert werde.

3. Die Entwicklung des unendlichen Produktes

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)\ldots$$

nach Potenzen von x hatte EULER schon in der Abhandlung: *Observationes analyticae variae de combinationibus* (Comment. acad. sc. Petrop. **13** [1741/43], 1751, S. 93) betrachtet, die nach den Akten am 6. April 1741 der Petersburger Akademie vorgelegt wurde[2]), — er gibt hier sogar an, daß die Exponenten das Gesetz $\frac{1}{2}(3nn \pm n)$ befolgen, und daß das Vorzeichen des Koeffizienten von x^n Plus oder Minus ist, je nachdem n gerade oder ungerade gewählt wird. Der Zusammenhang mit der *Partitio numerorum*, d. h. der Frage, auf wieviele Arten sich eine positive ganze Zahl n als Summe eben solcher Zahlen darstellen lasse, wird dadurch gegeben, daß, wie EULER bemerkt, die Anzahl der Arten sich als Koeffizient von x^n bei der Entwicklung des reziproken Wertes jenes unendlichen Produktes nach Potenzen von x herausstellt.[3]) Genauere Ausführungen hierüber finden sich in der Abhandlung: *De partitione numerorum* (Novi comment. acad. sc. Petrop. **3** [1750/51], 1753, S. 125–169), die zwar nach den Akten am 26. Januar 1750 der Petersburger Akademie vorgelegt worden ist, die jedoch vor Juni 1747 verfaßt sein dürfte. Denn am 22. Juni dieses Jahres las EULER in der Berliner Akademie die Abhandlung: *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs*, die 1751 in der Bibliothèque impartiale **3**, S. 10—31 abgedruckt wurde[4]) und die ihrem Inhalte nach im wesentlichen übereinstimmt mit der Abhandlung: *Observatio de summis divisorum* (Novi Comment. acad. sc. Petrop. **5** [1754/55], 1760, S. 59—74), welche nach den Akten am 6. April 1752 der Petersburger Akademie vorgelegt wurde;

1) Mém. de l'acad. de sc. de Berlin **5** (1749), 1751, S. 139—179; ENESTRÖM, a. a. O. Nr. 168. In dem Briefe an d'ALEMBERT vom 19. August 1747 spricht EULER von der Abhandlung Nr. 807 so, als ob sie schon der Akademie vorgelegt worden sei.

2) Vgl. auch den Brief EULERS an N. BERNOULLI vom 1. September 1742, *Opera postuma* **1** (1862), S. 526—527.

3) Vgl. auch *Introductio in analysin infinitorum* **1** (1748), Cap. 16: „De partitione numerorum".

4) Wieder abgedruckt *Commentat. arithm.* **2** (1849), S. 639—647, *Opera postuma* **1** (1862), S. 76—84; ENESTRÖM, a. a. O. Nr. 175.

wahrscheinlich ist sie identisch mit der am 9. September 1751 in der Berliner Akademie gelesenen Abhandlung: *Mémoire concernant un théorème arithmétique.*[1]) Einen Beweis für Potenzentwicklung jenes unendlichen Produktes hat EULER erst in der Abhandlung gegeben: *Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observatum* (Novi comment. acad. sc. Petrop. **5** [1754/55], 1760, S. 75—83); das Exhibitionsdatum ist unbekannt.

A Monsieur D'ALEMBERT

Monsieur

Je suis bien ravi que le moyen dont Vous Vous étes servi a eu un si bon succes pour retablir Votre santé, et je souhaite qu'elle soit d'une longue durée malgré les sublimes recherches, dans lequelles Vous Vous enfonces. J'ai vu avec bien du plaisir que Vous penses comme moy sur les irregularites, qui paroissent se trouver dans les forces celestes, car j'avois dabord fait cette remarque, que quoiqu'on accorde que les moindres particules de la matiere s'attirent mutuellement en raison reciproque des quarres des distances, il n'en suive pas, que cette meme loi ait lieu dans les corps d'une grandeur finie, à moins que tous les deux corps, l'attirant, et l'attiré, ne soient spheriques et composés d'une matière homogene, ou d'une autre forme qui revienne au meme. Les recherches, qu'on a faites sur l'attraction de la terre, en tant que sa figure n'est pas spherique, donnent clairement à connoitre, que sa force d'attraction ne suit pas exactement la raison reciproque des quarrés des distances, mais qu'elle est comme $\frac{\alpha}{zz} + \frac{\beta}{z^4} + \frac{\gamma}{z^6} +$ etc. z marquant la distance. Et partant par cette raison la force dont la lune est tirée vers la terre ne sera pas exactement en raison reciproque du quarré de la distance; quand meme le corps de la terre seroit exactement spherique. Mais si le corps de la lune etoit allongé, cette force souffriroit une double irrégularité, et pour m'asseurer de ce dernier derangement, j'avois aussi comme Vous consideré le corps de la lune, comme s'il étoit composé [Fig. 1] de deux globes A et B joints d'une verge immaterielle AB, où se trouve le centre de gravité en L. Ayant supposé, que la direction de la verge AB tombe constamment presque dans la ligne LT tirée vers le centre de la terre T, à moins que le mouvement du point L tantot plus tantot moins rapide n'y produise quelque declinaison j'ai trouvé aussi comme Vous, que le mouvement du point L se doit faire à peu

Fig. 1.

1) *Briefwechsel JACOBI-FUSS*, S. 59; vgl. Bibl. math. (3) 8 (1908), S. 290.

près dans une ellipse, mais dont la ligne d'absides avance: et le calcul m'a fourni cette regle, que le mouvement moyen de la lune sera au mouvement de l'apogèe comme LT^2 à $6\,LA \cdot LB$, et partant cette figure de la lune devroit absolument causer un mouvement progressif de l'apogèe. Donc puisque suivant les observations le mouvement moyen de la lune est au mouvement de l'apogèe comme 1 à 0,0084473, et que la theorie tirée de la force du soleil ne donne pour cette raison que 1 à 0,0041045: où il manque dans le mouvement de l'apogèe la partie 0,0043428, à la quelle j'ai egalé l'effet maintenant trouvé $\frac{6\,LA \cdot LB}{LT^2}$. Donc faisant $LA = LB$, et supposant $LT = 60$ demi-diametres de la terre il en vient $LA = LB = 1\frac{1}{4}$, et partant AB seroit de $2\frac{1}{2}$ rayons de la terre, ou la longitude de la lune AB surpasserait le diameter de la terre: ce qui me parait aussi, comme Vous le remarques, insoutenable. Au reste pour le mouvement de libration je trouve, que la ligne AB devroit presque toujours etre parallele à celle qui represente le lieu moyen de la lune, et que par consequent l'angle ALT pourroit monter jusqu'à 6^0 et audela.

Pour notre dispute sur les logarithmes, je conviens que la valeur de y de l'equation $y = a^x$ est double toutes les fois, que x est une telle fraction $\frac{n}{2}$, n étant une nombre impair: mais Vous m'accorderes reciproquement, que lorsque x est ou un nombre entier ou toute autre fraction que $\frac{n}{2}$, alors la valeur de y ne sera plus double. Car soit $a = 2$; et $y = 2^x$, il est bien clair que mettant pour x les valeurs 1, 2, 3, 4 etc. celles de y seront 2, 4, 8, 16 etc. et dans ces cas aucune valeur negative de y n'aura certainement lieu.

Soit maintenant [Fig. 2] x l'abscisse AP et y l'appliquee PM, et il n'y a aucun doute que l'equation $y = 2^x$ ne donne la courbe continue VBM au dessus de l'axe AP. Mais si $x = \frac{1}{2} = A\alpha$ la valeur de y etant double $+\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ je conviens qu'il y aura en a un point conjugé et comme la meme chose arrive dans une infinité de cas de x je suis d'accord qu'il y aura une infinite de tels points conjugés $a, b, c, d,$ sous l'axe, mais je pretend que chacun de ces points est isolé sans liaisons avec les voisins, quoique leurs distances soient meme infiniment petites. De meme l'equation $y = (-2)^x$, ne donnera qu'une infinité de tels points conjugés sans aucune courbe continue: et partant l'equation $y = e^x$ ne representera qu'une courbe continue au dessus l'axe, quoiqu'il y ait de l'autre coté une infinité de points conjugés.

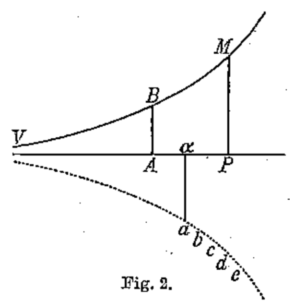

Fig. 2.

Je reviens encore à la lune pour Vous marquer, qu'ayant construit sur la theorie des tables, j'ai trouvé une difference asses considerable ent' elles et les observations, qui montoient quelques fois au dela de 12′, quoique j'eusse reglé le mouvement de l'apogee sur les observations. Depuis j'ai corrigé ces tables par les observations, et les erreurs sont à present au dessous de 5′: et pour la plus part elles ne surpassent gueres 2′. Mais à cette heure mes tables ne sont plus conformes à la theorie; dont j'ai remarqué encore une autre observation; la parallaxe de la lune trouvée par la theorie étant toujours plus petite presque d'un minute, que l'observée de sorte que la force dont la lune est poussee vers la terre doit étre moindre qu'on suppose dans la theorie; tant s'en faut qu'on dusse augmenter cette force par quelque effet de magnetisme de la terre.

Mr. Bouquet me marque, que mon Introductiòn dans l'Analyse des infinis paraitra incessament, et je l'ai chargé de Vous en presenter d'abord un exemplaire en mon nom. Vous recevres aussi bien tot un exemplaire de mes opuscula, dont je suis bien faché, que je n'ai pas trouvé occasion de vous les presenter plutot.

A l'egard de la suite

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 \text{ etc.} = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) \text{ etc.}$$

dont je Vous ai parlé j'en ai tiré une proprieté fort singuliere des nombres parrapport à la somme des diviseurs de chaque nombre. Que $\int n$ marque la somme de tous les diviseurs du nombre n de sorte que $\int 1 = 1$; $\int 2 = 3$, $\int 3 = 4$; $\int 4 = 7$; $\int 5 = 6$: $\int 6 = 12$; $\int 7 = 8$ etc. il paroit dabord presque impossible de decouvrir aucune loi dans la suite de ces nombres 1, 3, 4, 7, 6, 12, 8, [15,] 13, 18 etc. mais j'ai trouvé que chaque terme depend de quelques uns des precedents selon cette formule:

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) \\ + \int(n-15) - \int(n-22) \text{ etc.}$$

où il est à remarquer 1° que les nombres

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} 1, & & 2, & & 5, & & 7, & & 12, & & 15, & & 22, & & 26, & & 35, & & 40 \text{ etc.} \\ & 1 & & 3 & & 2 & & 5 & & 3 & & 7 & & 4 & & 9 & & 5 & \end{array}$$

se forment aisement par les differences considerées alternativement.

2°. Dans chaque cas on ne prend que les termes, où les nombres apres le signe $\int$ ne sont point negativs.

3°. S'il arrive ce terme $\int 0$ ou $\int(n-n)$, on prendra pour la valeur le nombre n meme.

Ainsi Vous verres que $\int 4 = \int 3 + \int 2 = 7$; $\int 9 = \int 8 + \int 7 - \int 4 - \int 2$

$$= 15 + 8 - 7 - 3 = 13; \quad \int 15 = \int 14 + \int 13 - \int 10 - \int 8 + \int 3 + \int 0$$
$$= 24 + 14 - 18 - 15 + 4 + 15 = 24;$$
$$\int 35 = \int 34 + \int 33 - \int 30 - \int 28 + \int 23 + \int 20 - \int 13 - \int 9 + \int 0$$
$$= 54 + 48 - 72 - 56 + 24 + 42 - 14 - 13 + 35 = 48.$$

Donc toutes les fois que n est un nombre premier on trouvera que $\int n = n + 1$ et partant puisque la nature des nombres premiers entre dans cette consideration cette loi me paroit d'autant plus remarquable.

J'ai l'honneur de Vous assurer de la plus parfaite consideration avec laquelle je suis

Monsieur

Berlin le 15 Fevrier 1748

Votre très humble et très obeïssant
serviteur L Euler.