1886

Lettres inédites d'Euler à d'Alembert

Leonhard Euler

BULLETTINO

DI

BIBLIOGRAFIA E DI STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE

PUBBLICATO

DA B. BONCOMPAGNI

SOCIO ORDINARIO DELLA ACCADEMIA PONTIFICIA DE' NUOVI LINCEI
SOCIO CORRISPONDENTE DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE DELL'ISTITUTO DI BOLOGNA
DELLE R. ACCADEMIE DELLE SCIENZE DI TORINO, E DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI DI MODENA
E SOCIO ONORARIO DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI BERLINO

TOMO XIX.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE
Via Lata Num.° 3.

1886

LETTRES INÉDITES

D'EULER A D'ALEMBERT

PUBLIÉES

PAR M. CHARLES HENRY.

Les lettres qui suivent proviennent des papiers de d'Alembert que Madame O'Connor, fille de Condorcet, légua à la Bibliothèque de l'Institut. Elles font partie de la liasse cotée R 699^6 in-4° avec les lettres de d'Alembert à Turgot que nous avons publiées dans la *Correspondance inédite de d'Alembert*.

Elles se rapportent, à l'analyse et à l'astronomie, principalement à la question des logarithmes des quantités négatives. Euler, après Leibniz, soutenait que les nombres négatifs n'ont point de logarithmes réels, tandis que d'Alembert, après Bernoulli, soutenait le contraire. Euler résolut le problème en ramenant les logarithmes aux fonctions circulaires et aux fonctions exponentielles. On lira avec le plus vif intérêt la profonde discussion d'Euler. Il n'y a pas lieu d'insister sur cette solution aujourd'hui classique.

La première lettre est datée du 15 Avril 1747: la dernière est sans date; mais la mention qu'elle renferme de la publication du traité de la *Science Navale* permet de la placer en 1749. Ce n'est pas la moins intéressante: elle nous précise la date à laquelle ce traité fut achevé: 1741 et Euler y pose sur le tourniquet hydraulique un problème qui a été résolu et appliqué depuis dans les appareils nommés *roues à réaction*.

Ces lettres ne sont évidemment que des fragments d'une correspondance beaucoup plus vaste; elles doivent être considérées comme un Supplément à la Correspondance mathématique publiée en 2 volumes par Fuss en 1843, aux *Opera Minora* d'Euler (1849), et aux *Opera posthuma* (1862).

I.

Euler a D' Alembert (1).

Monsieur,

Il est bien vrai que l'exemple de la courbe $y = \sqrt{x} + \sqrt{x}\,\sqrt{(x+a)}$, qui perd dans le cas $a = 0$ subitement toute une moitié, ne prouve pas que la même chose doive arriver dans la courbe $y = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n-1)(x^{n-1}-1)}$ au cas $n = 1$; aussi ne me suis-je pas servi de cet exemple que pour prouver la possibilité d'une telle évanouïssance dans un certain cas, et je n'en tire que cette conclusion que, quoique la dernière courbe ait toujours un diamètre, quand n est un nombre non pair, pourtant cette conséquence puisse peut-être cesser d'être vraie au cas $n = 1$. Par ce moïen il me semble que j'ai bien répondu à votre objection, tirée de cette formule générale, quoique ce cas ne prouve rien pour ma thèse, car d'abord je m'étois proposé de faire voir que les argumens qu'on allègue pour prouver la réalité des logarithmes des nombres négatifs, n'étoient pas trop sûrs. Mais il me semble que ma théorie ne manque pas des preuves positives; mais avant que de les étaler il faut répondre à votre objection, fondée sur l'équation $y = e^x$, où vous pensés que le nombre e^l puisse avoir également une valeur affirmative et négative. Je conviens même que sa valeur est tout à fait arbitraire, car si vous mettés $e = 10$, l'exposant x sera le logarithme commun ou tabulaire du nombre y et si $e = 2{,}305$ etc. ou $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4}$ etc., x sera le logarithme hyperbolique du nombre y. Mais dès qu'on assigne au nombre e une valeur déterminée, le système entier des logarithmes de tous les nombres sera déterminé, aussi bien que la courbe, dont l'équation $y = e^x$ et comme e est quasi son paramètre, on ne pourra pas lui donner en même tems deux valeurs différentes que la courbe ne devienne composée de deux courbes différentes. De même que l'équation parabolique $yy = ax$, si l'on donnoit à a une double valeur par exemple $a = +1$ et $a = -1$, on auroit deux courbes différentes, qui ne seroient pas jointes par le lien de la continuité. Cela posé, il me semble fort clair que posant $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3}$ etc. les logarithmes des nombres négatifs doivent être impossibles, vu qu'il

(1) Cette lettre est adressée: « *A Monsieur Monsieur D' Alembert, des Académies Royales des* » *Sciences de Paris et de Berlin, à Paris* ».

est impossible de trouver une telle valeur de x, que e^x ou $1 + \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3}$ + etc. produise une valeur négative. Il vous paroît paradoxe que les differentiels des ly et $l-y$ soient les mêmes; mais vous m'accorderés pourtant cette égalité dans un sens plus général, c. à d. que $d.ly = d.lay$, quelque nombre constant que soit a, d'où je ne vois la moindre difficulté pourquoi on le pourroit nier dans le cas $a = -1$. Par le raisonnement que vous prouvés que $l-1=0$, vous prouverés également que $l\sqrt{-1}=0$, car puisque $\sqrt{-1}.\sqrt{-1}=-1$, vous aurés $l\sqrt{-1}+l\sqrt{-1}=l-1$, c. à d. $2l\sqrt{-1}=l-1=\frac{1}{2}l+1$ et partant $l\sqrt{-1}=\frac{1}{4}l1=0$, et si vous n'aprouvés pas ce raisonnement, vous m'accorderés que le premier n'est plus convainquant. Or, vous serés au moins d'accord que les logarithmes des nombres imaginaires ne sont pas réels, sans cela cette expression $\frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ ne sauroit exprimer la quadrature du cercle. Soit $\frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \alpha$. et vous aurés $l\sqrt{-1}=\alpha\sqrt{-1}$ c. à d. à une quantité imaginaire. Si donc $l\sqrt{-1}$ est imaginaire, pourquoi ne le seroit pas $2\,l\sqrt{-1}=l-1$? Ensuite comme $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3=1$, suivant votre raisonnement, vous auriés $3l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=l1=0$ et le logarithme de $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ seroit aussi bien $=0$ que $l+1$ et $l-1$ et $l\sqrt{-1}$ etc., ce qui n'est pas soutenable. Mais vous m'oposerés que même $l+1$ devroit être imaginaire étant $=2l-1=4l\sqrt{-1}=3l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ etc. Or, c'est justement ce que je veux, car je dis que $l+1$ a une infinité de valeurs différentes parmi lesquelles il y a une $=0$ et toutes les autres sont imaginaires. Pour mieux expliquer cela soient $0, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \varkappa$ etc. les logarithmes de l'unité et je dis que les valeurs de $l-1$ seront $\frac{\alpha}{2}; \frac{\gamma}{2}; \frac{\varepsilon}{2}; \frac{\eta}{2}$ etc. toutes imaginaires, de sorte pourtant que le double de chacune se trouve parmi les logarithmes de $+1$; mais il ne s'ensuit pas que la moitié de chacune des valeurs de $l+1$, se trouve parmi les $l-1$, puisque -1 n'est qu'une valeur de $\sqrt{+1}$, l'autre étant $+1$, dont les logarithmes sont $\frac{0}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\delta}{2}, \frac{\zeta}{2}$ qui sont justement les mêmes que $0, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$, etc. Car $\frac{\beta}{2}=\alpha$, $\frac{\delta}{2}=\beta$, $\frac{\zeta}{2}=\gamma$, $\frac{\theta}{2}=\delta$, etc. Pareillement comme les trois racines cubiques de 1 sont 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ les logarithmes de ces trois racines seront

$$l1 = \frac{0}{3} \cdot \frac{\gamma}{3} \cdot \frac{\zeta}{3} \cdot \frac{\iota}{3} \cdot \frac{\mu}{3} \text{ etc.}$$

les mêmes que $0, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, etc.

$$l\,\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \frac{\alpha}{3} \cdot \frac{\delta}{3} \cdot \frac{\eta}{3} \cdot \frac{\varkappa}{3} \cdot \frac{\nu}{3} \cdot \text{etc.}$$

$$l\,\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \frac{\beta}{3} \cdot \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{\theta}{4} \cdot \frac{\lambda}{3} \cdot \frac{\xi}{3} \cdot \text{etc.}$$

et ces lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ etc. ne sont pas fondées snr une pure conjecture; j'ai eu l'honneur même de vous en marquer les véritables valeurs. Car, soit π la circonférence d'un cercle, dont le rayon est $=1$ et les valeurs du $l+1$ sont $a \pm \pi\sqrt{-1}$; $\pm 2\pi\sqrt{-1}$; $\pm 3\pi\sqrt{-1}$; $\pm 4\pi\sqrt{-1}$; $\pm 5\pi\sqrt{-1}$; etc. de $l-1$ sont $\pm \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$; $\pm \frac{3}{2}\pi\sqrt{-1}$; $\pm \frac{5}{2}\pi\sqrt{-1}$; etc.

Et en général j'ai trouvé $l\,1^p = \pi\,(mp+n)\,\sqrt{-1}$, $l\,(-1)^p = \pi\,(\frac{1}{2}p+mp+n)\,\sqrt{+1}$; où m et n marquent des nombres entiers tant affirmatifs que negatifs quelconques. Par ce moien toutes les difficultés disparoissent tout à fait qu'on ne sauroit lever en aucune manière si l'on vouloit réaliser les logarithmes des nombres négatifs, se fondant que $2l-1 = l+1 = 0$, puisque par le même raisonnement on seroit obligé de dire que $l\sqrt{-1} = 0$, et $l\,\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = 0$.

Vous dites encore, Monsieur, que puisque $e^x = y$, si $x = \frac{1}{2}$, le nombre y peut être tant affirmatif que négatif; mais parce que e^x marque ici la valeur de cette serie $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$ je crois d'y répondre très solidement que e^x ne signifie jamais plus qu'une valeur, et cela l'affirmative, quand même x seroit une fraction où l'extraction de racine semble rendre la formule e^x équivoque.

Votre pièce sur le mouvement de la lune est sans doute de la dernière profondeur et votre supériorité dans les calculs les plus difficiles y éclate partout. La remarque que j'ai pris la liberté de vous écrire ne regardoit que l'application de votre analyse à l'usage des tables astronomiques. Il s'agit pour cet effet des approximations faciles pour le calcul et il me sembloit que la manière dont vous traités ce problème, n'étoit pas trop propre par rapport à ces approximations. Car ayant manié cette question de quantités de manières différentes, je n'ai trouvé qu'un seul chemin, qui fût propre pour l'usage astronomique, duquel j'ai aussi calculé mes tables de la lune. Je suis donc d'autant plus curieux de voir la suite de vos recherches sur cette matière, ayant l'honneur d'être avec la plus grande considération

Berlin, ce 15 Avril 1747.

Monsieur,
Votre très humble et très obéissant serviteur
L. EULER.

II.

EULER A D'ALEMBERT (1).

Monsieur,

Je profite du départ de M.r Delisle pour vous répondre à votre dernière lettre et de vous recommender un jeune homme de notre Académie, qui a obtenu la permission d'accompagner M.r Delisle. Il est fils d'un de nos Astronomes, nommé Grischow qui, ayant déjà fait quelques progrès dans l'astronomie, croit ne pouvoir mieux emploier son tems qu'en cherchant occasion de profiter des lumières et de l'addresse des Astronomes de Paris, auprès desquels je vous prie de lui faciliter l'accès et de l'honnorer particulièrement de votre bienveillance.

Pour notre controverse touchant les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires, j'espère qu'elle sera bientôt terminée; dans votre pièce sur les intégrales, qui vient d'être imprimée dans le second volume de nos mémoires, J'ai suivant vos ordres rayé l'article où vous parliés du log. -1 et je crois que vous serés en peu de tems entièrement d'accord avec moi sur ce sujet. J'avoüe que la formule e^x doit avoir deux valeurs dans le cas $x=\frac{1}{2}$; mais vous m'accorderés aussi que dans les autes cas la valeur de e^x ne peut pas être négative et comme il s'agit principalement du log: -1, vous ne prétendrés pas que e^x puisse devenir $=-1$, en supposant $x=o$, ainsi cet argument ne prouve au moins rien pour vous.

Quand vous dites qu'on pourroit résoudre $l-x$ dans une suite dont la valeur fût réelle, je n'en comprends rien, si ce n'est que les termes de la suite soient réels; mais on pourra de même $\sqrt{-x}$ résoudre dans une telle suite. Au reste, je veux bien que ce que j'ai dit dans ma première lettre de la suite $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} +$ etc. ne prouve rien pour moi, de même que l'ambiguité de e^x dans certains cas ne prouve rien contre moi, puis qu'on devroit

(1) Cette lettre porte sur l'adresse: « *A Monsieur, Monsieur D'Alembert, Membre des Académies Royales des Sciences de Paris et de Berlin, à Paris* ».

aussi accorder trois valeurs quand $x = \frac{1}{3}$, quatre quand $x = \frac{1}{4}$ etc. mais cela mèneroit trop loin.

Quand vous dites que la quantité e ne doit pas être considérée comme le paramètre de la logarithmique, mais comme l'ordonnée qui répond à l'abscisse $x = 1$ et qu'à cause de cela elle puisse être tant affirmative que négative, je pourrois dire avec autant de droit que la logarithmique a non seulement deux rames égaux et semblables selon les deux formules $x = l + y$ et $x = l - y$, mais aussi autant qu'on voudra $x = l + y$, $x = lmy$; $x = lny$ etc. puisque toutes ces formules ont la même différentielle $dx = \frac{dy}{y}$. Pour ce qui regarde votre transformation de e^x en $\frac{e^{\frac{x}{g}}}{a^{\frac{x}{g}-1}}$ ou $x : g$ comme un nombre impair à un pair, on se pourroit avec autant de droit imaginer cette formule que $x : g =$ pair : impair ou impair : impair et alors vous ne trouveries pas votre conte. Il me semble donc que toutes ces raisons ne sont pas assez fortes pour prouver que $l + x = l - x$.

Ensuite vous doutés si la formule tirée des sinus donne tous les logarithmes de -1; mais je ne sai pas si un doute simple destitué de démonstration puisse renverser ce que j'avance et pour la formule $\frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ je soutiens qu'elle ne renferme que les valeurs $+ \frac{(4n+1)\pi}{2}$, n marquant un nombre entier quelconque et π la circonférence d'un cercle dont le diamètre $= 1$, de sorte que cette formule ne puisse jamais devenir $= 0$. Il est vrai que mon sentiment est appuyé sur la formule tirée des sinus, mais je ne voi aucune raison pourquoi cette formule ne donneroit tous les logarithmes de $\sqrt{-1}$ et je crois toujours que les raisons *pour* sont plus fortes que celles *contre*.

Enfin dans la formule des arcs de cercles $s = \sqrt{-1}.\ l\,(x + \sqrt{(xx-1)})$ si x marque les cosinus de l'arc s, je ne voi aucune raison de douter, que si $x > 1$, l'arc s ne soit une imaginaire simple $b\sqrt{-1}$, de sorte que

$$l\,(x + \sqrt{(xx-1)}) = b;$$

et je ne croi pas que vous prouverés le contraire.

J'ai communiqué à l'Académie une pièce sur ce sujet, où je crois avoir tellement mis dans son jour cette matière, qu'au moins moi, je n'y trouve plus la moindre difficulté, quoiqu'auparavant j'aie été extrêmement embarassé.

J'ai l'honneur d'être avec toute la considération possible

Monsieur,

Votre trés humble et trés obéissant serviteur

L. Euler

Berlin, ce 19[me] Août 1747.

P. S. — Vous m'accordés que $l+1=\pm 2n\pi\sqrt{-1}$ et que $l-1=\pm(2n-1)\pi\sqrt{-1}$ mais vous dites, Monsieur, que parmi les logg: -1 se trouve aussi 0: donc, puisque deux logarithmes de -1 ajoutés ensemble donnent $l+1$, les logg. de $+1$ seront, non seulement $\pm 2n\pi\sqrt{-1}$ mais aussi $\pm(2n-1)\pi\sqrt{-1}$. De plus vous m'accordés que $l\sqrt{-1}=\pm\frac{(4n\pm1)}{2}\pi\sqrt{-1}$ et que $l-\sqrt{-1}=\pm\frac{(4n\mp1)}{2}\pi\sqrt{-1}$, mais que ces formules ne contiennent pas tous les logg. de $+\sqrt{-1}$ et de $-\sqrt{-1}$, et qu'il s'y trouve aussi 0, donc puisque $l+\sqrt{-1}+l-\sqrt{-1}=l+1$, le log. $+1$ comprendra encore ces formules $\pm\frac{(4n\pm1)}{2}\pi\sqrt{-1}$. De même, si vous dites que zero est aussi le logarithme des plus hautes racines imaginaires de 1, vous serés enfin obligé de dire que tous les logarithmes de $+1$ sont contenus dans cette formule $\frac{m}{n}\pi\sqrt{-1}$ ou $a\sqrt{-1}$, quelque quantité qu'on prenne pour a: de sorte que $l+1$ deviendroit tout à fait indéterminé, conséquence qui me paroit suffisante pour détruire votre objection. Or, suivant mon sentiment, quand je dis que:

$$l+1=0;\ \pm 2\pi\sqrt{-1};\ \pm 4\pi\sqrt{-1};\ \pm 6\pi\sqrt{-1};\ \text{etc}$$

$$l+\sqrt{-1}=+\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}+;\ \frac{5}{2}\pi\sqrt{-1};+\ \frac{9}{2}\pi\sqrt{-1};\ \text{etc.}$$

$$-\frac{3}{2}\pi\sqrt{-1};+-\frac{7}{2}\pi\sqrt{-1},\ -\frac{11}{2}\pi\sqrt{-1}$$

$$l-1=\pm\pi\sqrt{-1};\ \pm 3\pi\sqrt{-1};\ \pm 5\pi\sqrt{-1};\ \pm 7\pi\sqrt{-1};\ \text{etc.}$$

$$l-\sqrt{-1}=+\frac{3}{2}\pi\sqrt{-1};\ +\frac{7}{2}\pi\sqrt{-1};+\frac{11}{2}\pi\sqrt{-1};\text{etc.}$$

$$-\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1};-\frac{5}{2}\pi\sqrt{-1};-\frac{9}{2}\pi\sqrt{-1}.$$

Vous trouverés la plus belle harmonie; car deux logg: quelconques de -1 ajoutés ensemble produiront toujours un $l+1$; deux logg: de $+\sqrt{-1}$ ajoutés ensemble donneront toujours un $l-1$; de même que deux logg: de $-\sqrt{-1}$; et un $l+\sqrt{-1}$ + un $l-\sqrt{-1}$ donnera toujours un $l+1$. Cette remarque seule me paroît suffisante pour vous convaincre de la vérité de mon sentiment, au lieu que si vous faites le moindre changement dans mes formules, vous serés obligé de rendre les logarithmes de $+1$ tout à fait indéterminés; et je vous prie de peser bien cet argument.

III.

EULER A D'ALEMBERT (1).

Monsieur,

Ayant appris de M.r de Maupertius que vous voulés quitter pour quelque tems les recherches de Mathématique pour rétablir votre santé, qui se trouvoit considerablement affoiblie par votre trop grande application, j'approuve si fort cette résolution, dout je vous souhaite tout le succès que vous en attendés, que je ne veux pas vous y troubler par des réflexions sur les logarithmes imaginaires, quoique je ne saurois presque rien ajouter sur cette matière, que je ne vous aye déjà marqué et je doute fort, si ma pièce sur cette matière sera capable de lever tous les doutes, que vous vous êtes donné la peine de me proposer. Mais après que vous m'avés accordé autant, ces doutes ne favorisent pas trop votre sentiment, et il n'y a personne qui les sauroit mieux résoudre que vous-même.

Si dans vos divertissemens vous avés envie de faire quelque recherche, qui ne demande pas beaucoup d'application, je prendrai la liberté de vous proposer cette expression $(1-x)\ (1-x^2)\ (1-x^3)\ (1-x^4)\ (1-x^5)\ (1-x^6)$ etc., laquelle étant développée par la multiplication actuelle, donne cette série $1-x^1-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+x^{51}+x^{57}-x^{70}-x^{77}$ + etc., qui me paroit fort remarquable, à cause de la loi qu'on y découvre aisement; mais je ne voi pas comment cette loi pourroit être déduite sans induction de l'expression proposée même.

J'ai l'honneur d'être avec la plus parfaite considération, en vous remerciant de toutes les bontés que vous avés pour notre M.r Grischow

Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur

L. EULER

Berlin, ce 30 Déc. 1747.

Si l'on met $s=(1-x)\ (1-x^2)\ (1-x^3)\ (1-x^4)\ (1-x^5)\ (1-x^6)$ etc. je puis démontrer qu' il y aura

$$s=1-\frac{x}{1-x}+\frac{x^3}{(1-x)\ (1-x^2)}-\frac{x^6}{(1-x)\ (1-x^2)\ (1-x^3)}$$
$$+\frac{x^{10}}{(1-x)\ (1-x^2)\ (1-x^3)\ (1-x^4)}-\text{etc. (2).}$$

(1) Cette lettre porte comme adresse: « *A Monsieur, Monsieur D'Alembert, de l'Académie Royale des Sciences et Membre de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin à Paris* ».

(2) Ces lignes sont écrites dans la marge.

IV.

EULER A D'ALEMBERT (1).

Monsieur,

Je profite du départ de Monsieur de Maupertuis pour répondre aux deux lettres du 17 Juin et du 7 sept, dont vous m'avés bien voulu honorer. Je suis très sensible aux soins, que vous avés emploiés pour me procurer le prix de cette année et je souhaiterois d'être en état de vous témoigner ma reconnoissance aussi efficacement que je voudrois, et cela d'autant plus que je dois avouer qu'il y a quantité de choses dans la théorie du mouvement de Saturne, que je n'ai pas été capable de développer et je doute fort que je serai en état de me satisfaire à moi-même quand même je reprendrois cette matière de nouveau. Il est bien vrai qu'avant que j'eus trouvé la résolution de la formule $(1 - g \cos. \omega)^{-\mu}$; je ne voyois d'autres resources de parvenir à une conclusion que par voye des quadratures, comme M.r Bernouilli a fait; mais j'ai pourtant été obligé de m'écarter de la rigueur géométrique plus que je ne voulois: et je ne doute aucunement que vos remarques là-dessus ne soient que trop fondées, quoique n'ayant plus un exemplaire de ma pièce, je ne sois pas en état d'en faire l'examen. Cependant je ne puis pas comprendre comment, en supposant l'orbite de Saturne circulaire, faisant abstraction de l'action de Jupiter, il seroit possible de faire entrer dans le calcul l'anomalie de Saturne, car l'orbite étant circulaire la considération de l'aphélie, auquel l'anomalie se rapporte évanouit tout à fait: ainsi je ne vois pas comment dans ce cas vous prétendés que l'anomalie de ♄ y dût entrer. De plus il est évident que tous les termes qui dépendent de l'anomalie sont multipliés par l'excentricité; donc si l'excentricité $= 0$ tous ces termes évanouiront conjointement. Ainsi je crois que vous ne trouverés plus suspecte la forme intégrale $r = A \cos. \omega + \beta \cos. 2\omega$, etc., que j'ai prise de l'équation $ddv + \mu\mu r d\omega^2 +$ etc. l'excentricité étant supposée $= 0$ et il me semble encore bien certain que si les deux excentricités de Saturne et de Jupiter évanouissoient, la quantité r ne sauroit dépendre que du cosinus de l'élongation de ces deux planètes; puisque dans ce cas il n'y auroit plus ni aphélie ni anomalie. Vous vous souviendrés que j'ai aussi allégué, pour prouver que la lune ne suit pas exactement la théorie de l'attraction, cette raison que la parallaxe observée de la lune surpassoit plus d'une minute celle qui se trouve par la théorie, et vous ferés la même remarque si vous envisagerés la table des parallaxes de M.r Cassini ou de Flamsteed. Mais la dernière éclipse du

(1) Cette lettre est adressée: « *A Monsieur Monsieur D'Alembert* ».

soleil m'a convaincu tout à fait que la vraye parallaxe de la lune est parfaitement d'accord avec la théorie et j'ai vu avec la plus grande satisfaction que M.r le Monnier a éteble la parallaxe de la lune presque d'une minute plus petite que M.r Cassini. J'ai aussi remarqué que les variations du lieu du noeud et de l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique, que la théorie donne, sont parfaitement d'accord avec les observations, mais il me semble qu'il n'en est pas tout à fait de même de la révolution entière du noeud, car le mouvement annuel moyen du noeud de la théorie diffère encore de plusieurs minutes de celui des observations. J'ai vu avec bien du plaisir que vous avés traité le mouvement des planètes dans un milieu résistant avec un plus heureux succès que moi, car je ne voyois pas moyen de résoudre ce problème convenablement qu'au cas que la résistence fut presque infiniment petite. Je vous prie de me dire aussi votre sentiment sur ma nouvelle théorie de la lumière et des couleurs, laquelle me paroit de plus en plus mieux fondée et conforme aux observations. La matière des logarithmes imaginaires ne m'est plus si familiére que je puisse solidement répondre aux nouvelles remarques que vous me faites sur ce sujet et je me vois obligé d'attendre jusqu'à ce que je pourrai reprendre l'examen de cette matiére. Vos remarques sur mon Introduction ne sont que trop bien fondées; mais vous ne serés plus surpris des fautes qui s'y trouvent par rapport aux facteurs trinômes et aux points de rebroussement de la seconde espèce, quand je vous dirai que cet ouvrage a été presque trois ans à Lausanne et que je l'avois achevé déjà quelque tems auparavant. Alors j'avoue franchement que je n'avois pas encore une démonstration solide, que toute expession algébrique est résoluble en facteurs trinômes réels. Et dans ce tems là je fus aussi fort douteux s'il y avoit effectivement des courbes qui eussent un point de rebroussement de la seconde espèce et j'etois même porté à croire le contraire. Ensuite m'étant éclairci parfaitement sur ce point, j'ai envoié à M.r Bousquet une notte là-dessus, dans laquelle j'ai montré la réalité de ces points par l'exemple d'une ligne du quatrième ordre $y = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3}$ (contre laquelle vous n'aurés plus de doute, dès que vous la ferés rationnelle en la réduisant à $y^4 - 2xyy + 4xxy - xx - x^3 = 0$) et j'avois prié M.r Bousquet de faire insérer cette note sous le texte. Je suis donc fort fâché qu'il l'a introduit dans le texte même, qui cause maintenant, tant avec le précédent qu'avec la suite une contradiction ouverte. J'ai aimé mieux de laisser dans mon ouvrage cette matière imparfaite que d'y faire les corrections que je n'avois trouvées que quelque tems après, surtout ayant eu occasion de profiter de vos lumières, de peur de paroitre que je m'étois voulu approprier des découvertes, dont la première invention ne m'appartenoit point.

J'ai l'honneur d'être avec la plus grande considération

Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur
L. Euler.

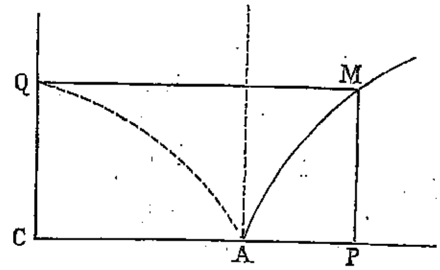
Berlin, ce 28 Sept. 1748.

V

Euler a D'Alembert (1).

Monsieur,

J'espère que vous aurés bien reçu ma dernière lettre, dont M.^r de Maupertuis a eu la bonté de se charger: celle-cy vous sera remise par M.^r Battier, mon cousin, et Membre de notre Académie, qui ayant le dessein de s'appliquer de toutes ses forces aux mathématiques à Paris, m'a fort prié de lui prouver l'honneur de votre connaissance. Comme je suis bieu seur que vous le trouverés digne de votre affection, j'espère que vous ne me saurés pas mauvais gré de cette recommandation et que vous ne lui refuserés point le secours de vos lumières, dont il aura besoin dans la poursuite de ses études mathématiques.



J'ai considéré dernièrement la courbe AM, qui étant rapportée à l'axe CQ perpendiculaire à la droite donnée $AC = 1$, a cette propriété que l'appliquée $QM = u$ qui répond a l'abscisse $CQ = t$ est égale à l'arc AQ d'un quart de l'ellipse, dont les deux demi-axes sont $AC = 1$ et $CQ = t$. On voit d'abord que si $CQ = t$ évanouït, alors l'appliquée $QM = u$ devient $= CA = 1$, de sorte que la courbe AM sera à peu près semblable à une hyperbole équilatérale, dont le centre est en C, car elle aura aussi des asymptotes qui passent par le point C et qui font un angle demi-droit avec CA. Il n'est pas difficile d'exprimer la nature de cette courbe par une équation différentio-différentielle, qui, supposant l'élément dt constant, sera $\frac{ddu}{dt^2} = \frac{(1+tt)\,du}{t(1-tt)\,dt} - \frac{u}{1-tt}$. De là il semble d'abord qu'il ne sera pas difficile d'exprimer la valeur de u par une telle serie $u = 1 + Att + Bt^4 + Ct^6 + Dt^8 + \text{etc.}$; mais vous verrés avec bien de la surprise, que tous ces coefficiens A, B, C, D, etc. deviennent infinis. Quoique cette équation ne serve de rien pour la connoissance de cette courbe, il s'ensuit de là que le rayon de la developpée de cette courbe en A est infiniment petit. Mais je voudrois voir l'équation entre les cordonnées $AP = x$ et $PM = y$, qui exprimât seulement la nature d'une portion infiniment petite de la Courbe auprès de A. Cette équation

(1) Sans adresse.

aura une telle forme $y = \alpha x^n$, selon vos remarques, et puisque la tangente en A est perpendiculaire à l'abscisse AP, il sera $n < 1$, et puisque la courbure en A est infiniment grande il y aura $n > \frac{1}{2}$; mais quelque valeur entre ces deux limites, que vous ne donniés à n elle ne satisfera jamais à l'équation différentio-différentielle. En voicy donc un cas bien étrange, dont je suis curieux de voir si votre solution sera d'accord avec la mienne.

J'ai l'honneur d'être avec la plus parfaite considération,

Monsieur,

Votre très humble et très obéssant serviteur

L. Euler.

Berlin, le 27 Déc. 1748.

VI.

Euler a D'Alembert (1).

(1749)

Monsieur,

J'ai pris la liberté d'envoier par un libraire d'ici à M.r Briasson quelques exemplaires de mon ouvrage *Scientia navalis* (2), qui vient de paroître à Pétersbourg, il n'y a pas longtems, quoique je l'aye déjà presque achevé avant mon départ de ce pays-là (3), et je vous prie d'en retirer un et de le regarder comme une légère marque de reconnoissance que je vous dois. Si cet ouvrage avois paru d'abord j'oserois me flatter que vous y trouveriés plusieurs choses nouvelles; mais à présent que M.r Bouguer a publié son ouvrage sur la même matière (4), il n'y aura plus presque rien, dont vous pourriés être curieux. Mon libraire ici m'a promis de livrer ces exemplaires franco à Paris, de sorte que M.r Briasson ne sera en droit de demander rien en les délivrant aux addresses destinées et en cas qu'on ait ici oublié d'y marquer les addresses, ces lignes suffiront pour prévenir tout scrupule.

Maintenant j'espère de voir bientôt la pièce sur la lune, que vous aurés envoiée à Pétersbourg, et je suis extrêmement impatient de m'éclaircir sur cette importante matière.

---

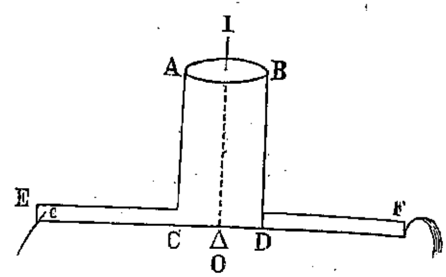
(1) Cette lettre est adressée: « *A Monsieur, Monsieur D'Alembert, Membre des Académies Royales des Sciences de Paris, de Londres et de Prusse à Paris* ».

(2) Saint-Petersbourg 1749, 2 vol. 4°

(3) Euler quitta Petersbourg en 1741; il y revint en 1766.

(4) Traité du Navire: 1746.

Voilà un problème digne de votre attention, et que personne hormi vous ne sera en état de résoudre. ABCD est un tuyau vertical, plein d'eau, mobile autour de son axe IO sur le pivot O. En bas il a deux ou plusieurs bras horizontaux CE, DF, qui sont percés vers leurs extrémités à côté des trous e, par lesquels l'eau coule tout à l'entour, en même sens. La réaction de ces jets d'eau fera donc tourner la machine et la force centrifuge, qui en résulte contribuera à accélérer ce mouvement. Si l'on suppose



qu'une certaine quantité d'eau se dégorge continuellement dans AB, il s'agit de déterminer le mouvement de rotation de cette machine, et quel effet on s'en pourroit attendre en l'appliquant à faire marcher quelque machine. M.r le Prof. Segner, de Gottingue est l'auteur de cette idée et l'ayant fait exécuter en petit, le mouvement devint d'abord extrêmement rapide, ce qui lui a paru promettre de grands secours dans l'hydraulique.

J'ai l'honneur d'être avec la plus parfaite considération,

Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur

L. Euler.