1897

Extracts of letters from Euler to Johann I Bernoulli, 1739-1740

Leonhard Euler

den Berechnung des jüdischen Kalenders» (Königsberg 1847) zu Grunde gelegt, ohne eine Quelle dafür zu nennen!

[12] Arabistische Entstellung von METON und EUKTEMON: s. Zeitschr. d. deutschen morgenl. Gesellsch. **24**, 1870, S. 355, 358, 390.

Sur la découverte de l'intégrale complète des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Par G. ENESTRÖM à Stockholm.

Au commencement du 18e siècle la théorie générale des équations différentielles était encore peu développée. On avait intégré certaines classes d'équations du premier ordre, et on s'était aussi occupé avec succès de quelques équations du second ordre, dont l'intégration pouvait être effectuée par réduction au premier ordre. De même, quand un problème proposé menait à une équation différentielle du troisième ordre, on essayait de le résoudre par trois intégrations successives, et JEAN BERNOULLI avait trouvé[1] avant 1700 une méthode d'intégrer par n opérations successives l'équation différentielle

$$y + Ax\frac{dy}{dx} + Bx^2\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + Nx^n\frac{d^ny}{dx^n} = 0.$$

C'est à EULER qu'on doit la découverte de la première méthode d'intégrer par une seule opération une équation différentielle du $n^{\text{ème}}$ ordre. Cette méthode est applicable à des équations linéaires à coefficients constants, et elle a été exposée premièrement dans le mémoire: *De integratione æquationum differentialium altiorum graduum* publié en 1743 dans le tome VII (p. 193—242) des Miscellanea Berolinensia. Mais déjà quelques ans plus tôt, EULER l'avait trouvée, et il en avait rendu compte dans sa correspondance avec JEAN BERNOULLI. Comme il n'est pas sans intérêt de connaître la première exposition qu'EULER a donnée de sa méthode, nous allons la reproduire d'après ses lettres inédites.

La première lettre où EULER parle de l'intégration d'équations différentielles linéaires d'ordre quelconque est celle du 15 septembre 1739. Il y écrit:

Inveni nuper singularem modum æquationes differentiales altiorum graduum una vice ita integrandi, ut statim ad æquationem finitam perveniatur. Patet autem hæc methodus ad omnes æquationes, quæ in hac generali forma continentur:

$$y + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{b\,ddy}{dx^2} + \frac{c\,d^3y}{dx^3} + \frac{d\,d^4y}{dx^4} + \frac{e\,d^5y}{dx^5} + \text{etc.} = 0$$

posito dx constante. Ad hanc æquationem generatim integrandam considero æquationem hanc seu expressionem algebraicam:

$$1 - ap + bp^2 - cp^3 + dp^4 - ep^5 + \text{etc.} = 0.$$

Hæc expressio si fieri potest in factores simplices reales hujus formæ $1 - \alpha p$ resolvatur: sin autem hoc fieri nequeat, resolvatur in factores duarum dimensionum hujus formæ $1 - \alpha p + \beta pp$, quæ resolutio realiter semper institui potest, hocque modo prodibit superior expressio sub forma producti ex factoribus vel simplicibus $1 - \alpha p$ vel duarum dimensionum $1 - \alpha p + \beta pp$, omnibus realibus. Facta autem hac resolutione, dico valorem ipsius y finitum per x et constantes expressum constare ex tot membris, quot factores habeantur expressionis illius algebraicæ, singulosque factores præbere singula integralis membra. Nempe factor simplex $1 - \alpha p$ dabit integralis membrum

$$Ce^{-\frac{x}{\alpha}},$$

factor autem compositus $1 - \alpha p + \beta pp$ dabit integralis membrum hoc

$$e^{-\frac{\alpha x}{2\beta}}\left(C \sin A.\frac{x\sqrt{4\beta - \alpha\alpha}}{2\beta} + D \cos A.\frac{x\sqrt{4\beta - \alpha\alpha}}{2\beta}\right)$$

ubi $\sin A$ et $\cos A$ mihi denotant sinum vel cosinum arcus sequentis in circulo cujus radius $= 1$ sumti: notandum autem est, si expressio $1 - \alpha p + \beta pp$ in factores simplices reales resolvi nequeat uti pono, tum fore $4\beta > \alpha\alpha$ ideoque integrale reale. Proposita sit exempli gratia hæc æquatio

$$ydx^4 = k^4 d^4 y, \quad \text{seu} \quad y - \frac{k^4 d^4 y}{dx^4} = 0;$$

ex hac nascetur expressio algebraica hæc $1 - k^4 p^4$, cujus factores reales sunt tres $1 - kp$, $1 + kp$ et $1 + k^2 p^2$; ex quibus oritur æquatio integralis hæc:

$$y = Ce^{-\frac{x}{k}} + De^{\frac{x}{k}} + E \sin A.\frac{x}{k} + F \cos A.\frac{x}{k};$$

in qua expressione ob quadruplicem integrationem unica operatione peractam quatuor insunt novæ constantes C, D, E et F, uti natura integrationis postulat. Alia vice, si tibi, vir excellentissime, placuerit, hujus methodi demonstrationem perscribam.

A cette lettre Jean Bernoulli répondit le 9 décembre 1739:[3]

Non minus quoque curiosus videtur modus tuus æquationes differentiales altiorum graduum una vice ita integrandi, ut statim ad signationem finitam perveniatur. Memini me jam ante multos annos simile quod invenisse, quod in adversariis meis consignavi, sed nunc inquirere non vacat.

Par ces mots on pourrait se douter que Jean Bernoulli eût trouvé le premier une méthode d'intégrer des équations différentielles d'ordres supérieurs; mais en poursuivant la lecture de la réponse, on voit qu'il n'en est rien. Jean Bernoulli renvoie à son article: *Clar. Taylori mathematici Angli problema analyticum, quod omnibus geometris non-Anglis proposuit, solutum* (Acta eruditorum 1719, 256—270), où il s'agit de la décomposition de l'expression $x^4 + a^4$ en deux facteurs réels du second degré, et il fait voir que l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

a toujours une intégrale *particulière* de la forme

$$y = e^{mx}$$

où m est une constante (réelle ou imaginaire), mais il n'est pas en état de déduire l'intégrale complète, ni même une intégrale réelle de l'équation

$$y + \frac{k^4 d^4 y}{dx^4} = 0.$$

Dans sa lettre du 19 janvier 1740, Euler continuait ses renseignements sur sa découverte. Voici ce qu'il y dit:

Quod suspicaris, vir exc., ad methodum meam integrandi æquationes differentiales altiorum graduum, quæ hac forma generali continentur

$$0 = y + \frac{ady}{dx} + \frac{bddy}{dx^2} + \frac{cd^3 y}{dx^3} + \text{etc.}$$

ansam mibi præbuisse ingeniosam illam tuam analysin, qua problema Cotesianum a Tayloro propositum resolvisti, quanquam insignis similitudo intercedit, tamen postquam problema multis modis tractassem, prorsus inopinato in meam solutionem incidi, atque ante nequidem suspicione agnoveram, resolutionem æquationum algebraicarum in hoc negotio quicquam subsidii afferre posse. Mox quidem pariter ac tu, vir celeb., intellexi in hujusmodi æquationibus logarithmicas contineri, modo plures, modo pauciores, sæpius etiam nullas, quæ parametros habeant reales. Verum meum institutum in hoc præcipue versabatur, non tam ut unam atque alteram æquationem integralem exhiberem, quæ propositæ differentiali satisfaceret, quam ut æquationem integralem completam eruerem, quæ æque late ac ipsa differentialis pateret, et quæ omnes omnino æquationes particulares satisfacientes simul in se complecteretur. Imprimis autem in eo eram occupatus, ut æquatio integralis a quantitatibus imaginariis penitus esset libera, id quod mihi ex voto consecutus esse videor. Quod enim oggeris hujus æquationis

$$y + \frac{k^4 d^4 y}{dx^4} = 0$$

integralem mea methodo inventam imaginariam esse futuram, id, si quidem meam methodum attentius inspicere dignaberis, aliter deprehendes. Pervenio namque ad hanc æquationem algebraicam $p^4 + k^4 = 0$, quæ in has duas æquationes duarum dimensionum resolvitur

$$p^2 + kp\sqrt{2} + k^2 = 0 \quad \text{et} \quad p^2 - kp\sqrt{2} + k^2 = 0,$$

unde obtineo hanc æquationem integralem completam

$$y = Ce^{\frac{x}{k\sqrt{2}}} \sin A. \frac{x}{k\sqrt{2}} + De^{\frac{x}{k\sqrt{2}}} \cos A. \frac{x}{k\sqrt{2}}$$
$$+ Ee^{-\frac{x}{k\sqrt{2}}} \sin A. \frac{x}{k\sqrt{2}} + Fe^{-\frac{x}{k\sqrt{2}}} \cos A. \frac{x}{k\sqrt{2}}$$

cujus æquationis quatuor constantes C, D, E et F manifesto testantur hanc æquationem esse integralem completam. Quodsi enim æquatio differentialis quarti ordinis proposita

$$y + \frac{k^4 d^4 y}{dx^4} = 0$$

quater omni extensione integretur, necesse est ut quatuor novæ constantes in finalem æquationem integralem ingrediantur. Præcipuum autem, quo hæc mea methodus aliis antecellere videtur, in hoc consistit, quod non opus habeam tot integrationes successive instituere, quot gradus habent differentialia, sed uno quasi actu inveniam æquationem integralem finitam. Simili fere modo possum etiam æquationem integralem completam ac realem invenire, quæ satisfaciat huic æquationi differentiali indefiniti gradus

$$0 = y + \frac{axdy}{dx} + \frac{bx^2 ddy}{dx^2} + \frac{cx^3 d^3 y}{dx^3} + \frac{dx^4 d^4 y}{dx^4} + \text{etc.};$$

posito dx constante.

Des remarques ultérieures de JEAN BERNOULLI[3] donnaient lieu à de nouvelles communications de la part d'EULER sur le même sujet. Ainsi il fait observer dans sa lettre du 20 juin 1740:

Quæ de integratione æquationum differentialium indefiniti gradus mihi rescribis, mirifice mihi placent; methodus quidem, qua uteris, vir excell., in æquatione

$$0 = y + \frac{ady}{dx} + \frac{bddy}{dx^2} + \frac{cd^3 y}{dx^3} + \text{etc.}$$

fere congruit cum mea, altera autem quam præbes pro æquatione

$$0 = y + \frac{axdy}{dx} + \frac{bxxddy}{dx^2} + \frac{cx^3 d^3 y}{dx^3} + \text{etc.}$$

a mea maxime discrepat, mihique compendia nonnulla patefecit, quæ ex mea methodo non tam sponte manarent. Ceterum mea methodus hoc præcipue discrepat, quod semper æquationem realem exclusis imaginariis præbeat: id quod nisi ad quantitates vel exponentiales vel a circuli quadratura pendentes confugere velimus, effici omnino nequit.

Et dans sa lettre du 18 octobre 1740, il ajoute:

Nunquam ego quantum memini dixi methodum tuam integrandi hanc æquationem

$$0 = y + \frac{ady}{dx} + \frac{bddy}{dx^2} + \frac{cd^3 y}{dx^3} + \text{etc.}$$

non satis esse generalem: sed tantum dixi eam hoc laborare incommodo, ut sæpissime integrale quantitatibus imaginariis involutum exhibeat. Quotiescunque autem æquationis differentialis realis invenitur æquatio integralis imaginariis inquinata, toties ea in aliam formam illi quidem æquivalentem sed realem transformari potest, atque in hoc solo mea methodus a tua differt, ut mea statim illas expressiones reales pro integrali exhibeat. Quo in negotio miror te, vir celeb., integrale æquationis

$$y + \frac{ed^4 y}{dx^4} = 0$$

a me datum a tuo re vera discrepans arbitrari, cum ego tantum logarithmicarum imaginariarum, quas tu invenis, statim earum valores reales per quadraturam circuli expressos exhibeam; eoque magis miror quod tu primus reductionem quadraturæ circuli ad logarithmos imaginarios et vicissim patefeceris.[4] Categorice itaque, uti postulas, respondeo, me integrale æquationis

$$y + \frac{ed^4y}{dx^4} = 0$$

a me datum non solum pro vero agnoscere, verum etiam id a tuo logarithmis imaginariis constante specie tantum, non autem ipsa re dissentire. Æque nimirum integralia nostra inter se conveniunt, ac istæ expressiones $e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$ et $2 \cos A \cdot x$, etsi specie maxime a se invicem diversæ, existente $le = 1$: utraque enim expressio in seriem mutata eandem dat seriem

$$2\left(1 - \frac{xx}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \ldots 6} + \text{etc.}\right).$$

Utraque etiam est valor integralis ipsius y ex æquatione

$$ddy + y\,dx^2 = 0;$$

cujus ideo si alter nostrum dicat integrale esse

$$y = e^{+x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$$

alter vero esse

$$y = 2 \cos A \cdot x,$$

diversis quidem modis idem dicimus, at posterior expressio magis est intelligibilis, ex eaque facilius pro quovis ipsius x valore proposito conveniens valor ipsius y exhiberi potest. Demonstrare autem possum, quoties in integratione tua methodo instituta perveniatur ad logarithmicas imaginarias, eas semper ita esse comparatas ut illarum binæ conjunctæ sinum vel cosinum cujuspiam arcus, hoc est quantitatem realem representant; atque mea methodo statim valores hos reales loco quantitatum imaginariorum introduco.

Aussi dans une lettre, actuellement perdue, du 16 septembre 1741, EULER s'est occupé de l'intégration des équations différentielles linéaires, comme il résulte d'un passage de la lettre de JEAN BERNOULLI du 28 octobre 1741.[5]

Il s'ensuit des extraits rapportés ci-dessus qu'EULER avait trouvé sa méthode déjà en 1739, et que la découverte en fut faite presque inopinément (*prorsus inopinato*). EULER relevait aussi expressément, que cette méthode différait essentiellement de celles proposées antérieurement en ce qu'elle donnait immédiatement l'intégrale complète, sans qu'on eût besoin d'intégrations successives.

Il convient de faire observer que, dans sa lettre du 18 octobre 1740, EULER a indiqué la formule[6]

$$e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} = 2 \cos x,$$

mais qu'il n'en ressort pas, s'il avait encore remarqué les formules

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x, \quad e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1} \sin x$$

qu'on rencontre pour la première fois dans l'*Introductio in analysin infinitorum*.[7]

Toutes les recherches d'EULER dont je viens de parler, se rapportent exclusivement à des équations différentielles linéaires de la forme

$$\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_ny = 0;$$

le cas où le second membre n'est pas 0, mais une fonction de x, n'a été traité par EULER que dans le mémoire *Methodus nova æquationes differentiales altiorum graduum integrandi ulterius promota* publié en 1753 dans le tome III (p. 3—35) des Novi commentarii academiæ scientiarum Petropolitanæ.

[1] Comparez la *Correspondance mathématique* et *physique de quelques célèbres géomètres du XVIII*ème *siècle, publiée par* P. H. FUSS. Tome II (S:t Pétersbourg 1843), p. 36. La »scheda separata» dont parle JEAN BERNOULLI, n'a pas été publiée par FUSS — sans doute parce qu'il n'y avait pas recours — mais le brouillon de JEAN BERNOULLI est gardée à la Bibliothèque de l'académie des sciences de Stockholm. JEAN BERNOULLI multiplie l'équation proposée par x^p et détermine p de manière que le premier membre en puisse être immédiatement intégré. Il obtient alors une équation du $(n-1)$ème ordre semblable à la proposée, et après n opérations successives il parvient à l'intégrale demandée.

[2] Comparez FUSS, l. c. II, p. 28—29.

[3] Comparez FUSS, l. c. II, p. 35—36, 47—48.

[4] EULER fait allusion ici au mémoire de JEAN BERNOULLI: *Solution d'un problème concernant le calcul intégral, avec quelques abregés par rapport à ce calcul* (Histoire de l'académie des sciences de Paris 1702; Mémoires p. 296—305).

[5] FUSS, l. c. II, p. 62.

[6] Un cas particulier de cette formule a été mentionné vers le même temps par EULER dans une lettre adressée à