1862

Recherche pour servir à la perfection des lunettes

Leonhard Euler

XXIV.

Recherche pour servir à la perfection des Lunettes.

Section I.

1. Quoique le hazard ait produit la découverte des lunettes, ce n'est qu'à l'aide de la théorie qu'on les puisse porter à leur plus haut degré de perfection, surtout quand on y veut employer plusieurs verres. Puisque deux verres ne sauraient représenter distinctement les objets qu'étant fixés à une certaine distance, la seule expérience suffisait à trouver cette distance, et par le même moyen il n'était pas difficile de découvrir la proportion des deux verres, pour que la représentation devint la plus belle. Mais dès qu'il s'agit de joindre trois ou plusieurs verres, le nombre des combinaisons possibles, tant par rapport à leur éloignement qu'à leur proportion, devient trop grand pour qu'on les puisse essayer toutes et en choisir celle qui produise le meilleur effet; et plus le nombre des verres sera grand, et moins sera-t-on en état de découvrir par la seule expérience la disposition la plus avantageuse. Ce n'est alors que la théorie qui nous y puisse conduire.

2. Or c'est le nombre des verres qui constitue la principale différence entre les lunettes, et partant la première espèce contient les lunettes composées de deux verres, lesquelles étant les plus simples, la seule expérience était suffisante à les porter à leur plus haut degré de perfection. A la seconde espèce je rapporte les lunettes composées de trois verres, dont il y a qu'on a mises en pratique avec bien du succès, après qu'on s'est aperçu, qu'en doublant le verre oculaire, on peut augmenter considérablement le champ apparent. Ensuite la troisième espèce renferme les lunettes composées de quatre verres, dont on ne connaît presque que celles qui, par l'addition de deux verres oculaires aux lunettes communes astronomiques, redressent le renversement des objets. De même les lunettes à cinq verres donneront la quatrième espèce, celles à six la cinquième et ainsi de suite.

3. Comme la première espèce a fourni deux sortes de lunettes, l'une composée d'un verre convexe et d'un concave, et l'autre de deux verres convexes, on comprend que la seconde espèce

plusieurs sortes différentes, la troisième encore davantage et ainsi de suite. Mais il faut examiner quels avantages on puisse retirer de chaque sorte, avant que de les mettre en pratique, il est certain qu'on ferait très mal d'employer plusieurs verres, si l'on pouvait obtenir les mêmes avantages avec un plus petit nombre; non seulement les défauts inévitables dans la construction de chaque verre, allant en multipliant, détruiraient les avantages espérés, mais aussi la seule multitude des verres, en interceptant plusieurs rayons, obscurcirait la représentation des objets. Donc pour juger des avantages qu'on pouvait espérer en employant plusieurs verres, je m'en vais étaler les bonnes qualités qu'on prétend de chaque lunette.

Or les bonnes qualités qu'on exige d'une lunette peuvent être réduites aux quatre articles suivants:

1. Elle doit présenter distinctement les objets.
2. Elle doit présenter clairement les objets.
3. Elle doit grossir les objets.
4. Elle doit découvrir un grand champ.

On n'ajoute pas là condition que la lunette présente les objets debout, puisque la représentation renversée ne trouble point les observations astronomiques que j'ai ici principalement en vue, et pour les objets terrestres l'analyse que je ferai, fournira assez d'espèces qui les représentent debout. Or il n'y a aucun doute que plus une lunette satisfait aux conditions rapportées, plus elle doit être parfaite; il est aussi évident que, si deux lunettes sont d'une bonté égale par rapport à ces conditions, la préférence doit être donnée à celle qui est plus courte et composée d'un moindre nombre de verres. Je m'en vais donc développer plus soigneusement ces 4 conditions et montrer les arrangements que chacune exige séparément.

1. *De la représentation distincte.*

5. Pour rendre la représentation distincte, il faut que tous les rayons qui partent de chaque point de l'objet, soient rassemblés derechef dans un seul point au fond de l'oeil. Cela demande une telle disposition des verres que l'image de l'objet, qui en est représentée, se trouve à une juste distance de l'oeil; car cette image, étant l'objet immédiat de notre vue, il faut qu'elle ne soit ni trop éloignée ni trop proche de l'oeil, ce qui dépend de la nature de l'oeil. Or nonobstant la diversité des yeux, le plus sûr moyen de réussir est d'arranger les verres en sorte que la dernière image, l'objet immédiat de la vue, tombe à une fort grande distance, qu'on puisse regarder comme infinie. Car cette distance est la plus convenable pour ceux qui ont la vue parfaitement bonne, et pour ceux qui ont la vue courte ou pour la plupart des vieillards, ils n'ont qu'à raccourcir ou qu'à allonger la lunette, jusqu'à ce qu'ils la trouvent la plus propre à leur état. Voilà donc la première condition requise pour cet article, qui est, que la dernière image représentée par la lunette tombe à une distance quasi infinie de l'oeil.

6. Mais cela ne suffit pas pour satisfaire au premier article; il faut outre cela prévenir la confusion qui pourrait troubler la représentation des objets. Cette circonstance détermine l'ouverture

qu'on doit donner à chaque verre, car, quelques soins qu'on ait apportés à travailler un verre, on observe toujours que les rayons qui passent vers les bords du verre sont autrement réfractés que ceux qui passent par le milieu et qu'ils ne se réunissent pas parfaitement; pour prévenir cette confusion, on est obligé de rétrécir l'ouverture qu'on donne aux verres tantôt plus, tantôt moins. La figure sphérique qu'on donne ordinairement aux faces des verres n'est pas la plus convenable pour ce dessein et demande un rétrécissement assez considérable. Or, il peut arriver qu'en s'écartant insensiblement de cette figure, le verre puisse souffrir ou une plus grande ou une plus petite ouverture, et dans le premier cas le verre sera d'autant plus excellent, plus il admet une grande ouverture. L'expérience fournira donc le plus sûr moyen, pour connaître la juste ouverture de chaque verre.

7. Cependant en supposant que les faces des verres soyent sphériques et semblables de part et d'autre, on peut donner une règle pour déterminer l'ouverture qui ne produise point une confusion sensible. Cette règle est fondée en partie sur l'expérience et en partie sur la théorie. M. Huygens, ayant remarqué qu'un verre objectif de 30 pieds de foyer pouvait bien souffrir une ouverture de 3 pouces de diamètre; si l'on y joint de la théorie, que le diamètre de l'ouverture suit la raison sous-doublée de la distance du foyer, on en tirera cette règle: Soit la distance de foyer d'un verre quelconque $=p$, le demi-diamètre de l'ouverture $=x$ et qu'on pose $x=\sqrt{ip}$, la quantité i doit être prise de $\frac{1}{150}$ pouce. Si l'on voulait se contenter d'un moindre degré de distinction, on pourrait augmenter la valeur de i; et si l'on demandait encore une plus parfaite distinction, on devrait prendre la valeur de i encore plus petite; c'est pour cette raison que je laisserai la valeur de i indéterminée.

8. Mais outre qu'une petite aberration de la figure sphérique peut admettre une ouverture tantôt plus grande, tantôt plus petite, selon que le hazard tombe, cette règle ne peut pas aussi être suivie pour tous les verres, quoique leurs faces soient sphériques. Car la distance du foyer demeurant la même, la figure des deux faces peut varier à l'infini, et c'est de l'inégalité des faces selon qu'elles sont convexes ou planes ou concaves, que l'ouverture depend beaucoup, et selon que l'une ou l'autre est tournée vers l'objet. On a trouvé que les verres plano-convexes ont à peu près le plus grand avantage à cet égard, quand on tourne la face convexe vers l'objet, et alors on pourra bien mettre $i=\frac{1}{100}$ pouce. Or on suppose ici que l'objet est infiniment éloigné; les distances plus petites demanderaient d'autres règles, qu'il est difficile de déterminer, mais à l'égard de la figure des verres, on peut remarquer que plus l'une ou l'autre face a de courbure, l'ouverture en devient diminuée, et c'est la raison que les ménisques souffrent une beaucoup plus petite ouverture, qui semble suffisante pour les exclure entièrement de la dioptrique.

9. Puisqu'on regarde dans les lunettes la distance des objets comme infinie, il sera toujours avantageux de donner au verre objectif une figure plano-convexe, en tournant la convexité vers l'objet, et la même raison nous porte à donner une figure semblable au dernier verre oculaire qui envoye ses rayons immédiatement dans l'oeil, avec cette différence seulement, que dans ce cas la convexité doit être tournée vers l'oeil. Pour les autres verres intermédiaires, s'il y en a, on n'a pas encore établi des règles assez sûres, pour en déterminer l'ouverture; cependant il est certain

plus le foyer d'un verre est court, plus aussi son ouverture doit être diminuée. Cependant nous verrons qu'ordinairement les rayons, transmis par l'objectif, remplissent sur les autres verres fort petit espace, d'où il n'y a rien à craindre à cause de l'inégalité de la réfraction, et par-là on leur peut laisser une si grande ouverture que leur figure supporte, et, à cet égard, il est indifférent de quelle espèce qu'on prenne le verre oculaire.

10. Il est aussi fort essentiel de considérer ici la confusion qui naît de la diverse réfrangibilité des rayons; car, si l'objet renvoie toutes les espèces de rayons, la confusion sera d'autant plus grande, plus le foyer du verre est éloigné, et elle ne saurait être diminuée par le rétrécissement de l'ouverture. J'ai déjà montré, comment ce défaut pourrait être corrigé par la composition de deux différentes matières transparentes, mais comme cet expédient demande des ménisques d'une grande courbure, leur ouverture se réduit presque à rien, ce qui est un inconvénient presque aussi important, sans compter les difficultés d'exécuter bien ces sortes de verres. Or si l'objet n'est teint que d'une simple couleur et que tous ses rayons souffrent la même réfraction, on peut avec tout succès employer des verres ordinaires, sans craindre de ce côté la moindre confusion, et, par cette raison, je bornerai mes recherches aux verres ordinaires.

De la représentation claire.

11. La clarté est une propriété très essentielle qu'on exige d'une bonne lunette et on a raison de regarder comme fort défectueuses les lunettes qui ne représentent les objets que fort obscurément. La cause d'une telle obscurité est évidemment, que, trop peu des rayons qui partent de chaque point de l'objet, entrent dans l'oeil, lorsque les verres ne sont pas bien polis, la perte de plusieurs rayons qui ne sont pas transmis, causera nécessairement une obscurité; et, quand la lunette est composée de plusieurs verres, quelque polis qu'ils soient, la représentation en doit devenir plus obscure, puisque chaque verre intercepte quelque partie des rayons. On remédiera à ce défaut, en polissant les verres autant qu'il est possible, et en leur donnant aussi peu d'épaisseur que les circonstances le permettent, puisqu'on sait, que, plus un verre est épais, plus il fait périr de rayons dans leur passage; en prenant cette précaution, on n'a pas trop à craindre d'obscurité de ce côté, quand même on employerait plusieurs verres.

12. Mais il faut ici principalement avoir égard à la quantité des rayons qui sont transmis par la lunette dans l'oeil; si le cône lumineux qui passe de chaque point de l'objet par la lunette remplit toute l'ouverture de la pupille, c'est le plus grand degré de clarté que l'on puisse prétendre; car les objets ne paraissent ordinairement obscurs que parceque les rayons qui viennent d'un point de l'objet, ne remplissent pas toute l'ouverture de la pupille. On obtient donc le plus grand degré de clarté, lorsque la section du cône lumineux de chaque point de l'objet, là où il entre dans l'oeil, est égale ou même plus grande que l'ouverture de la pupille; mais, si elle est plus petite, la vision devient nécessairement obscure. Cependant on n'exige pas ordinairement le plus grand degré de clarté, et on est obligé de se contenter, lorsque l'amplitude du cône lumineux qui entre dans l'oeil est deux, trois ou même plusieurs fois plus petite que l'ouverture de la pupille.

13. A l'égard de la clarté c'est donc principalement l'ouverture de la pupille qui doit être tirée en considération. Pour cet effet je poserai dans la suite le demi-diamètre de l'ouverture de la pupille $=\omega$, et il suffira de remarquer que cette quantité ω est ordinairement $\frac{1}{20}$ ou $\frac{1}{25}$ pouce, puisqu'on sait que la pupille est assujettie à de fort grands changements et qu'elle se dilate considérablement dans l'obscurité, tandis qu'une forte lumière la rétrécit. Donc, si le demi-diamètre du cône lumineux, là où il entre dans l'oeil, est égal ou plus grand que ω, on obtient la plus grande clarté possible; mais, si ce demi-diamètre n'est que $\frac{1}{2}\omega$ ou $\frac{1}{3}\omega$, la clarté deviendra 4 ou 9 fois plus petite. J'exprimerai dans la suite par l'unité la plus grande clarté possible, et les autres degrés de clarté que chaque lunette fournit, seront indiqués relativement à cette unité par des fractions, ainsi $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{9}$ marqueront une clarté qui est ou quatre ou neuf fois plus petite que la pleine et plus grande.

14. Cette circonstance sert aussi principalement à déterminer l'endroit le plus propre où il faut placer l'oeil derrière la lunette, pour en recevoir le plus copieusement les rayons. On sait par l'expérience que, pour voir clairement par une lunette de deux verres dont l'oculaire est concave, il y faut approcher l'oeil autant qu'il est possible; mais, si l'oculaire est convexe, l'oeil doit être mis derrière l'oculaire à une distance qui est à peu près égale à la distance de son foyer. Or, il en est de même de toutes les autres espèces de lunettes où il y a toujours un certain endroit pour l'oeil, qui rend la vision la plus claire, et qu'il est fort important de bien déterminer. Cette condition de la clarté met aussi des bornes au grossissement des objets, en déterminant le verre oculaire, dont on peut se servir sans perdre trop de la clarté en agrandissant l'apparition de l'objet, ce que je m'en vais examiner plus soigneusement dans l'article suivant.

3. *Du grossissement des objets.*

15. Plus une lunette grossit les objets, plus elle est estimée parfaite, à moins qu'elle ne soit par là dépouillée des autres propriétés également nécessaires, surtout de la clarté; car, si l'on voulait négliger la clarté, rien ne serait plus aisé que d'augmenter la représentation autant qu'on voudrait. Mais, puisqu'il faut conserver un certain degré de clarté, on verra par la suite que l'augmentation dépend principalement de la longueur de la lunette, de sorte que, la longueur étant donnée, il est impossible de pousser l'augmentation au de là d'un certain degré. Cependant les verres, s'il y en a plusieurs, peuvent souvent être tellement arrangés que, sans déroger aux autres propriétés, la même longueur produise un plus grand grossissement, lequel, quoiqu'il ne soit pas fort considérable, ne laisse pas de mériter une attention particulière, et une lunette qui grossit plus qu'une autre de la même longueur, sans que les autres propriétés en souffrent, est estimée d'autant plus excellente.

16. Or, l'augmentation, produite par la lunette, se détermine par le rapport entre l'angle sous lequel on voit l'objet par la lunette et celui sous lequel on le voit à la vue simple, en supposant la distance de l'objet quasi infinie. Ainsi, p. ex., lorsque nous voyons par la lunette un objet sous un angle de dix degrés que nous voyons à la vue simple sous un angle d'un degré, on

cette lunette grossit dix fois ou que la multiplication de l'objet vaut dix: ce qui doit s'en- du diamètre ou des dimensions linéaires de l'objet; et il est clair que, dans ce cas, la sur- l'objet doit paraître cent fois et la solidité mille fois plus grande. J'employerai dans la lettre m pour marquer combien de fois l'angle visuel par la lunette surpasse celui à la vue donc, m étant la multiplication des dimensions linéaires, la multiplication de la surface sera par le quarré m^2 et celle de la solidité par le cube m^3.

17. A la multiplication de l'objet on peut commodément rapporter la situation sous laquelle aperçoit, si elle est droite ou renversée. Le seul signe du nombre m nous éclaircira sur ce Car, si nous donnons au nombre m, aux cas que l'objet est représenté debout, des valeurs qui marquent l'augmentation de son diamètre apparent, les valeurs négatives de ce nombre donneront à connaître, que les objets sont représentés dans une situation renversée, mais autant augmentés dans leurs diamètres que le nombre m montre. Ainsi la détermination du gros- des objets nous fera voir en même temps si les lunettes nous présentent les objets debout renversés. Au reste, puisqu'il s'agit ici de la multiplication de l'angle visuel et que cet angle, par une lunette quelconque, est toujours fort petit, je prendrai les tangentes de ces angles leurs mesures, de sorte que le nombre m résulte en divisant la tangente de l'angle sous lequel aperçoit l'objet par la lunette, par la tangente de l'angle vu à la vue simple.

4. *De la quantité du champ apparent.*

18. Pour le champ apparent on comprend d'abord, qu'il est fort étroitement lié avec la mul- tiplication, et que, plus celle-ci est grande, plus celui-là doit devenir petit. Car une lunette qui multiplie les angles en raison centuple, ne nous saurait découvrir dans le ciel un angle d'un degré, puisque l'apparition de cet angle devrait être de 100 degrés, ce qui est évidemment impossible effectuer par quelque lunette que ce soit. Il faut donc avoir égard à l'étendue que l'oeil, en par une lunette, peut embrasser, et si cette étendue ne saurait jamais surpasser, p. ex., degrés, il est évident que, posant la multiplication $= m$, il serait impossible que la lunette découvrît dans le ciel un espace plus grand que de $\frac{30}{m}$ degrés, et dans cette hypothèse une qui augmenterait 100 fois les diamètres, ne nous saurait découvrir dans le ciel un espace grand que de $\frac{3}{10}$ degré ou de 18 minutes environ. Mais l'étendue, vue par la lunette que avons supposée ici de 30 degrés, dépend beaucoup de l'arrangement des verres, qui peut être que cette étendue est plus ou moins au-dessous de 30 degrés, et c'est de cette circonstance faut juger de la perfection d'une lunette à l'égard du champ apparent.

19. Je mesurerai le champ apparent qu'une lunette nous découvre par la moitié de son angle sous lequel on le verrait à la vue simple. Ce champ étant un espace circulaire au centre aboutit l'axe de la lunette, le demi-diamètre de ce cercle, divisé par la distance de l'oeil, la mesure du champ apparent; ou bien la tangente du demi-angle visuel, que nous pour- aisément confondre avec l'angle lui-même, vu que ces angles ne deviennent jamais si grands ne puissent être regardés proportionnels à leurs tangentes, et cela d'autant plus qu'il ne

s'agit pas ici d'une précision géométrique. La lettre φ me marquera dans la suite cette moitié du champ apparent, d'où l'on comprend que, pour voir la lune tout entière, il faut que cet angle φ surpasse environ $\frac{1}{4}$ de degré. Ainsi, posant le grossissement $=m$, un espace du ciel qui paraît à la vue simple sous l'angle φ paraîtra par la lunette sous un angle $=m\varphi$, qui sera la moitié de l'étendue vue par la lunette. Une lunette sera donc d'autant plus parfaite, plus cet angle φ sera grand, la clarté et l'augmentation des objets demeurant les mêmes.

20. Cependant il faut bien considérer que tout cet espace qu'une lunette découvre, ne paraît pas par toute son étendue avec le même degré de clarté; les objets qui se trouvent au milieu sont ordinairement représentés avec plus de clarté que ceux qui se trouvent vers les extrémités, où la clarté semble s'évanouir peu à peu. Par cette raison il est fort important de distinguer bien le champ apparent absolu de celui où la même clarté, qui se trouve au milieu, est également répandue; en vertu de cette distinction je remarquerai toujours, si φ exprime le demi-diamètre du champ apparent entier ou seulement celui du champ apparent clair; souvent la différence est très considérable et quelquefois elle se réduit presque à rien, d'où résulte une différence bien remarquable entre les diverses espèces de lunettes. Cependant, quoiqu'un plus grand champ apparent soit une propriété fort importante, il y a pourtant des cas où un petit champ ne serait pas à mépriser, pourvu que les autres conditions soyent bien remplies, comme s'il s'agissait de contempler bien le corps d'une planète ou comète.

Considérations générales sur les lunettes à plusieurs verres.

21. Après avoir donné une idée générale des perfections qu'on exige d'une bonne lunette, je m'en vais considérer en général la combinaison de plusieurs verres, que je supposerai toujours disposés perpendiculairement sur une ligne droite qu'on nomme l'axe de la lunette. Or il faut d'abord commencer par un seul verre, dont il n'entre dans le calcul que sa distance de foyer, et il n'importe de quelle figure soient ses faces, soit égales soit inégales entr'elles, pourvu qu'il représente l'image des objets infiniment éloignés à la même distance derrière lui: car, quoique la diversité de ses faces puisse contribuer à augmenter ou diminuer son ouverture, puisqu'on en peut tenir compte séparément, et qu'il est à propos d'employer toujours un tel verre qui admette la plus grande ouverture, on peut se passer entièrement de cette considération dans la recherche que j'entreprends, et il suffira d'avoir égard à la distance de foyer de chaque verre, qu'on veut employer. Les règles pour trouver cette distance de foyer, en sachant les deux faces du verre, sont assez connues, mais il vaut toujours mieux de la déterminer par l'expérience.

22. Or il y a deux sortes de verres dont on se sert dans la dioptrique: les uns sont nommés convexes, qui représentent l'image des objets infiniment éloignés derrière eux, quoique les plano-convexes et les ménisques produissent aussi cet effet; et les autres, où l'image tombe en avant, sont nommés concaves; pour distinguer ces deux sortes je considérerai la distance de foyer des premiers comme positive, et celle des concaves comme négative; ainsi posant la distance de foyer d'un verre $=p$, tant que cette quantité p sera positive, il faut entendre un verre convexe, qui jette en derrière

distance $= p$, l'image des objets qui sont quasi infiniment éloignés. Or si p est une quantité négative, le verre doit être pris concave. Dans l'un et l'autre cas le demi-diamètre de l'ouverture se détermine par la formule $\sqrt{ip}$, en mettant pour i la $\frac{1}{150}$ d'un pouce environ, lorsque le verre reçoit les rayons immédiatement de l'objet, ou lorsqu'il est objectif: car pour les autres verres, on verra bientôt qu'on leur peut donner autant d'ouverture que leur structure permet, dont le demi-diamètre peut bien égaler la quatrième partie de leur distance de foyer. Cependant pour ne rien décider je le poserai $= np$.

23. **Lemme.** La distance de foyer d'un verre étant donnée, trouver le lieu et la grandeur de l'image qu'elle représente, lorsque l'objet se trouve à une distance donnée devant un verre.

Solution. Que p marque la distance de foyer du verre MN (Fig. 265.), posé sur l'axe PQ, qui passe perpendiculairement par le centre A du verre. Que l'objet se trouve à la distance $AP = a$ devant le verre et qu'on y conçoive une ligne donnée de grandeur $Pp = z$, dont il faut déterminer le lieu et la grandeur Qq représentée par le verre. Or par les principes de dioptrique, on sait que la distance sera $AQ = \frac{ap}{a-p}$, et puisque la continuation de la droite pA, tirée par le bout de l'objet p et le centre du verre A, termine l'image, la grandeur de l'image sera $Qq = \frac{pz}{a-p}$, dont la situation comme elle est représentée dans la figure, est renversée.

24. **Coroll. 1.** Si la distance de l'objet $AP = a$ était infinie, la distance de l'image deviendrait $AQ = p$, ou bien égale à la distance de foyer, tout comme la définition du foyer exige. Mais si la distance de l'objet $AP = a$ était prise égale à la distance de foyer du verre ou $a = p$, l'image Qq s'éloignerait à l'infini et deviendraît aussi infiniment grande. Enfin si la distance de l'objet $AP = a$ était moindre que la distance de foyer du verre, où $a < p$, l'image Qq, à cause de AQ négative, tomberait en avant et de renversée deviendrait droite.

25. **Coroll. 2.** Si le verre MN était concave ou p une quantité négative $= -\pi$, l'image Qq tomberait aussi avant le verre à une distance $= \frac{a\pi}{a+\pi}$ et serait debout. Cette distance deviendra $= \pi$, si l'objet était infiniment éloigné, et plus l'objet serait approché du verre, plus aussi la distance de l'image deviendrait petite et s'évanouiraît enfin entièrement avec celle de l'objet.

26. **Coroll. 3.** Quoique l'objet Pp se trouve toujours naturellement devant le verre, lorsque c'est un objet réel, cependant puisque l'image, présentée par un verre, tient lieu de l'objet à l'égard du verre suivant, il peut arriver que la distance de l'objet $AP = a$ doit être prise négative, et dans ce cas, donnant à a une valeur négative, les mêmes formules fourniront tant le lieu que la grandeur de l'image.

27. **Coroll. 4.** Si nous posons la distance de l'image après le verre $AQ = \alpha$, nous aurons $\alpha = \frac{ap}{a-p}$, d'où nous tirons ou $a = \frac{\alpha p}{\alpha - p}$ ou $p = \frac{a\alpha}{\alpha + a}$. Cette dernière formule nous découvre le verre qu'il faut placer en A, pour que l'image de l'objet Pp soit représentée en Q, et alors la grandeur de l'image sera $Qq = \frac{\alpha z}{a}$.

*

28. **Problème 1.** Autant de verres qu'on voudra étant disposés sur l'axe OZ en A, B, C, D, E (Fig. 266.), devant lesquels se trouve un objet Oo, trouver tant le lieu que la grandeur de toutes les images qui seront représentées par tous ces verres.

Solution. Soient les distances de foyer de chacun des verres, de celui en $A = p$, de celui en $B = q$, en $C = r$, en $D = s$, en $E = t$ etc., et que la distance de l'objet Oo devant le premier verre en A soit $AO = a$, et la hauteur, prise à volonté, $Oo = z$, dont il s'agit de déterminer les images. Soit donc Pp l'image formée par le premier verre, qui, tenant lieu de l'objet à l'égard du second verre B, soit Qq la seconde image, et ainsi de suite Rr la troisième, Ss la quatrième, Tt la cinquième etc., où il faut concevoir que de ces images la première Pp, la troisième Rr, la cinquième Tt etc. sont renversées, et les autres savoir la seconde, la quatrième, la sixième etc. droites. Qu'on pose donc les distances:

$$AP = \alpha, \quad BQ = \beta, \quad CR = \gamma, \quad DS = \delta, \quad ET = \varepsilon,$$

$$BP = b, \quad CQ = c, \quad DR = d, \quad ES = e \quad \text{etc.},$$

et pour la grandeur des images on aura d'abord indépendamment des verres les déterminations suivantes:

$$Pp = \frac{\alpha z}{a}, \quad Qq = \frac{\alpha\beta z}{ab}, \quad Rr = \frac{\alpha\beta\gamma z}{abc}, \quad Ss = \frac{\alpha\beta\gamma\delta z}{abcd} \quad \text{etc.}$$

Or, en tenant compte des verres mêmes, on obtiendra les formules suivantes:

$$p = \frac{\alpha a}{a + \alpha}, \quad q = \frac{\beta b}{b + \beta}, \quad r = \frac{\gamma c}{c + \gamma}, \quad s = \frac{\delta d}{d + \delta}, \quad t = \frac{\varepsilon e}{e + \varepsilon} \quad \text{etc.}$$

Où il faut observer que les distances α, b, β, c, γ, d, δ etc. peuvent souvent devenir négatives, mais puisque les distances entre les verres sont nécessairement positives, savoir:

$$AB = \alpha + b, \quad BC = \beta + c, \quad CD = \gamma + d, \quad DE = \delta + e \quad \text{etc.},$$

ces quantités composées doivent toujours être positives, quoique l'une ou l'autre des parties devienne négative.

29. **Coroll. 1.** Pour appliquer ce problème général aux lunettes, il faut supposer la distance de l'objet $AO = a$ infinie, mais en sorte que $\frac{z}{a}$ devienne une quantité finie qui exprimera le demi-diamètre du champ apparent, lorsque z est pris pour le demi-diamètre de toute l'étendue du ciel qu'on découvre par la lunette. Donc si nous posons $\frac{z}{a} = \varphi$, nous aurons:

$$Pp = \alpha\varphi, \quad Qq = \frac{\alpha\beta}{b}\varphi, \quad Rr = \frac{\alpha\beta\gamma}{bc}\varphi, \quad Ss = \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{bcd}\varphi \quad \text{etc.}$$

et $p = \alpha$, les autres formules demeurent les mêmes.

30. **Coroll. 2.** Mais la condition de la vision distincte exige que la dernière image soit aussi infiniment éloignée. Donc si nous regardons l'image Tt comme la dernière, il faut qu'il soit $ET = \varepsilon = -\infty$ et partant $t = e$. Or la grandeur de cette dernière image étant $Tt = \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{bcd}$

quand elle est regardée à une distance infinie $= -\varepsilon$, elle paraîtra sous un angle dont la tangente $= \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{bcde}\varphi$, et cette apparition sera maintenant droite, puisque l'image Tt était renversée dans la figure.

31. **Coroll. 3.** Dans ce cas donc ce qui paraît à la vue simple sous un angle $= \varphi$, paraîtra par la lunette sous un angle $= \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{bcde}\varphi$, et partant la multiplication sera $m = \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{bcde}$. D'où l'on voit que, si le quatrième verre D était le dernier, on aurait $\delta = -\infty$ et $m = \frac{\alpha\beta\gamma}{bcd}$, la représentation étant maintenant renversée, si cette fraction est positive. Or en chaque cas cette disposition qui montre d'abord le grossissement de la lunette, est suffisante pour rendre la vision distincte.

32. **Coroll. 4.** Puisqu'ici les fractions $\frac{\alpha}{b}$, $\frac{\beta}{c}$, $\frac{\gamma}{d}$ etc. entrent en considération, si nous introduisons de plus les distances des verres, en posant:

$$AB = \alpha + b = A,\quad BC = \beta + c = B,\quad CD = \gamma + d = C,\quad DE = \delta + e = D$$

$$\text{et}\quad \frac{\alpha}{b} = \mathfrak{A},\quad \frac{\beta}{c} = \mathfrak{B},\quad \frac{\gamma}{d} = \mathfrak{C},\quad \frac{\delta}{e} = \mathfrak{D}\ \text{etc.}$$

nous en tirerons $m = \mathfrak{ABCD}$ etc., et

$$\alpha = \frac{\mathfrak{A}A}{1+\mathfrak{A}},\quad \beta = \frac{\mathfrak{B}B}{1+\mathfrak{B}},\quad \gamma = \frac{\mathfrak{C}C}{1+\mathfrak{C}},\quad \delta = \frac{\mathfrak{D}D}{1+\mathfrak{D}}\ \text{etc.}$$

$$b = \frac{A}{1+\mathfrak{A}},\quad c = \frac{B}{1+\mathfrak{B}},\quad d = \frac{C}{1+\mathfrak{C}},\quad e = \frac{D}{1+\mathfrak{D}}\ \text{etc.}$$

Il faut remarquer que si E est le dernier verre, il faut qu'il soit $\mathfrak{E} = -1$, si D était le dernier $\mathfrak{D} = -1$; si C était le dernier, $\mathfrak{C} = -1$, et si B était le dernier, il faudrait qu'il fût $\mathfrak{B} = -1$.

33. **Coroll. 5.** Par ces lettres A, B, C, D etc. et $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ etc., on déterminera les distances de foyer de tous les verres de la manière suivante:

$$p = \alpha = \frac{\mathfrak{A}A}{1+\mathfrak{A}},\quad q = \frac{\mathfrak{B}AB}{(1+\mathfrak{B})A + (1+\mathfrak{A})\mathfrak{B}B},\quad r = \frac{\mathfrak{C}BC}{(1+\mathfrak{C})B + (1+\mathfrak{B})\mathfrak{C}C},$$

$$s = \frac{\mathfrak{D}CD}{(1+\mathfrak{D})C + (1+\mathfrak{C})\mathfrak{D}D},\quad t = \frac{\mathfrak{E}DE}{(1+\mathfrak{E})D + (1+\mathfrak{D})\mathfrak{E}E}\ \text{etc.}$$

Si le verre E était le dernier, à cause de $\mathfrak{E} = -1$ on aurait $t = \frac{D}{1+\mathfrak{D}}$; et dans ce cas on pourra regarder l'oeil comme tenant lieu du verre suivant, et E marquerait sa distance depuis le dernier verre.

34. **Coroll. 6.** Prenant donc pour A, B, C, D etc. des distances quelconques positives et pour $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ etc. des nombres quelconques tant positifs que négatifs, en sorte pourtant que le dernier soit $= -1$, on trouvera des verres convenables à placer dans les points A, B, C etc., pour que la représentation devienne distincte, et on connaîtra d'abord la multiplication ou le grossissement des objets par la formule $m = \mathfrak{ABCDE}$ etc., d'où il est en chaque cas aisé de juger, si la représentation sera droite ou renversée.

35. **Scholie.** Comme ce premier problème contient les fondements pour juger du premier et troisième article, sans qu'il nous mette en état de décider rien sur le second et quatrième article le problème suivant suppléera à ce défaut et fournira tous les principes dont on a besoin pour estimer la bonté de toutes les lunettes, de combien de verres qu'elles soient composées, et pour en choisir celles, qui seront pourvues des plus grands avantages pour chaque cas qu'on aura en vue.

36. **Problème 2.** (Fig. 266.). Les verres étant disposés d'une manière quelconque, comme dans le problème précédent, trouver la forme du cône lumineux qui est transmis par tous les verres de chaque point de l'objet.

Solution. Soit comme auparavant la distance de l'objet devant le premier verre $AO = a$, et qu'on y considère un point quelconque o éloigné de l'axe OZ de la distance $Oo = z$, soient de plus les verres en A, B, C, D, E etc., dont les distances de foyer soient p, q, r, s, t etc., et les images successives de l'objet Oo soient Pp, Qq, Rr, Ss, Tt etc. Nommons aussi les distances

$$AP = \alpha, \quad BQ = \beta, \quad CR = \gamma, \quad DS = \delta, \quad ET = \varepsilon$$
$$BP = b, \quad CQ = c, \quad DR = d, \quad ES = e \quad \text{etc.}$$

et nous avons trouvé:

$$Pp = \frac{\alpha}{a} z, \quad Qq = \frac{\alpha\beta}{ab} z, \quad Rr = \frac{\alpha\beta\gamma}{abc} z, \quad Ss = \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{abcd} z \quad \text{etc.}$$

$$\text{et} \quad p = \frac{\alpha a}{a + \alpha}, \quad q = \frac{\beta b}{b + \beta}, \quad r = \frac{\gamma c}{c + \gamma}, \quad s = \frac{\delta d}{d + \delta}, \quad t = \frac{\varepsilon e}{e + \varepsilon} \quad \text{etc.}$$

Cela posé, si nous nommons le demi-diamètre du premier verre $AM = AN = x$, de sorte que $x = \sqrt{ip}$, il entrera du point o dans la lunette un cône, dont le sommet est en o et le demi-diamètre de la base en $A = x$; après le passage du premier verre, il se réunira au point p et de là il s'élargira jusqu'à la rencontre du second verre en mn; ensuite il sera de nouveau pointu en q et rencontrera le troisième verre par l'espace $m^I n^I$ et ainsi de suite. A moins donc que chaque verre n'ait assez d'ouverture pour recevoir tous les rayons contenus dans ce cône, (?) ne saurait paraître assez clairement par la lunette, d'où l'on voit que du rapport de l'ouverture des verres à ce cône lumineux dépend le jugement tant de la clarté que du champ apparent. Supposons donc que o soit le dernier point de l'objet, d'où tous les rayons qui passent par le premier verre sont transmis par tous les suivants; et pour cet effet, sans avoir égard à l'ouverture des autres verres, cherchons en général sur le plan de chaque verre les points m, n; m^I, n^I; m^{II}, n^{II}; m^{III}, n^{III} etc. Or la considération des triangles semblables nous fournit d'abord les déterminations suivantes:

$$Bm = \frac{(\alpha + b) z}{a} + \frac{bx}{\alpha} \qquad - Bn = \frac{(\alpha + b) z}{a} - \frac{bx}{\alpha}$$

$$Cm^I = \frac{(\beta + c) \alpha z}{ab} + \frac{c}{\beta} Bm \qquad Cn^I = \frac{(\beta + c) \alpha z}{ab} - \frac{c}{\beta} Bn$$

$$Dm^{II} = \frac{(\gamma + d) \alpha\beta z}{abc} + \frac{d}{\gamma} Cm^I \qquad Dn^{II} = \frac{(\gamma + d) \alpha\beta z}{abc} - \frac{d}{\gamma} Cn^I$$

$$Em^{III} = \frac{(\delta + e) \alpha\beta\gamma z}{abcd} + \frac{e}{\delta} Dm^{II} \qquad En^{III} = \frac{(\delta + e) \alpha\beta\gamma z}{abcd} - \frac{e}{\delta} Dn^{II}.$$

nous tirons pour ces limites les valeurs suivantes:

$$\left.\begin{matrix} Bm \\ -Bn \end{matrix}\right\} = \frac{(\alpha+b)z}{a} \pm \frac{bx}{a},$$

$$\left.\begin{matrix} Cm^{I} \\ Cn^{I} \end{matrix}\right\} = \frac{(\beta+c)\,\alpha z}{ab} + \frac{(\alpha+b)\,cz}{a\beta} \pm \frac{bcx}{a\beta},$$

$$\left.\begin{matrix} Dm^{II} \\ Dn^{II} \end{matrix}\right\} = \frac{(\gamma+d)\,\alpha\beta z}{abc} + \frac{(\beta+c)\,\alpha dz}{ab\gamma} + \frac{(\alpha+b)\,cdz}{a\beta\gamma} \pm \frac{bcdx}{a\beta\gamma},$$

$$\left.\begin{matrix} Em^{III} \\ En^{II} \end{matrix}\right\} = \frac{(\delta+e)\,\alpha\beta\gamma z}{abcd} + \frac{(\gamma+d)\,\alpha\beta ez}{abc\delta} + \frac{(\beta+c)\,\alpha dez}{ab\gamma\delta} + \frac{(\alpha+b)\,cdez}{a\beta\gamma\delta} \pm \frac{bcdex}{a\beta\gamma\delta}.$$

Éloignons maintenant l'objet à l'infini et posons $\frac{z}{a} = \varphi$ et encore comme ci-dessus:

$$AB = \alpha + b = A, \quad BC = \beta + c = B, \quad CD = \gamma + d = C, \quad DE = \delta + e = D \quad \text{etc.}$$

$$\frac{\alpha}{b} = \mathfrak{A}, \quad \frac{\beta}{c} = \mathfrak{B}, \quad \frac{\gamma}{d} = \mathfrak{C}, \quad \frac{\delta}{e} = \mathfrak{D}, \quad \frac{\varepsilon}{f} = \mathfrak{E},$$

et ces limites seront exprimées de la manière suivante:

$$\left.\begin{matrix} Bm \\ -Bn \end{matrix}\right\} = A\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}},$$

$$\left.\begin{matrix} Cm^{I} \\ Cn^{I} \end{matrix}\right\} = \mathfrak{A}B\varphi + \frac{A}{\mathfrak{B}}\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}},$$

$$\left.\begin{matrix} Dm^{II} \\ Dn^{II} \end{matrix}\right\} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}C\varphi + \frac{\mathfrak{A}B}{\mathfrak{C}}\varphi + \frac{A}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}},$$

$$\left.\begin{matrix} Em^{III} \\ En^{II} \end{matrix}\right\} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}D\varphi + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}C}{\mathfrak{D}}\varphi + \frac{\mathfrak{A}B}{\mathfrak{C}\mathfrak{D}}\varphi + \frac{A}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}}\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}}.$$

Ayant déterminé les distances de ces limites depuis l'axe OZ, il est aisé d'en conclure l'amplitude du cône lumineux à la rencontre de chaque verre; car on aura:

$$mn = \frac{2x}{\mathfrak{A}}, \quad m^{I}n^{I} = \frac{2x}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}, \quad m^{II}n^{II} = \frac{2x}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}, \quad m^{III}n^{III} = \frac{2x}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}}.$$

37. **Coroll. 1.** Si le point de l'objet est pris sur l'axe en O l'angle φ s'évanouira et les formules trouvées marqueront les limites du cône lumineux, transmis de ce point par la lunette à la rencontre de chaque verre. Or il est évident que dans ce cas l'axe du cône tombe sur l'axe de la lunette, et que les limites Bm, Bn, Cm^{I}, Cn^{I} etc. seront de part et d'autre égaux entr'eux.

38. **Coroll. 2.** Donc si nous supposons qu'il y ait 4 verres en A, B, C, D et que l'oeil soit en E, la base du cône lumineux qui vient du point de milieu O de l'objet aura à la rencontre

de l'oeil en E pour demi-diamètre $Em^{III} = En^{III} = \frac{x}{\mathfrak{ABCD}} = \frac{x}{m}$, puisque nous avons vu que le produit $\mathfrak{ABCD}$ marque le grossissement de l'objet. Donc si $\frac{x}{m}$ est égal ou plus grand que le demi-diamètre de la pupille ω, on verra le milieu de l'objet avec toute la clarté possible; or si $\frac{x}{m}$ est plus petit que ω, la clarté sera moindre en raison $\frac{xx}{mm}$ à $\omega\omega$.

39. **Coroll. 3.** Donc si l'on veut que le milieu de l'objet O soit vu avec la pleine clarté, il faut qu'il soit $\frac{x}{m} =$ ou $> \omega$. Mais puisqu'il serait superflu de rendre $\frac{x}{m} > \omega$, posons $x = m\omega$, d'où l'on connaît le demi-diamètre de l'ouverture du verre objectif en A, pour que le milieu de l'objet paraisse avec la pleine clarté, le grossissement de l'objet étant donné. Or de là on trouve immédiatement la distance de foyer de l'objectif p nécessaire pour cet effet, car, puisque $x = \sqrt{ip}$ et partant $p = \frac{xx}{i}$, on aura $p = \frac{mm\omega\omega}{i}$.

40. **Coroll. 4.** Si l'on voulait se contenter d'un moindre degré de clarté qui fût à la pleine clarté comme 1 à ll, il faudrait mettre $x = \frac{m\omega}{l}$, et de là on tirerait la distance de foyer $p = \frac{mm\omega\omega}{ill}$, qui serait par conséquent autant de fois moindre que la précédente, que la clarté apparente est plus petite que la pleine clarté.

41. **Coroll. 5.** Pour un autre point de l'objet o éloigné du milieu O de l'angle φ, les deux limites de son cône lumineux à la rencontre de l'oeil seront $M\varphi + \frac{x}{m}$ et $M\varphi - \frac{x}{m}$, où M marque, pour abréger, le coëfficient de φ dans les formules trouvées. Donc si l'un et l'autre est moindre que le demi-diamètre de la pupille, le point o sera encore vu avec la pleine clarté, ou en cas que $x < m\omega$ avec la clarté du centre, et si la plus grande limite $M\varphi + \frac{x}{m}$ est précisément égal au demi-diamètre de la pupille ω, on aura le demi-diamètre du champ apparent clair $\varphi = \frac{m\omega - x}{Mm}$.

42. **Coroll. 6.** Mais si la moindre limite $M\varphi - \frac{x}{m}$ est déjà égal au demi-diamètre de la pupille ω, le point o est le dernier qui soit encore visible, et partant, on aura le demi-diamètre du champ apparent tout entier $\varphi = \frac{m\omega + x}{Mm}$. Une partie donc de ce champ autour du centre dont le rayon est $\frac{m\omega - x}{Mm}$, paraîtra avec la pleine clarté, et l'espace annulaire extérieur, dont la largeur est $= \frac{2x}{Mm}$, avec une clarté qui va de plus en plus en diminuant et s'évanouit enfin entièrement au bord extérieur.

43. **Coroll. 7.** (Fig. 267.). Le champ apparent étant un cercle, nous voyons que le demi-diamètre de ce cercle tout entier est $OZ = \frac{m\omega + x}{Mm}$, que je nommerai celui du champ apparent tout entier. Mais il faut distinguer dans cet espace un cercle intérieur, qui paraît partout avec la même clarté, que je nommerai le champ apparent clair, dont le rayon est $OX = \frac{m\omega - x}{Mm}$. On pourra donc concevoir un cercle moyen, que je nommerai le champ apparent moyen, dont le rayon sera $OY = \frac{m\omega}{Mm}$, duquel on aura de part et d'autre $YX = YZ = \frac{x}{Mm}$.

Scholie 1. Voilà donc les principes qui serviront en chaque cas à déterminer tant la ... la représentation que le champ apparent. Or il semble des formules que je viens de ... qu'il pourrait arriver que le champ apparent devînt non seulement très grand, mais aussi ... ce qui devrait arriver lorsque $M = o$, et on verra effectivement qu'il y a des cas, où la ... M peut s'évanouir. Cependant il est certain que le champ apparent ne saurait jamais ... menté au-delà d'une certaine quantité, car il faut bien remarquer que nous avons supposé aux verres intermédiaires une si grande ouverture que le cône lumineux puisse passer par ... donc s'il arrivait que quelque verre ne fût pas assez large pour recevoir les cônes qui ... entrer dans l'oeil, ce serait alors de l'ouverture de ce verre et non plus de la pupille ... faudrait tirer le jugement du champ apparent. Le raisonnement dans ce cas serait tout à fait ... car, posant le demi-diamètre de l'ouverture de ce verre $= v$, et les limites du cône ... qui lui répondent, la plus grande $= M\varphi + \frac{x}{\mu}$ et la plus petite $= M\varphi - \frac{x}{\mu}$, le demi-... du champ apparent entier serait $= \frac{\mu v + x}{M\mu}$, du champ apparent clair $= \frac{\mu v - x}{M\mu}$, et celui du ... apparent moyen $= \frac{v}{M}$. Il faudra donc tirer ces valeurs non seulement de la pupille, mais ... chaque verre intermédiaire entre l'objectif et l'oeil, et les plus petites valeurs qu'on trou-... seront celles qui auront actuellement lieu.

Scholie 2. Il en est aussi de même du jugement de la clarté dont on voit le milieu ... objet: cette clarté ne sera pleine au cas de $\frac{x}{m} = \omega$ ou $\frac{x}{m} > \omega$ que lorsqu'il y aura aussi en ... temps pour chaque verre intermédiaire $\frac{x}{\mu} =$ ou $< v$, pour que tout le cône lumineux, ... du point O, soit transmis par ce verre. Car si, pour quelque verre intermédiaire, il était ... quoiqu'il fût pour l'oeil ou $\frac{x}{m} = \omega$ ou $\frac{x}{m} > \omega$, la clarté ne serait pas pleine, mais ... dans la raison de $\frac{x^2}{\mu^2}$ à v^2; ou bien posant la clarté pleine $= 1$, cette clarté serait $\frac{\mu^2 v^2}{x^2}$. ... puisque ce serait un défaut très essentiel, qui ne viendrait que du trop peu d'ouverture d'un ... intermédiaire, on peut poser pour une règle fixe, que tous les verres intermédiaires ayent tant ... qu'il soit toujours $v > \frac{x}{m}$; et il faut soigneusement exclure tous les cas où cette con-... ne trouverait pas lieu. Cette règle nous fournira donc les principes pour déterminer l'ouver-... de tous les verres intermédiaires, et partant aussi, leurs distances de foyer, d'où une infinité ... imparfaites sera rejetée. J'ai déjà remarqué qu'on peut donner à ces verres autant ... que leur figure permet; ainsi, posant la distance de foyer $= s$, si nous supposons ses ... convexes, le rayon de l'une étant $= f$ et de l'autre $= g$, on aura à peu près $s = \frac{2fg}{f+g}$; ... de plus $f = g$ ou le verre des deux côtés également convexe, pour qu'il devienne susceptible ... plus grande étendue, et nous aurons $s = f$; posons, pour ne pas rendre le verre trop épais, ... comprendre un arc de 45°, et la demi-largeur du verre sera $= s \cdot \sin 22\frac{1}{2}^\circ = 0{,}3826 \cdot s$. ... ouverture doit encore être plus petite, et partant, on pourrait bien mettre le demi-diamètre ... ouverture $v = \frac{1}{3}s$, et sans balancer $v = \frac{1}{4}s$ et, par conséquent, il faut qu'il soit pour chaque verre intermédiaire $s > \frac{4x}{\mu}$. Or le diamètre de la base du cône lumineux sur ce verre étant pour qu'il n'y embrasse un arc de plus de $22\frac{1}{2}^{\circ}$, il faut qu'il soit $\frac{2x}{\mu} < \frac{1}{3}s$, et ainsi la distinction exige qu'il soit $s > \frac{6x}{\mu}$ et partant $v > \frac{3x}{2\mu}$.

Section II.

Recherches sur les lunettes à deux verres.

46. L'objet étant éloigné à l'infini, soient les deux verres en A et B, leurs distances de foyer p et q et que l'oeil soit placé en C. Posons les distances $AB = A$, $BC = B$ et des lettres $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, celle-ci doit être $\mathfrak{B} = -1$ comme la distinction exige, et alors nous aurons:

$$p = \frac{\mathfrak{A}A}{1+\mathfrak{A}} \quad \text{et} \quad q = \frac{A}{1+\mathfrak{A}},$$

et le nombre $\mathfrak{A}$ marquera le grossissement de la lunette; lequel étant positif, l'objet paraîtra renversé; ou droit, si le nombre $\mathfrak{A}$ est négatif. Ensuite, posant le demi-diamètre de l'ouverture du verre objectif $= x$, de sorte que $x = \sqrt{ip}$, et considérant un point de l'objet éloigné de l'axe de l'angle φ, les limites du cône lumineux seront:

$$\text{sur le verre oculaire en } B = A\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}},$$

$$\text{et sur l'oeil en } C = \mathfrak{A}B\varphi - A\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}}.$$

47. Si nous posons le demi-diamètre de la pupille $= \omega$, pour que le milieu de l'objet paraisse avec la pleine clarté, il faut qu'il soit $\frac{x}{\mathfrak{A}} = \omega$ ou bien $x = m\omega$, puisque m marque le grossissement de la lunette; mais comme nous venons de remarquer, il faut que pour le verre en B ou l'oculaire, il soit $q > \frac{6x}{\mathfrak{A}}$ ou bien $q > 6\omega$. Donc puisque ω est environ une ligne ou pouce, on ne saurait jamais employer des verres oculaires dont la distances de foyer soit moindre qu'un demi-pouce, à moins qu'on ne veuille perdre sur la clarté. Mais pour les autres déterminations, il faut considérer deux cas, selon que $\mathfrak{A}$ est un nombre positif ou négatif; car dans le premier cas l'objet sera vu renversé et dans l'autre debout, laquelle différence nous conduit aux deux espèces assez connues des lunettes à deux verres.

1. *Cas des lunettes à deux verres où $\mathfrak{A}$ est un nombre positif.*

48. Ce cas renferme les lunettes qui représentent les objets renversés, et si nous marquons la multiplication par la lettre m, nous aurons $\mathfrak{A} = m$ et partant:

$$p = \frac{mA}{1+m} \quad \text{et} \quad q = \frac{A}{1+m}, \quad \text{donc} \quad p = mq.$$

Ensuite les limites seront: pour le verre oculaire $= A\varphi \pm \frac{x}{m}$,

$$\text{pour l'oeil} = (Bm - A)\,\varphi \pm \frac{x}{m},$$

d'où nous tirons, pour que le milieu de l'objet paraisse avec la pleine clarté, $x = m\omega$, et partant:

$$p = \frac{m^2\omega^2}{i}, \quad \text{donc} \quad q = \frac{m\omega^2}{i},$$

et la distance des deux verres:

$$AB = A = (1 + m)\,q = \frac{m\,(1 + m)\,\omega^2}{i},$$

d'où la lunette est entièrement déterminée pour chaque cas de multiplication et, puisque m est essentiellement un nombre plus grand que l'unité; il n'y a pas à craindre que q devienne $< 6\omega$.

49. Voyons maintenant ce qui regarde le champ apparent, tant clair que moyen et entier, et pour le champ moyen, son demi-diamètre se trouve par les limites de l'oeil $= \frac{\omega}{mB - A}$, il dépend donc principalement du lieu de l'oeil derrière le verre oculaire $BC = B$, qui pourrait être pris en sorte, savoir $B = \frac{A}{m} = \frac{(1+m)\,\omega^2}{i}$, que le champ apparent devient infini. Mais alors il sera déterminé par le verre oculaire, dont le demi-diamètre de l'ouverture étant environ $\frac{1}{4}\,q$ ou en général $= nq$, on trouve de là le demi-diamètre du champ apparent moyen $= \frac{nq}{A} = \frac{n}{m+1}$: qui diffère tant de celui du champ apparent clair que de l'entier de la quantité:

$$\frac{x}{mA} = \frac{\omega}{A} = \frac{i}{m\,(1+m)\,\omega},$$

d'où nous aurons:

$$\text{le demi-diamètre du champ apparent clair} = \frac{n}{m+1} - \frac{i}{m\,(1+m)\,\omega},$$

$$\text{le demi-diamètre du champ apparent entier} = \frac{n}{m+1} + \frac{i}{m\,(1+m)\,\omega}.$$

50. Mais ces déterminations, tirées du verre oculaire, n'ont lieu qu'autant que la position de l'oeil ne donne point de plus petites, ce qui arriverait, si $mB - A$ n'était pas $= o$; car alors à cause de $\frac{x}{m} = \omega$, le champ clair s'évanouirait. Donc pour obtenir ce champ apparent, que nous venons de déterminer, il faut placer l'oeil en sorte en C, que sa distance derrière l'oculaire en B soit $BC = B = \frac{A}{m}$ ou bien $BC = \frac{(1+m)\,\omega^2}{i}$. Voilà donc toutes les déterminations pour une telle lunette qui, en représentant les objets avec toute la clarté possible, les grossit en diamètre autant de fois que le nombre m contient d'unités:

I. La distance de foyer de l'objectif en $A = \frac{m^2\omega^2}{i}$.

II. Le demi-diamètre de son ouverture $x = m\omega$.

III. La distance des verres $AB = A = \frac{m\,(1+m)\,\omega^2}{i}$.

*

IV. La distance de foyer de l'oculaire en B ou $q = \frac{m\omega^2}{i}$.

V. Le demi-diamètre de son ouverture $= nq = \frac{nm\omega^2}{i}$.

VI. La distance de l'oeil derrière l'oculaire $BC = \frac{(1+m)\,\omega^2}{i}$.

VII. Le demi-diamètre du champ clair $= \frac{n}{m+1} - \frac{i}{m\,(1+m)\,\omega}$.

VIII. Le demi-diamètre du champ moyen $= \frac{n}{m+1}$.

IX. Le demi-diamètre du champ entier $= \frac{n}{m+1} + \frac{i}{m\,(1+m)\,\omega}$.

51. Ces déterminations doivent être observées, si l'on veut que la représentation ait toute la clarté possible que nous indiquons par l'unité, laquelle condition exige qu'il soit $x = m\omega$. Mais si l'on voulait se contenter d'un moindre degré de clarté, qui fût $\frac{1}{l^2}$, il suffirait de prendre $x =$ et par conséquent:

$$p = \frac{m^2\omega^2}{il^2} \quad \text{donc} \quad q = \frac{m\omega^2}{il^2} \quad \text{et} \quad A = \frac{m\,(1+m)\,\omega^2}{il^2}.$$

Or pour le champ apparent les limites seront alors:

$$\text{à l'égard de l'oculaire } A\varphi \pm \frac{\omega}{l},$$

$$\text{à l'égard de l'oeil } (mB - A)\,\varphi \pm \frac{\omega}{l}.$$

D'où nous tirons les demi-diamètres du champ apparent

	de l'oculaire:	de l'oeil:
clair	$\frac{nlq - \omega}{lA}$	$\frac{l\omega - \omega}{l\,(mB - A)}$,
moyen	$\frac{nq}{A} = \frac{n}{m+1}$	$\frac{\omega}{mB - A}$,
entier	$\frac{nlq + \omega}{lA}$	$\frac{l\omega + \omega}{l\,(mB - A)}$.

52. Le demi-diamètre du champ apparent clair est donc:

$$\frac{nlq - \omega}{lA} = \frac{n}{m+1} - \frac{il}{m\,(1+m)\,\omega},$$

à moins que $\frac{(l-1)\,\omega}{l\,(mB - A)}$ ne soit plus petit, ce qui arrive, lorsque la distance BC est renfermée entre ces limites:

$$\frac{(m+1)\,\omega^2}{il^2} \pm \frac{(l-1)\,(m+1)\,\omega^2}{l\,(nm\omega - il)}.$$

Et pour que le demi-diamètre du champ moyen soit $= \frac{n}{m+1}$, la distance BC doit être entre ces limites:

$$\frac{(m+1)\,\omega^2}{il^2} \pm \frac{(m+1)\,\omega}{mn},$$

que le demi-diamètre du champ apparent entier soit:

$$\frac{n}{m+1} + \frac{il}{m(m+1)\omega},$$

les limites de la distance BC sont:

$$\frac{(m+1)\omega^2}{il^2} \pm \frac{(l+1)(m+1)\omega^2}{l(nm\omega + il)},$$

On satisfait donc à toutes ces conditions en mettant:

$$BC = \frac{(m+1)\omega^2}{il^2} = \frac{A}{m},$$

d'où l'on voit qu'on aurait pu déduire ce cas de celui de la clarté pleine, si l'on avait supposé le demi-diamètre de la pupille $= \omega$ moindre dans la raison l à 1, ou bien si nous avions mis $\frac{\omega}{l}$ au lieu de ω.

53. De là il est évident que si l'on veut être content d'un moindre degré de clarté, on peut produire la même multiplication par une lunette autant de fois plus courte; ce qui est sans doute un grand avantage; cependant il ne serait pas à propos de perdre trop de la clarté, pour diminuer la longueur de la lunette, la multiplication demeurant la même, ou pour augmenter la multiplication en conservant la même longueur de la lunette. Il y aura un certain milieu, où la compensation de la perte de la clarté par l'augmentation du grossissement sera la plus avantageuse, mais il ne paraît pas que ce milieu puisse être déterminé par la théorie. Or si nous consultons là-dessus les expériences, Mr. Huygens a trouvé que, pour produire une multiplication $= 100$, un verre objectif peut être employé, dont la distance de foyer ne soit plus grande que de 300 pouces.

Posons donc:

$$m = 100 \quad \text{et} \quad p = \frac{10000\,\omega^2}{il^2} = 300,$$

d'où nous tirons:

$$\frac{\omega^2}{l^2} = \frac{300\,i}{10000} = \frac{1}{5000},$$

à cause de:

$$i = \frac{1}{150} \quad \text{donc} \quad \frac{\omega}{l} = \frac{1}{70}.$$

54. Puisque ω est bien $\frac{1}{10}$ pouce, surtout quand l'oeil voit dans l'obscurité, la valeur de l étant ici trouvée $= 7$, cette expérience montre qu'on peut se contenter d'une clarté qui est 50 fois plus petite que celle qu'on apperçoit à la vue simple. Mais il semble que cette expérience est poussée, un peu trop loin et qu'il vaut pour la plupart mieux de se contenter d'une moindre multiplication pour obtenir un plus grand degré de clarté, et peut-être choisira-t-on le milieu le plus convenable, si l'on pose $l = 5$ ou $\frac{\omega}{l} = \frac{1}{50}$, puisqu'alors la clarté sera deux fois plus grande que dans le cas $l = 7$. Cette diminution du nombre l sert aussi à augmenter le champ apparent clair, dont le demi-diamètre a été trouvé $\frac{n}{m+1} - \frac{il}{m(m+1)\omega}$, qui sera d'autant plus grand, plus on diminue le nombre l. Or le champ apparent moyen, dont le demi-diamètre est $= \frac{n}{m+1}$, ne dépend point de ce nombre l.

55. Prenons donc $\frac{\omega}{l} = \frac{1}{50}$, et à cause de $i = \frac{1}{150}$, nous aurons $\frac{\omega}{il} = 3$ et $\frac{\omega^2}{il^2} = \frac{3}{50}$, d'où nous tirons les déterminations suivantes pour une lunette à deux verres convexes, qui augmente les diamètres des objets en raison de m à 1, avec un degré de clarté vingt cinq fois plus petit que celle dont on aperçoit à la vue simple.

I. La distance de foyer d'objectif $p = \frac{3}{50} m^2$ pouces.

II. Le demi-diamètre de son ouverture $x = \frac{1}{50} m$.

III. La distance des verres $AB = A = \frac{3}{50} m(m+1)$.

IV. La distance de foyer de l'oculaire $q = \frac{3}{50} m$.

V. Le demi-diamètre de son ouverture $= \frac{3}{50} mn$.

VI. La distance de l'oeil de l'oculaire $BC = \frac{3}{50}(m+1)$.

VII. Le demi-diamètre du champ moyen $= \frac{n}{m+1}$.

VIII. La différence du clair et entier $= \frac{1}{3m(m+1)}$.

Où il faut remarquer que la valeur de la fraction n est environ $\frac{1}{4}$; or pour ne pas la supposer trop grande, mettons $n = \frac{1}{5}$, et dans cette hypothèse j'ai calculé la table suivante:

Table des lunettes à deux verres convexes,

dans l'hypothèse $i = \frac{1}{150}$, $\frac{\omega}{l} = \frac{1}{50}$ pouce et $n = \frac{1}{5}$, les longueurs étant exprimées en pouces.

Multiplication.	Objectif: distance de foyer.	Objectif: demi-d. de l'ouverture.	Oculaire: distance de foyer.	Oculaire: demi-d. de l'ouverture.	Distance des verres.	Distance de l'oeil.	Demi-diam. du champ apparent moyen.	Différence au champ clair et entier.
m	p	x	q	$\frac{1}{5}q$	AB	BC		
5	1,5	0,1	0,3	0,06	1,8	0,36	1°54′ 33″	38′ 11″
10	6,0	0,2	0,6	0,12	6,6	0,66	1 2 29	10 25
15	13,5	0,3	0,9	0,18	14,4	0,96	0 42 58	4 46
20	24,0	0,4	1,2	0,24	25,2	1,26	0 32 44	2 44
25	37,5	0,5	1,5	0,30	39,0	1,56	0 26 27	1 46
30	54,0	0,6	1,8	0,36	55,8	1,86	0 22 11	1 14
35	73,5	0,7	2.1	0,42	75,6	2,16	0 19 6	0 54
40	96,0	0,8	2,4	0,48	98,4	2,46	0 16 46	0 42
45	121,5	0,9	2,7	0,54	124,2	2,76	0 14 57	0 33
50	150,0	1,0	3,0	0,60	153,0	3,06	0 13 29	0 27
60	216,0	1,2	3,6	0,72	219,6	3,66	0 11 17	0 19
70	294,0	1,4	4,2	0,84	298,2	4,26	0 9 41	0 14
80	384,0	1,6	4,8	0,96	388,8	4,86	0 8 29	0 11
90	486,0	1,8	5,4	1,08	491,4	5,46	0 7 33	0 9
100	600,0	2,0	6,0	1,20	606,0	6,06	0 6 49	0 7
120	864,0	2,4	7,2	1,44	871,2	7,26	0 5 41	0 5
140	1176,0	2,8	8,4	1,68	1184,4	8,46	0 4 53	0 3
160	1536,0	3,2	9,6	1,92	1545,6	9,66	0 4 16	0 2
180	1944,0	3,6	10,8	2,16	1954,8	10,86	0 3 48	0 2
200	2400,0	4,0	12,0	2,40	2412,0	12,06	0 3 25	0 2
225	3037,5	4,5	13,5	2,70	3051,0	13,56	0 3 3	0 1
250	3750,0	5,0	15,0	3,00	3765,0	15,06	0 2 44	0 1
275	4537,5	5,5	16,5	3,30	4554,0	16,56	0 2 29	0 1
300	5400,0	6,0	18,0	3,60	5418,0	18,06	0 2 17	0 1
350	7350,0	7,0	21,0	4,20	7371,0	21,06	0 1 58	0 1
400	9600,0	8,0	24,0	4,80	9624,0	24,06	0 1 43	0 0
450	12150,0	9,0	27,0	5,40	12177,0	27,06	0 1 31	0 0
500	15000,0	10,0	30,0	6,00	15030,0	30,06	0 1 22	0 0

56. Quoique cette table suppose un degré de clarté 25 fois moindre que celui dont on voit le même objet à la vue simple, il est aisé d'en déduire la construction des lunettes qui donnent un plus grand ou un plus petit degré de clarté, comme on jugera à propos en chaque cas. Ainsi si l'objet qu'on veut examiner est fort obscur de sa nature, comme le corps de Saturne ou d'une comète, il sera convenable de perdre sur la multiplication, pour gagner d'autant plus sur la clarté; et pour cet effet, on n'aura qu'à joindre au même verre objectif un plus grand oculaire. Or supposant la distance de foyer de l'objectif $= p$, au lieu de donner à l'oculaire la distance de foyer $= q$ selon la table, si on lui donne λq, la multiplication du diamètre de l'objet sera moindre ..., mais la clarté deviendra λ^2 fois plus grande que si l'on suivait la table. Ainsi dans un tel cas si l'on joignait avec l'objectif de 600 pouces de foyer un oculaire de 12 pouces de foyer, la multiplication ne vaudrait que 50, mais la clarté deviendrait 4 fois plus forte que selon la table.

57. Mais si au contraire l'objet est fort lumineux de soi-même, on pourra bien admettre une plus grande perte sur la clarté pour gagner d'autant plus sur la multiplication. Dans ce cas il sera donc avantageux de joindre avec un objectif donné un plus petit oculaire que la table fournit, pour obtenir une d'autant plus grande multiplication, quoique la clarté en soit diminuée en raison du quarré. Pour de tels objets on pourra bien joindre à l'objectif de 600 pouces de foyer un oculaire de 3 pouces, pour avoir une multiplication de 200, avec une clarté 4 fois plus petite que la table suppose. Ou bien, ce qui revient au même, puisque les mesures dans la table sont exprimées en pouces, sans déterminer à quel pied ils répondent, on prendra ces pouces plus grands, quand on veut avoir une plus grande clarté, et on supposera les mêmes pouces plus petits, quand on veut se contenter d'une moindre clarté; et c'est pour cette raison que je ne détermine pas la véritable quantité de ces pouces.

58. Pour le champ apparent, on voit qu'il dépend d'un côté de la multiplication m et de l'autre côté de l'ouverture de l'oculaire, de sorte que, plus on donne d'ouverture à l'oculaire, le champ apparent moyen devient d'autant plus grand. J'ai supposé dans la table, que le demi-diamètre de l'ouverture de l'oculaire soit la cinquième partie de la distance de foyer: mais si on le pouvait augmenter à la quatrième ou même à la troisième partie, le champ apparent croîtrait dans la raison 4 à 5 ou 3 à 5. Mais en supposant $n = \frac{1}{5}$ comme dans la table, le diamètre du champ apparent est à peu près réciproquement comme la multiplication; ainsi lorsqu'on veut que la lunette nous découvre un certain espace dans le ciel, comme, par exemple, le corps entier de la lune, la multiplication ne saurait être poussée au-delà d'un certain terme, et dans le cas de la lune, on ne la saurait pousser au-delà de 40 ou 45 tout au plus.

59. Lorsque la lunette n'augmente pas beaucoup les objets, la différence entre le champ apparent moyen et l'entier ou le clair, est assez considérable. Ainsi quand la lunette ne multiplie que 10 fois, on aura:

le demi-diamètre du	champ	apparent clair	$0^\circ\,52'$	$4''$
„	„	„ moyen	1 2	29
„	„	„ entier	1 12	54

et partant, une bonne partie du champ apparent paraîtra avec une clarté plus faible que ... mais, dans les grandes multiplications, cette différence devient presque insensible. Or, ... champ apparent, quelque petit qu'il soit, il paraîtra par la lunette sous un angle visuel ... tangente de sa moitié est $=\frac{nm}{m+1}$ ou $=n$ fort à peu près. Donc si $n=\frac{1}{5}$, la moitié de ... visuel sous lequel on voit le champ apparent, sera environ $11^0\,18'$; et s'il était $n=\frac{1}{4}$, cet angle serait $14^0\,2'$ et même $18^0\,26'$, si l'on posait $n=\frac{1}{3}$; dans ce cas l'oeil embrasserait un espace de $36^0\,52'$.

2. *Cas des lunettes à deux verres où $\mathfrak{A}$ est un nombre négatif.*

60. Par ces lunettes les objets sont présentés debout et le nombre $\mathfrak{A}$ marque la multiplication; soit donc $\mathfrak{A}=-m$, nous aurons:

$$p=\frac{mA}{m-1},\quad q=-\frac{A}{m-1}\quad \text{donc}\quad p=-mq,$$

ensuite les limites seront:

$$\text{pour le verre oculaire } =A\varphi\pm\frac{x}{m},$$

$$\text{pour l'oeil en } C=(mB+A)\varphi\pm\frac{x}{m}.$$

Donc, si le milieu de l'objet doit paraître avec une clarté $=\frac{1}{l^2}$, il faut qu'il soit $x=\frac{m\omega}{l}$, et partant $p=\frac{m^2\omega^2}{il^2}$ et $q=-\frac{m\omega^2}{il^2}$, d'où l'on voit que l'oculaire doit être concave. Ensuite ayant $A=-(m-1)q$, la distance des verres sera $AB=A=\frac{m(m-1)\omega^2}{il^2}$, et ainsi toute la lunette sera déterminée; cependant il faut exclure les cas où q ou la quantité $\frac{m\omega^2}{il^2}$ deviendrait plus petite que $\frac{6\omega}{l}$, puisque sans cette condition la représentation ne serait plus distincte. Il faut donc qu'il soit $m>\frac{6il}{\omega}$ ou $m>2$.

61. Pour le champ apparent, il est évident par les limites de l'oeil, qu'il ne saurait devenir plus grand qu'en posant $B=o$, et partant la distance $BC=B$ devant s'évanouir, il faut appliquer l'oeil immédiatement au verre oculaire. De là on aura les demi-diamètres:

$$\text{du champ apparent moyen } =\frac{il^2}{m(m-1)\omega},$$

$$\text{,, ,, clair } =\frac{il(l-1)}{m(m-1)\omega},$$

$$\text{,, ,, entier } =\frac{il(l+1)}{m(m-1)\omega};$$

mais il faut que les limites du verre oculaire ne donnent point des valeurs plus petites. Pour cet effet il faut que l'ouverture du verre oculaire ne soit pas plus petite que la pupille, ou qu'il soit $nq>\omega$; ou bien $nm\omega>il^2$, par conséquent $m>\frac{il^2}{n\omega}$. Donc, posant $n=\frac{1}{5}$; $i=\frac{1}{150}$ pouce, $l=5$ et $\frac{\omega}{l}=\frac{1}{50}$ pouce, on aura $m>\frac{25}{3}$, de sorte que cet inconvénient n'est pas à craindre.

... que la multiplication est plus grande que 8. Mais si $m < \frac{25}{3}$ le champ apparent est moindre ... nous le venons de déterminer, et le demi-diamètre du moyen sera $= \frac{n}{m-1}$, et sa différence ... clair et entier $= \frac{il}{m(m-1)\omega}$.

62. De-là il est clair que, pour les petites multiplications, où $m < 8$, ces lunettes découvrent ... plus grand champ que celles du premier cas, puisque le demi-diamètre du champ moyen est ici $= \frac{n}{m-1}$, au lieu qu'il était pour le premier cas $= \frac{n}{m+1}$; et partant, ces lunettes avec un oculaire concave ont un avantage sur celles qui ont l'oculaire convexe, outre celui que ces lunettes, à cause de $A = \frac{m(m-1)\omega}{il^2}$, sont plus courtes que les premières; sans compter l'intervalle de l'oeil ... qui s'évanouit ici entièrement. Cet avantage s'étend encore plus loin qu'au cas $m = 8$ et subsistant tant que:

$$\frac{il^2}{m(m-1)\omega} > \frac{n}{m+1} \quad \text{ou} \quad \frac{il^2(m+1)}{n\omega} > m^2 - m,$$

d'où nous tirons:

$$m < \frac{il^2}{2n\omega} + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{i^2 l^4}{4n^2\omega^2} + \frac{3il^2}{2n\omega} + \frac{1}{4}\right)}.$$

Donc si $n = \frac{1}{5}$, $l = 5$, $\frac{\omega}{l} = \frac{1}{50}$ et $i = \frac{1}{150}$, puisque $\frac{il^2}{n\omega} = \frac{25}{3}$, l'avantage est du côté de ces lunettes tant que $m < \frac{14 + \sqrt{271}}{3}$ ou $m < 10$. Or si $m > 10$, plus que la lunette doit grossir, plus les lunettes du premier cas auront à leur tour d'avantage sur celles du cas présent.

63. Posant donc, comme auparavant $l = 5$, $n = \frac{1}{5}$, $\frac{\omega}{l} = \frac{1}{50}$ et $i = \frac{1}{150}$ pouce; on aura pour chaque multiplication m les déterminations suivantes:

I. Distance de foyer de l'objectif convexe $p = \frac{m^2\omega^2}{il^2} = \frac{3}{50}m^2$.

II. Demi-diamètre de son ouverture $x = \frac{m\omega}{l} = \frac{1}{50}m$.

III. La distance des deux verres $AB = A = \frac{m(m-1)\omega^2}{il^2} = \frac{3}{50}m(m-1)$.

IV. Distance de foyer de l'oculaire concave $-q = \frac{m\omega^2}{il^2} = \frac{3}{50}m$.

V. Demi-diamètre de son ouverture $= \frac{nm\omega^2}{il^2} = \frac{3}{250}m$.

VI. Distance de l'oeil derrière l'oculaire $= o$.

VII. Demi-diamètre du champ moyen $= \frac{il^2}{m(m-1)\omega} = \frac{5}{3m(m-1)}$.

VIII. La différence au clair et entier $= \frac{il}{m(m-1)\omega} = \frac{1}{3m(m-1)}$.

Mais si $m < 8$, le demi-diamètre du champ moyen est $= \frac{1}{5(m-1)}$. Sur cette hypothèse la table suivante est calculée.

Table des lunettes à deux verres.

L'objectif étant convexe et l'oculaire concave, et les mesures exprimées en pouces.

Multiplication.	Objectif distance de foyer.	demi-d. de l'ouverture.	Oculaire Distance de foyer.	demi-d. de l'ouverture.	Distance des verres.	Demi-diam. du champ apparent moyen.	Différence aux champs clair et entier.
m	p	x	q	$\frac{1}{5}q$	AB		
5	1,5	0,1	0,3	0,06	1,2	2°51′45″	34′21″
10	6,0	0,2	0,6	0,12	5,4	1 3 40	12 44
15	13,5	0,3	0,9	0,18	12,6	0 27 17	5 27
20	24,0	0,4	1,2	0,24	22,8	0 15 5	3 1
25	27,5	0,5	1,5	0,30	36,0	0 9 33	1 55
30	54,0	0,6	1,8	0,36	52,2	0 6 35	1 19
35	73,5	0,7	2,1	0,42	71,4	0 4 49	0 58
40	96,0	0,8	2,4	0,48	93,0	0 3 40	0 44
45	121,5	0,9	2,7	0,54	118,8	0 2 54	0 35
50	150,0	1,0	3,0	0,60	147,0	0 2 20	0 28

64. Je n'ai continué cette table que jusqu'à la multiplication de 50, puisque le champ apparent est déjà si petit qu'on ne saurait plus employer ces lunettes; non seulement une telle lunette qui devrait grossir 50 fois, ne découvrira au ciel qu'un espace de 4′40″, mais l'oeil n'embrassera qu'un angle visuel de 50 fois 4′40″, c'est à dire de 3°53′20″, au lieu que dans les lunettes à deux verres convexes cet angle visuel est de 22°36′. Puis que donc les autres conditions sont les mêmes, il n'est jamais à propos de se servir d'une telle lunette, dès que la multiplication doit surpasser 10, et partant on a raison de donner l'exclusion à toutes les lunettes de cette espèce, dont la longueur surpasse 6 pouces. Mais toutes les fois qu'on ne désire qu'une multiplication au-dessous de 10, les lunettes de cette espèce auront toujours un grand avantage sur celles qui ont l'oculaire convexe, puisqu'elles découvrent pour la même multiplication un plus grand champ, outre qu'elles représentent les objets debout, ce qui est un grand avantage dans les occasions où l'on se sert de cette espèce de lunettes.

Section III.

Recherches sur les lunettes à trois verres.

65. Je supposerai donc les 3 verres en A, B, C, dont les distances de foyer soyent p, q, r et l'oeil placé en D; je nomme les distances $AB = A$, $BC = B$, $CD = C$, et pour les nombres $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ il faut que le troisième $\mathfrak{C} = -1$, d'où nous tirons les distances de foyer des trois verres par § 33.

$$p = \frac{\mathfrak{A}A}{1+\mathfrak{A}}, \qquad q = \frac{\mathfrak{B}AB}{(1+\mathfrak{B})A + (1+\mathfrak{A})\mathfrak{B}B}, \qquad r = \frac{B}{1+\mathfrak{B}}.$$

Or la lunette grossira autant de fois que le nombre $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ contient d'unités, et cela en sorte que

Si le nombre $\mathfrak{AB}$ est positif, la représentation est droite, et renversée, quand il devient négatif. Pour le premier verre en A, qui est toujours nommé l'objectif, le demi-diamètre de l'ouverture étant x, nous avons vu qu'il doit y avoir $x = \sqrt{ip}$ ou $p = \frac{x^2}{i}$; où i marque $\frac{1}{150}$ pouce.

66. Considérons maintenant un point de l'objet, eloigné de l'axe de la lunette de l'angle φ, le cône lumineux, qui est transmis de ce point par la lunette, aura tant sur les deux verres B et C que sur l'oeil les limites suivantes:

Sur le premier oculaire en $B = A\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}}$,

Sur le second oculaire en $C = \mathfrak{A}B\varphi + \frac{A}{\mathfrak{B}}\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{AB}}$,

$$\text{Sur l'oeil en } D = \mathfrak{AB}C\varphi - \mathfrak{A}B\varphi - \frac{A}{\mathfrak{B}}\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{AB}}.$$

Donc le demi-diamètre du cône lumineux qui vient du milieu de l'objet étant à son entrée dans l'oeil $= \frac{x}{\mathfrak{AB}} = \frac{x}{m}$, pour que la clarté dont il est vu soit $= \frac{1}{l^2}$, il faut qu'il soit $\frac{x}{m} = \frac{\omega}{l}$, et partant $x = \frac{m\omega}{l}$, et de plus $p = \frac{m^2\omega^2}{il^2}$; mais afin que les verres en B et C ne rendent point la vision confuse, il faut qu'il soit $q > \frac{6x}{\mathfrak{A}}$ et $r > \frac{6x}{\mathfrak{AB}}$ ou bien $q > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}l}$ et $r > \frac{6\omega}{l}$. La division de ces lunettes en espèces doit être tirée de la nature des nombres $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ selon qu'ils seront positifs ou négatifs, d'où nous aurons 4 espèces à considérer.

I. Cas des lunettes à 3 verres.

Les deux nombres $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ étant positifs.

67. Les lunettes de cette espèce présenteront donc les objets debout, et ayant $\mathfrak{AB} = m$, nous aurons $\mathfrak{B} = \frac{m}{\mathfrak{A}}$; de plus, comme nous avons déjà trouvé la distance de foyer de l'objectif $p = \frac{m^2\omega^2}{il^2}$, nous aurons $A = \frac{(1+\mathfrak{A})p}{\mathfrak{A}}$, et ensuite:

$$q = \frac{\mathfrak{B}Bp}{(1+\mathfrak{B})p + \mathfrak{AB}B} = \frac{mBp}{(m+\mathfrak{A})p + m\mathfrak{A}B} \quad \text{et} \quad r = \frac{\mathfrak{A}B}{m+\mathfrak{A}}.$$

Pour les limites à l'égard de l'oeil il est évident que l'endroit le plus avantageux de l'oeil est derrière le verre C à la distance:

$$CD = C = \frac{B}{\mathfrak{B}} + \frac{A}{\mathfrak{AB}^2} = \frac{\mathfrak{A}B}{m} + \frac{(1+\mathfrak{A})p}{m^2},$$

Or pour le champ apparent moyen, il se tire de l'un des deux oculaires:

$$\varphi = \frac{nq}{A} \quad \text{ou} \quad \varphi = \frac{n\mathfrak{B}r}{A+mB},$$

et la plus petite de ces deux valeurs donnera son demi-diamètre.

68. Substituant pour q, r, et $\mathfrak{B}$ et A les valeurs trouvées, on aura le demi-diamètre du champ apparent moyen:

$$\text{par l'oculaire } B \ldots \varphi = \frac{nm\mathfrak{A}B}{(1+\mathfrak{A})(m+\mathfrak{A})p + m\mathfrak{A}(1+\mathfrak{A})B},$$

$$\text{par l'oculaire } C \ldots \varphi = \frac{nm\mathfrak{A}B}{(1+\mathfrak{A})(m+\mathfrak{A})p + m\mathfrak{A}(m+\mathfrak{A})B}.$$

Il faut donc déterminer les quantités $\mathfrak{A}$ et B en sorte que la plus petite de ces deux valeurs devienne aussi grande qu'il est possible. Or, à l'égard du nombre $\mathfrak{A}$, l'une et l'autre devient un *maximum*, si l'on prend $\mathfrak{A} = \sqrt{\frac{mp}{p+mB}}$, et de là on tire:

$$\text{pour l'oculaire } B \ldots \varphi = \frac{nmB}{(m+1)p + mB + 2\sqrt{mp(p+mB)}},$$

$$\text{pour l'oculaire } C \ldots \varphi = \frac{nmB}{(m+1)p + m^2B + 2\sqrt{mp(p+mB)}},$$

d'où l'on voit que la dernière, à cause de $m > 1$, est toujours la plus petite, et partant ce sera de celle-ci qu'il faut tirer la grandeur du champ apparent.

69. Il s'agit maintenant de déterminer B en sorte que cette valeur de φ devienne la plus grande. Or il est évident qu'elle s'évanouit en posant $B = o$, et qu'elle ne saurait devenir plus grande qu'en prenant $B = \infty$, auquel cas le demi-diamètre du champ apparent moyen sera $= \frac{n}{m}$, qui sera en vérité plus grand que celui des lunettes à deux verres convexes. Mais il faut bien remarquer que toutes les deux distances des verres $AB = A$ et $BC = B$ deviendraient infinies, et partant, une telle lunette ne serait absolument d'aucun usage. Or si l'on prenait $B = p$, auquel cas on aurait:

$$\mathfrak{A} = \sqrt{\frac{m}{1+m}} \quad \text{et} \quad A = \frac{\sqrt{m} + \sqrt{(1+m)}}{\sqrt{m}}p,$$

et partant $A > 2p$, de plus:

$$\mathfrak{B} = \sqrt{m(1+m)} \quad \text{et} \quad C = \frac{p\sqrt{m+1}}{m\sqrt{m}} + \frac{p}{m^2},$$

le demi-diamètre du champ apparent moyen serait:

$$= \frac{nm}{m^2 + m + 1 + 2\sqrt{m(m+1)}},$$

et par conséquent plus petit qu'au cas de deux verres convexes; mais puisque la lunette serait environ trois fois plus longue, pour la même multiplication, toutes les circonstances concourent à rejeter entièrement cette espèce de lunettes.

70. Si, pour raccourcir la lunette, on voulait prendre la distance B plus petite, on tomberait dans l'inconvénient que le champ apparent devînt trop petit, de sorte que les lunettes à deux verres

toujours un grand avantage sur celles-ci, tant par rapport à la longueur qu'au champ apparent. Car posons $B = \frac{p}{m}$ ou $mB = p$ et nous aurons les déterminations suivantes:

I. Distance de foyer de l'objectif en $A = p = \frac{m^2\omega^2}{\mathfrak{A}^2}$.

II. Distance de foyer du premier oculaire en $B = q = \frac{p}{m + \sqrt{2m}}$.

III. Distance de foyer du second oculaire en $C = r = \frac{p}{m + m\sqrt{2m}}$.

IV. Distance des verres $AB = \mathfrak{A} = \frac{\sqrt{m} + \sqrt{2}}{\sqrt{m}}\, p$.

V. Distance des verres $BC = \mathfrak{B} = \frac{1}{m}\, p$.

VI. Distance de l'oeil $CD = \mathfrak{C} = \frac{1 + \sqrt{2m}}{m^2}\, p$.

VII. Demi-diamètre du champ apparent moyen $= \frac{n}{2m + 2\sqrt{2m} + 1} = \frac{n}{(\sqrt{2m} + 1)^2}$.

71. Cette lunette aura donc deux défauts considérables à l'égard des lunettes à deux verres convexes; l'un est que sa longueur, étant:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \frac{m + \sqrt{2m} + 1}{m}\, p,$$

sera plus grande de la partie $\frac{p\sqrt{2}}{\sqrt{m}}$; et l'autre que le demi-diamètre du champ apparent sera plus que deux fois plus petit. Pour en donner un exemple, posons $m = 50$, et nous aurons:

I. La distance de foyer de l'objectif $p = 150$ pouces.

II. La distance de foyer du premier oculaire $q = \frac{5}{2}$.

III. La distance de foyer du second oculaire $r = \frac{3}{11}$.

IV. La distance des verres $AB = \mathfrak{A} = 180$ pouces.

V. La distance des verres $BC = \mathfrak{B} = 3$.

VI. La distance de l'oeil $CD = \mathfrak{C} = \frac{33}{50}$.

VII. Le demi-diamètre du champ apparent moyen $= \frac{n}{121} = 5'41''$, posant $n = \frac{1}{5}$.

72. Or une lunette à deux verres convexes, qui grossit aussi 50 fois, n'est longue que 153 pouces, de sorte que celle-ci est de 30 pouces plus longue, outre que le demi-diamètre du champ moyen est encore moindre que la moitié que dans le cas des deux verres. Donc, puisque les lunettes de cette espèce ne méritent aucune attention, je ne m'arrêterai pas à en calculer une table, semblable à celles que j'ai données pour les lunettes à deux verres. Je passe donc aux autres espèces des lunettes à trois verres, selon que l'une ou l'autre des quantités 𝔄 et 𝔅 est négative ou toutes les deux, où je ne développerai en détail que celles qui ont quelqu'avantage sur les lunettes à deux verres, puisqu'il ne serait pas raisonnable d'employer des lunettes à 3 ou plusieurs

verres, lorsqu'on n'en saurait tirer de plus grands avantages; car, les avantages étant les mêmes, il n'y a nul doute que, moins le nombre des verres est grand et plus sont préférables les lunettes.

II. Cas des lunettes à 3 verres.

Le nombre $\mathfrak{A}$ étant positif et $\mathfrak{B}$ négatif.

73. Cette espèce représentera les objets renversés, et posant la multiplication $= m$, nous n'avons qu'à écrire $-\mathfrak{B}$ pour $\mathfrak{B}$ dans les formules précédentes, pour avoir les distances de foyer

$$p = \frac{\mathfrak{A}A}{1+\mathfrak{A}}; \quad q = \frac{\mathfrak{B}AB}{(\mathfrak{B}-1)A+(1+\mathfrak{A})\mathfrak{B}B} \quad \text{et} \quad r = \frac{B}{1-\mathfrak{B}},$$

d'où l'on voit que, si $\mathfrak{B} < 1$, le dernier verre en C est convexe, ou concave si $\mathfrak{B} > 1$. Ensuite pour les limites nous aurons:

$$\text{sur le premier oculaire en } B = A\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}},$$

$$\text{sur le second oculaire en } C = \left(\mathfrak{A}B - \frac{A}{\mathfrak{B}}\right)\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}},$$

$$\text{sur l'oeil en } D = \left(\mathfrak{A}\mathfrak{B}C + \mathfrak{A}B - \frac{A}{\mathfrak{B}}\right)\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}},$$

car pour ces limites il est indifférent de les prendre affirmatifs ou négatifs, puisqu'ils règnent tout autour de l'ouverture de chaque verre.

74. Nous avons donc d'abord $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = m$ et la distance de foyer de l'objectif A comme toujours $p = \frac{m^2\omega^2}{il^2}$ à cause de $x = \frac{m\omega}{l}$, de sorte que le grossissement avec la clarté détermine l'objectif; ensuite il faut qu'il soit $q > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}l}$ et $r > \frac{6\omega}{l}$, pour que la représentation ne devienne pas confuse. Nous tirerons aussi pour le demi-diamètre du champ apparent moyen les formules suivantes:

$$\text{de l'oculaire } B \ldots \varphi = \frac{nq}{A} = \frac{n\mathfrak{B}B}{(\mathfrak{B}-1)A+(1+\mathfrak{A})\mathfrak{B}B},$$

$$\text{de l'oculaire } C \ldots \varphi = \frac{n\mathfrak{B}r}{mB-A} = \frac{n\mathfrak{B}B}{(1-\mathfrak{B})(mB-A)},$$

$$\text{de l'oeil } D \ldots \varphi = \frac{\mathfrak{B}\omega}{m\mathfrak{B}C+mB-A},$$

dont la plus petite valeur seule aura lieu; et partant, il faut déterminer les quantités $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, A, B en sorte que la plus petite de ces trois valeurs devienne la plus grande qu'il est possible. Or puisque p est déjà déterminé, nous avons encore ces deux égalités $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = m$ et $(1+\mathfrak{A})p = \mathfrak{A}A$.

75. Ces deux égalités nous fournissent $\mathfrak{A} = \frac{m}{\mathfrak{B}}$ et $A = \frac{(m+\mathfrak{B})p}{m}$, et, substituant ces valeurs, le demi-diamètre du champ apparent moyen sera:

I. A l'égard de l'oculaire B . . . . $\varphi = \frac{nm\mathfrak{B}B}{(\mathfrak{B}-1)(m+\mathfrak{B})p + m(m+\mathfrak{B})B}$.

II. A l'égard de l'oculaire C . . . . $\varphi = \frac{nm\mathfrak{B}B}{(\mathfrak{B}-1)(m+\mathfrak{B})p - m^2(\mathfrak{B}-1)B}$.

III. A l'égard de l'oeil D . . . . $\varphi = \frac{m\mathfrak{B}\omega}{m^2\mathfrak{B}C + m^2 B - (m+\mathfrak{B})p}$.

Or il arrive fort heureusement que tant la première formule que la seconde devient un *maximum* au cas $\mathfrak{B}^2 = \frac{m(mB-p)}{p}$, ce qui est sans doute le cas le plus avantageus; et alors, à cause de $mB = (m+\mathfrak{B}^2)p$, on aura pour la place de l'oeil $\varphi = \frac{m\omega}{m^2 C + (\mathfrak{B}-1)p}$, dont la valeur peut être rendue infinie, si $\mathfrak{B} < 1$, prenant $C = \frac{(1-\mathfrak{B})p}{m^2}$.

76. Mais pour mieux juger comment la valeur de ces formules peut être augmentée, posons pour B sa valeur $(1-\mathfrak{B})r$, en remarquant que $(1-\mathfrak{B})r$ ne doit jamais devenir négatif; et nos valeurs seront:

$$\text{I.}\quad \varphi = \frac{nm\mathfrak{B}r}{m(m+\mathfrak{B})r - (m+\mathfrak{B})p} = \frac{nm\mathfrak{B}r}{(m+\mathfrak{B})(mr-p)}.$$

$$\text{II.}\quad \varphi = \frac{nm\mathfrak{B}r}{m^2(1-\mathfrak{B})r - (m+\mathfrak{B})p}.$$

$$\text{III.}\quad \varphi = \frac{m\mathfrak{B}\omega}{m^2\mathfrak{B}C + m^2(1-\mathfrak{B})r - (m+\mathfrak{B})p}.$$

Où l'on voit d'abord que si l'on prenait $\mathfrak{B} > 1$, puisque la valeur de r devrait être négative, la première formule serait bien éloignée de la plus grande valeur dont elle est susceptible, au cas $r = \frac{p}{m}$. Soit donc $\mathfrak{B} < 1$, et la seconde formule sera infinie en posant $r = \frac{(m+\mathfrak{B})p}{m^2(1-\mathfrak{B})}$. Mais si l'on prend $r = \frac{p}{m}$, la seconde formule donne $\varphi = \frac{n}{m+1}$, et si l'on prend $r = \frac{(m+\mathfrak{B})p}{m^2(1-\mathfrak{B})}$, la première donne aussi $\varphi = \frac{n}{m+1}$; et partant dans l'un et l'autre cas le champ apparent serait le même qu'au cas de deux verres convexes.

77. Mais si l'on prend r en sorte que les deux premières formules deviennent égales, ce qui arrive lorsque $r = \frac{2(m+\mathfrak{B})p}{m(2m+\mathfrak{B}-m\mathfrak{B})}$, et alors la première et la seconde formule donne: $\varphi = \frac{2n}{m+1}$, ce qui est sans doute la plus grande valeur qu'on puisse obtenir, car toute autre valeur de r rendrait l'une ou l'autre des deux formules plus petite. Dans ce cas donc la lunette découvrira un champ dont le diamètre est deux fois plus grand que dans les lunettes à deux verres, ce qui est un avantage très considérable. Pour cet effet il faut donc qu'on prenne:

$$r = \frac{2(m+\mathfrak{B})p}{m(2m+\mathfrak{B}-m\mathfrak{B})}, \qquad B = \frac{2(1-\mathfrak{B})(m+\mathfrak{B})p}{m(2m+\mathfrak{B}-m\mathfrak{B})},$$

$$A = \frac{(m+\mathfrak{B})p}{m}, \qquad \mathfrak{A} = \frac{m}{\mathfrak{B}}, \qquad q = \frac{2(m+\mathfrak{B})p}{m(m+1)},$$

et alors le lieu le plus convenable pour l'oeil sera:

$$C = \frac{(m+1)(m+\mathfrak{B})p}{m^2(2m+\mathfrak{B}-m\mathfrak{B})}.$$

78. Il est ici fort remarquable, qu'après avoir rempli toutes les conditions, le nombre $\mathfrak{B}$ demeure encore indéterminé, de sorte qu'on le puisse prendre à volonté, pourvu qu'on ne le prenne plus grand que 1, et toujours le demi-diamètre du champ apparent moyen sera $= \frac{2n}{m+1}$, c'est à dire deux fois plus grand qu'au cas de deux verres convexes. Mais pour que la distinction soit maintenue, il faut faire en sorte qu'il devienne $q > \frac{6\mathfrak{B}\omega}{l}$ et $r > \frac{6\omega}{l}$. Maintenant on voit aussi que rien n'empêche qu'on ne donne à $\mathfrak{B}$ des valeurs négatives, et par ce moyen, on pourra rendre la longueur de la lunette plus petite. Car la longueur entière de la lunette étant:

$$A+B = \frac{(m+1)(m+\mathfrak{B})(1-\mathfrak{B})}{m(2m+\mathfrak{B}-m\mathfrak{B})}p,$$

il est évident qu'elle devient plus petite, en donnant à $\mathfrak{B}$ une valeur négative; mais il faut pourtant que $m+\mathfrak{B}$ demeure une quantité positive, afin que la distance A ne devienne négative. Il vaudra donc la peine d'examiner plus soigneusement ces cas où $\mathfrak{B}$ est tant un nombre positif moindre que 1, que zéro, ce qui est un cas de milieu et qu'un nombre négatif mais moindre que m.

79. Mais puisque le cas des valeurs négatives de $\mathfrak{B}$ nous menerait au troisième cas que je me propose de développer séparément, je m'arrêterai ici aux valeurs positives, dont la plus grande étant $= 1$, nous aurons les déterminations suivantes, pour la multiplication $= m$.

I. Distance de foyer de l'objectif $p = \frac{m^2\omega^2}{il^2}$.

II. Son demi-diamètre d'ouverture $x = \frac{m\omega}{l}$.

III. Distance de foyer du premier oculaire $q = \frac{2}{m}p$.

IV. Distance de foyer du second oculaire $r = \frac{2}{m}p$.

V. Distance des verres en A et B ou $AB = \frac{m+1}{m}p$.

VI. Distance des verres en B et C ou $BC = o$.

VII. Distance de l'oeil en D ou $CD = \frac{m+1}{m^2}p$.

VIII. Demi-diamètre du champ apparent moyen $= \frac{2n}{m+1}$;

où nq et nr marque le demi-diamètre de l'ouverture des verres oculaires. Or il faut que $\frac{2p}{m}$ soit plus grand que $\frac{6\omega}{l}$ ou $m > \frac{3il}{\omega}$, ce qui arrive toujours si $m > 1$.

80. Par rapport à ce cas je remarque que la distance des verres oculaires BC étant $= o$, il revient au cas des lunettes à deux verres convexes, car tant le verre objectif que la distance AB

la même. La différence consiste en ce qu'au lieu d'un oculaire de foyer $\frac{1}{m}p$ on emploie ici deux qui se touchent ensemble, dont la distance de foyer de chacun est double. Or on sait qu'à égard de la réfraction ces deux verres rendent le même service qu'un seul. Or puisque ces deux verres admettent une ouverture deux fois plus grande selon le diamètre, c'est la raison que cette lunette découvre un champ deux fois plus grand. Cet avantage s'étend aussi à trois ou plusieurs verres oculaires immédiatement joints ensemble, par le moyen desquels on pourra augmenter le champ apparent au triple et davantage, pourvu que la distance de foyer de chacun soit la triple ou multiple de celle qu'un seul verre oculaire devrait avoir. Pour cette raison la table donnée ci-dessus pour les lunettes à deux verres convexes servira aussi à construire les lunettes de cette espèce.

81. Mais il faut pourtant remarquer que ce cas ne saurait être exécuté exactement dans la pratique, puisque les verres ont toujours quelqu'épaisseur qui empêche que la distance BC ne peut être réduite absolument à rien. D'ailleurs quoique nous posions $\mathfrak{B}$ plus petit que l'unité, nous obtiendrons point la lunette sensiblement plus courte, ce qui est un avantage souvent assez considérable. Je considérerai donc deux cas, l'un où $\mathfrak{B} = \frac{1}{2}$ et l'autre où $\mathfrak{B} = o$, et pour le premier nous obtiendrons les déterminations suivantes:

I. Distance de foyer de l'objectif $p = \frac{m^2\omega^2}{il^2}$.

II. Son diamètre d'ouverture $x = \frac{m\omega}{l}$.

III. Distance de foyer du premier oculaire $q = \frac{(2m+1)p}{m(m+1)}$.

IV. Distance de foyer du second oculaire $r = \frac{2(2m+1)p}{m(3m+1)}$.

V. Distance des verres A et B ou $AB = \frac{(2m+1)p}{2m}$.

VI. Distance des verres B et C ou $BC = \frac{(2m+1)p}{m(3m+1)}$.

VII. Distance de l'oeil du seconde oculaire $CD = \frac{(m+1)(2m+1)p}{m^2(3m+1)}$.

VIII. Demi-diamètre du champ moyen $= \frac{2n}{m+1}$.

82. Les demi-diamètres de l'ouverture des verres B et C sont ici indiqués par nq et nr, et nous avons vu que la valeur de n peut croître de $\frac{1}{5}$ jusqu'à $\frac{1}{3}$. La longueur entière de cette lunette sera donc $AB + BC = \frac{3(m+1)(2m+1)}{2m(3m+1)}p$, qui est à la précédente comme $6m+3$ à $6m+2$, et partant la lunette ne sera pas sensiblement plus longue qu'au cas précédent, et la distance des deux verres oculaires semble récompenser ce petit excès. D'ailleurs il faut compter la distance de l'oeil encore à la longueur de la lunette et alors pour le cas précédent où $\mathfrak{B} = 1$ cette entière longueur est $AD = \frac{(m+1)^2}{m^2}p$, or dans ce cas $\mathfrak{B} = \frac{1}{2}$, il est $AD = \frac{(m+1)(2m+1)(3m+2)}{2m^2(3m+1)}p$, et celle-là est à celle-ci comme $6m^2+8m+3$ à $6m^2+7m+2$, de sorte que celle-ci est plus petite, quoique la différence soit à peine sensible.

Table des lunettes à trois verres convexes,

dans l'hypothèse $i = \frac{1}{150}$, $\frac{\omega}{l} = \frac{1}{50}$, $n = \frac{1}{5}$ et $\mathfrak{B} = \frac{1}{2}$.

Multiplication.	Objectif distance de foyer.	Objectif demi-d. de l'ouverture.	1r ocul. distance de foyer.	2d ocul. distance de foyer.	Distance de l'object. au 1r ocul.	Distance du 1r ocul. au 2d ocul.	Distance du 2d ocul. à l'oeil.	Demi-diam. du champ app. moyen.
m	p	x	q	r	AB	BC	CD	
5	1,5	0,1	0,55	0,42	1,65	0,21	0,25	3° 49′ 0″
10	6,0	0,2	1,15	0,82	6,30	0,41	0,45	2 4 53
15	13,5	0,3	1,74	1,22	13,95	0,61	0,65	1 25 52
20	24,0	0,4	2,34	1,62	24,60	0,81	0,85	1 5 25
25	37,5	0,5	2,94	2,02	38,25	1,01	1,05	0 52 52
30	54,0	0,6	3,54	2,42	54,90	1,21	1,25	0 44 20
35	73,5	0,7	4,14	2,82	74,55	1,41	1,45	0 38 11
40	96,0	0,8	4,74	3,22	97,20	1,61	1,65	0 33 32
45	121,5	0,9	5,34	3,62	122,85	1,81	1,85	0 29 54
50	150,0	1,0	5,94	4,02	151,50	2,01	2,05	0 26 58
60	216,0	1,2	7,14	4,82	217,80	2,41	2,45	0 22 34
70	294,0	1,4	8,34	5,62	296,10	2,81	2,85	0 19 22
80	384,0	1,6	9,54	6,42	386,40	3,21	3,25	0 16 58
90	486,0	1,8	10,74	7,22	488,70	3,61	3,65	0 15 6
100	600,0	2,0	11,94	8,02	603,00	4,01	4,05	0 13 38
120	864,0	2,4	14,34	9,62	867,60	4,81	4,85	0 11 22
140	1176,0	2,8	16,74	11,22	1180,20	5,61	5,65	0 9 46
160	1536,0	3,2	19,14	12,82	1540,80	6,41	6,45	0 8 32
180	1944,0	3,6	21,54	14,42	1949,40	7,21	7,25	0 7 36
200	2400,0	4,0	23,94	16,02	2406,00	8,01	8,05	0 6 50
225	3037,5	4,5	26,94	18,02	3044,25	9,01	9,05	0 6 6
250	3750,0	5,0	29,94	20,02	3757,50	10,01	10,05	0 5 28
275	4537,5	5,5	32,94	22,02	4545,75	11,01	11,05	0 4 58
300	5400,0	6,0	35,94	24,02	5409,00	12,01	12,05	0 4 34
350	7350,0	7,0	41,94	28,02	7360,50	14,01	14,05	0 3 56
400	9600,0	8,0	47,94	32,02	6912,00	16,01	16,05	0 3 26
450	12150,0	9,0	53,94	36,02	12163,50	18,01	18,05	0 3 2
500	15000,0	10,0	59,94	40,02	15015,00	20,01	20,05	0 2 44

83. Posons pour l'autre cas $\mathfrak{B} = o$ qui constituera quasi la limite entre cette espèce de lunettes et la suivante, et les déterminations pour cette sorte de lunettes seront:

I. Distance de foyer de l'objectif $p = \frac{m^2 \omega^2}{il^2} = \frac{3}{50} m^2$.

II. Demi-diamètre de son ouverture $x = \frac{m\omega}{l} = \frac{1}{50} m$.

III. Distance de foyer du premier oculaire $q = \frac{2p}{m+1}$.

IV. Distance de foyer du second oculaire $r = \frac{p}{m}$.

V. Distance de l'objectif au premier oculaire $AB = p$.

VI. Distance du premier oculaire au second oculaire $BC = \frac{p}{m}$.

VII. Distance du second oculaire à l'oeil $CD = \frac{(m+1)p}{2m^2}$.

VIII. Demi-diamètre du champ apparent moyen $= \frac{2n}{m+1}$.

distinction, il faut outre cela qu'il soit $q > o$ et $r > \frac{6\omega}{l}$, ou bien selon nos déterminations ...ures $r > \frac{6}{50}$, d'où nous tirons $m > 2$ à cause de $r = \frac{3}{50}m$.

84. Le cas des lunettes à 3 verres est très remarquable, puisqu'il ne diffère presque point des lunettes à deux verres convexes, le verre objectif, le dernier oculaire et leur distance ... absolument les mêmes, de sorte qu'il est aisé de changer une lunette à deux verres convexes ... une telle lunette. On n'aura qu'à y ajouter un troisième verre convexe, dont la distance de ... est $= \frac{2p}{m+1}$, précisément au foyer de l'objectif, sans changer la longueur de la lunette. Par ... moyen on conserve d'abord la même multiplication et la même clarté, mais quoique l'addition ... troisième verre ne semble rien changer dans la nature de la lunette, on en retire pourtant ... important avantage, que le diamètre du champ apparent devient deux fois plus grand. Outre ... cette addition du troisième verre produit encore cet effet, qu'il faut approcher l'oeil deux fois ... avantage du dernier oculaire; et à cet égard cette lunette doit être censée un peu plus courte ... si l'on n'employait que deux verres.

III. Cas des lunettes à trois verres.

Le nombre $\mathfrak{A}$ étant négatif et $\mathfrak{B}$ positif.

85. Cette espèce de lunettes représentera encore les objets renversés, et posant la multiplication $= m$, nous n'avons qu'à écrire $-\mathfrak{A}$ au lieu de $+\mathfrak{A}$ dans les formules du premier cas, d'où nous tirons pour les distances de foyer:

$$p = \frac{\mathfrak{A}A}{\mathfrak{A}-1}, \quad q = \frac{\mathfrak{B}AB}{(1+\mathfrak{B})A-(\mathfrak{A}-1)\mathfrak{B}B}, \quad r = \frac{B}{1+\mathfrak{B}},$$

... pour les limites:

du premier oculaire en $B \ldots\ldots A\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}}$,

du second oculaire en $C \ldots\ldots \left(\mathfrak{A}B - \frac{A}{\mathfrak{B}}\right)\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$,

de l'oeil en $D \ldots\ldots \left(\mathfrak{A}\mathfrak{B}C - \mathfrak{A}B + \frac{A}{\mathfrak{B}}\right)\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$.

... nous avons toujours $x = \frac{m\omega}{l}$ et $p = \frac{m^2\omega^2}{il^2}$, et pour rendre la représentation distincte il faut qu'il soit $q > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}l}$ et $r > \frac{6\omega}{l}$.

86. De là nous obtiendrons trois valeurs pour le demi-diamètre du champ apparent moyen:

$$\text{I.} \quad \varphi = \frac{nq}{A} = \frac{n\mathfrak{B}B}{(1+\mathfrak{B})A-(\mathfrak{A}-1)\mathfrak{B}B},$$

$$\text{II.} \quad \varphi = \frac{n\mathfrak{B}r}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}B-A} = \frac{n\mathfrak{B}B}{(1+\mathfrak{B})(\mathfrak{A}\mathfrak{B}B-A)},$$

$$\text{III.} \quad \varphi = \frac{\mathfrak{B}\omega}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2C-\mathfrak{A}\mathfrak{B}B+A},$$

desquelles la plus petite aura lieu; il s'agit donc de rendre la plus petite de ces trois valeurs grande qu'il est possible. Or, puisque p est donné nous avons $A = \frac{(\mathfrak{A}-1)}{\mathfrak{A}} p$, et partant ... ensuite $B = (1+\mathfrak{B}) r$, et partant r positif et $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = m$; d'où nos trois formules deviennent

$$\text{I.} \quad \varphi = \frac{nmr}{(\mathfrak{A}-1)(p-mr)},$$

$$\text{II.} \quad \varphi = \frac{nmr}{m(\mathfrak{A}+m)r-(\mathfrak{A}-1)p},$$

$$\text{III.} \quad \varphi = \frac{m\omega}{m^2C - m(\mathfrak{A}+m)r + (\mathfrak{A}-1)p}.$$

87. Puisque chacune de ces trois valeurs peut devenir infinie, voyons les valeurs qui en résultent pour les autres; ainsi, posant $mr = p$, on aura la première infinie et:

$$\text{II.} \quad \varphi = \frac{n}{m+1} \quad \text{et} \quad \text{III.} \quad \varphi = \frac{m\omega}{m^2C-(m+1)p}.$$

Or, posant $mr = \frac{\mathfrak{A}-1}{\mathfrak{A}+m} p$, la seconde devient infinie, et I. $\varphi = \frac{n}{m+1}$ et III. $\varphi = \frac{\omega}{mC}$. Et partant si l'on donne à mr une valeur moyenne entre p et $\frac{\mathfrak{A}-1}{\mathfrak{A}+m} p$, tant la première que la seconde obtiendra une valeur moyenne entre ∞ et $\frac{n}{m+1}$, d'où l'on comprend que le cas le plus favorable sera celui où la seconde et la première valeur de φ deviennent égales, ce qui arrive si $(\mathfrak{A}-1)p - m(\mathfrak{A}-1)r = m(\mathfrak{A}+m)r - (\mathfrak{A}-1)p$, ou bien si $mr = \frac{2(\mathfrak{A}-1)p}{m-1+2\mathfrak{A}}$.

88. Posons donc $mr = \frac{2(\mathfrak{A}-1)p}{m-1+2\mathfrak{A}}$, et nos trois valeurs du demi-diamètre du champ apparent moyen seront: la première et la seconde $\varphi = \frac{2n}{m+1}$,

$$\text{et la troisième} \quad \varphi = \frac{m\omega(m-1+2\mathfrak{A})}{m^2C(m-1+2\mathfrak{A})-(\mathfrak{A}-1)(m+1)p},$$

et partant dans ce cas on gagne sans doute le plus grand champ apparent, pourvu qu'on ne prenne la distance de l'oeil C en sorte que la dernière valeur de φ, ne devienne pas plus petite que $\frac{2n}{m+1}$; or la place la plus avantageuse sera en prenant: $C = \frac{(\mathfrak{A}-1)(m+1)p}{m^2(m-1+2\mathfrak{A})}$, où la dernière valeur devient même infinie. Voilà donc encore une espèce de lunettes qui découvrent un champ presque deux fois plus grand que les lunettes à deux verres convexes, ce qui est le plus haut point de perfection auquel on peut porter les lunettes à trois verres. Je dis que ce champ devient presque deux fois plus grand, puisque c'est proprement la tangente du demi-diamètre du champ apparent moyen qui devient double, et non pas l'angle même.

89. La valeur du nombre $\mathfrak{A}$ demeure encore arbitraire, et substituant les valeurs déjà déterminées, nous trouverons les déterminations suivantes pour la multiplication donnée m:

I. Distance de foyer de l'objectif $p = \frac{m^2 \omega^2}{il^2}$.

II. Demi-diamètre de son ouverture $x = \frac{m\omega}{l}$.

III. Distance de foyer du premier oculaire $q = \frac{2(\mathfrak{A} - 1)p}{(m + 1)\mathfrak{A}}$.

IV. Distance de foyer du second oculaire $r = \frac{2(\mathfrak{A} - 1)p}{m(m - 1 + 2\mathfrak{A})}$.

V. Distance de l'objectif au premier oculaire $AB = \frac{(\mathfrak{A} - 1)p}{\mathfrak{A}}$.

VI. Distance du premier oculaire au second oculaire $BC = \frac{2(\mathfrak{A} - 1)(m + \mathfrak{A})p}{m\mathfrak{A}(m - 1 + 2\mathfrak{A})}$.

VII. Distance du seconde oculaire à l'oeil $CD = \frac{(\mathfrak{A} - 1)(m + 1)p}{m^2(m - 1 + 2\mathfrak{A})}$.

VIII. Demi-diamètre du champ apparent moyen $= \frac{2n}{m + 1}$,

où mq et nr marquent les demi-diamètres de l'ouverture des deux verres oculaires.

90. Puisque le nombre $\mathfrak{A}$ est permis à notre volonté, il est évident qu'on le pourrait, prendre et que la longueur de la lunette devient aussi courte qu'on voudrait et qu'elle s'évanouit même, ce qui arriverait au cas $\mathfrak{A} = 1$. Mais en donnant à $\mathfrak{A} - 1$ une trop petite valeur, on tomberait dans l'inconvénient qu'il ne serait plus $q = \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}l}$ et $r > \frac{6\omega}{l}$; c'est donc en remplissant ces conditions qu'on doit procurer à la lunette la plus petite longueur. Or en supposant $\frac{\omega}{l} = \frac{1}{50}$ pouce à cause de $p = \frac{3}{50}m^2$ pouces, ces conditions demandent qu'il soit:

$$m(\mathfrak{A} - 1) > m + 1 \quad \text{et} \quad m(\mathfrak{A} - 1) > m - 1 + 2\mathfrak{A},$$

ou bien

$$\mathfrak{A} > \frac{2m + 1}{m} \quad \text{et} \quad \mathfrak{A} > \frac{2m - 1}{m - 2},$$

et puisque la dernière est plus grande que la première, il faut de toute nécessité prendre $\mathfrak{A} > \frac{2m - 1}{m - 2}$.

91. Donc la plus petite longueur qu'on puisse convenablement donner à la lunette résulte en posant $\mathfrak{A} = \frac{2m - 1}{m - 2}$, d'où nous trouverons les déterminations suivantes:

I. Distance de foyer de l'objectif $p = \frac{m^2\omega^2}{il^2} = \frac{3}{50}m^2$ pouces.

II. Demi-diamètre de son ouverture $x = \frac{m\omega}{l} = \frac{1}{50}m$ pouces.

III. Distance de foyer du premier oculaire $q = \frac{2p}{2m - 1} = \frac{6}{50}\frac{m^2}{2m - 1}$ pouces.

IV. Distance de foyer du second oculaire $r = \frac{2p}{m^2} = \frac{6}{50}$ pouce.

V. Distance de l'objectif au premier oculair $AB = \frac{(m + 1)p}{2m - 1} = \frac{3}{50}\frac{m^2(m + 1)}{2m - 1}$.

VI. Distance du premier oculaire au second oculaire $BC = \frac{2(m^2 - 1)p}{m^2(2m - 1)} = \frac{6}{50}\frac{m^2 - 1}{2m - 1}$.

VII. Distance du second oculaire à l'oeil $CD = \frac{(m + 1)p}{m^3} = \frac{3}{50}\frac{m + 1}{m}$.

VIII. Demi-diamètre du champ apparent moyen $= \frac{2n}{m+1} = \frac{2}{5(m+1)}$, en supposant comme ci-dessus $n = \frac{1}{5}$. Par ce moyen la longueur de la lunette devient:

$$AC = \frac{m^3+3m^2-2}{m^2(2m-1)}\, p = \frac{3}{50}\; \frac{m^3+3m^2-2}{2m-1},$$

et partant presque deux fois plus courte qu'aux cas de deux verres convexes.

92. C'est ici sans doute qu'il faut chercher le plus grand avantage des lunettes à 3 verres qui consiste en deux conditions, dont l'une et l'autre est de la dernière importance. Car, par l'addition d'un troisième verre, on obtient non seulement cet avantage que le champ apparent est doublé en diamètre et partant quadruplé dans toute son étendue, mais aussi on en peut tirer cet avantage que la longueur de la lunette se réduit presqu'à la moitié que si l'on ne voulait employer que deux verres, la multiplication et la clarté demeurant les mêmes. Pour le verre objectif, il demeure toujours le même, étant determiné par la multiplication et le degré de clarté qu'on désire; le premier oculaire est presque le même que celui qu'il faut employer au cas de deux verres convexes, mais le second a toujours $\frac{6}{50}$ pouce pour distance de foyer, quelque grande que soit la multiplication.

Table des lunettes à 3 verres convexes, qui semblent les plus parfaites dans leur espèce, dans l'hypothèse $i = \frac{1}{150}$, $\frac{\omega}{i} = \frac{1}{50}$, $n = \frac{1}{5}$ et $\mathfrak{A} = \frac{2m-1}{m-2}$, les mesures étant exprimées en pouces.

Multi-plica-tion.	Objectif distance de foyer.	Objectif demi-d. de l'ou-verture.	1r ocul. distance de foyer.	2d ocul. distance de foyer.	Distance de l'object. au 1r ocul.	Distance du 1r ocul. au 2d ocul.	Distance du 2d ocul. à l'oeil.	Demi-diam. du champ app. moyen.
m	p	x	q	r	AB	BC	CD	
5	1,5	0,1	0,33	0,12	1,00	0,33	0,07	3° 48′ 51″
10	6,0	0,2	0,63	0,12	3,47	0,63	0,07	2 4 47
15	13,5	0,3	0,93	0,12	7,45	0,93	0,06	1 25 48
20	24,0	0,4	1,23	0,12	12,93	1,23	0,06	1 5 22
25	37,5	0,5	1,53	0,12	19,89	1,53	0,06	0 52 51
30	54,0	0,6	1,83	0,12	28,38	1,83	0,06	0 44 20
35	73,5	0,7	2,13	0,12	38,34	2,13	0,06	0 38 11
40	96,0	0,8	2,43	0,12	49,83	2,43	0,06	0 33 32
45	121,5	0,9	2,73	0,12	62,79	2,73	0,06	0 29 54
50	150,0	1,0	3,03	0,12	77,28	3,03	0,06	0 26 58
60	216,0	1,2	3,63	0,12	110,73	3,63	0,06	0 22 34
70	294,0	1,4	4,23	0,12	150,18	4,23	0,06	0 19 22
80	384,0	1,6	4,83	0,12	195,63	4,83	0,06	0 16 58
90	486,0	1,8	5,43	0,12	247,08	5,43	0,06	0 15 6
100	600,0	2,0	6,03	0,12	304,53	6,03	0,06	0 13 38
120	864,0	2,4	7,23	0,12	437,43	7,23	0,06	0 11 22
140	1176,0	2,8	8,43	0,12	594,33	8,43	0,06	0 9 46
160	1536,0	3,2	9,63	0,12	775,23	9,63	0,06	0 8 32
180	1944,0	3,6	10,83	0,12	980,13	10,83	0,06	0 7 36
200	2400,0	4,0	12,03	0,12	1209,03	12,03	0,06	0 6 50
225	3037,5	4,5	13,53	0,12	1528,89	13,53	0,06	0 6 6
250	3750,0	5,0	15,03	0,12	1886,28	15,03	0,06	0 5 28
275	4537,5	5,5	16,53	0,12	2281,14	16,53	0,06	0 4 58
300	5400,0	6,0	18,03	0,12	2713,53	18,03	0,06	0 4 34
350	7350,0	7,0	21,03	0,12	3690,78	21,03	0,06	0 3 56
400	9600,0	8,0	24,03	0,12	4818,03	24,03	0,06	0 3 26
450	12150,0	9,0	27,03	0,12	6095,28	27,03	0,06	0 3 2
500	15000,0	10,0	30,03	0,12	7522,53	30,03	0,06	0 2 44

IV. Cas des lunettes à trois verres,

tous les deux nombres $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ étant négatifs.

93. Cette espèce représentera donc les objets debout, comme la première, et mettant $-\mathfrak{A}$, $-\mathfrak{B}$ pour $+\mathfrak{A}$, $+\mathfrak{B}$, nous aurons:

$$p = \frac{\mathfrak{A}A}{\mathfrak{A}-1}, \quad q = \frac{\mathfrak{B}AB}{(\mathfrak{B}-1)A-(\mathfrak{A}-1)\mathfrak{B}B}, \quad r = \frac{B}{1-\mathfrak{B}},$$

et les limites:

sur le premier oculaire en B . . . . $A\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}}$,

sur le second oculaire en C . . . . $\left(\mathfrak{A}B + \frac{A}{\mathfrak{B}}\right)\varphi \pm \frac{x}{m}$,

sur l'oeil en D . . . . $\left(\mathfrak{A}\mathfrak{B}C + \mathfrak{A}B + \frac{A}{\mathfrak{B}}\right)\varphi \pm \frac{x}{m}$.

Dans ce cas donc le lieu le plus convenable pour l'oeil est immédiatement derrière le second oculaire en C, de sorte qu'il faut prendre la distance $CD = o$. Ensuite ayant toujours:

$$x = \frac{m\omega}{l} \quad \text{et} \quad p = \frac{m^2\omega^2}{il^2},$$

on doit observer ces conditions:

$$q > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}l} \quad \text{et} \quad r > \frac{6\omega}{l}.$$

94. De là nous tirons pour le demi-diamètre du champ apparent moyen les trois valeurs suivantes:

$$\text{I.} \quad \varphi = \frac{nq}{A} = \frac{n\mathfrak{B}B}{(\mathfrak{B}-1)A-(\mathfrak{A}-1)\mathfrak{B}B},$$

$$\text{II.} \quad \varphi = \frac{n\mathfrak{B}r}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}B+A} = \frac{n\mathfrak{B}B}{(1-\mathfrak{B})(A+\mathfrak{A}\mathfrak{B}B)},$$

$$\text{III.} \quad \varphi = \frac{\mathfrak{B}\omega}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}B+A},$$

d'où l'on voit que nr ne doit pas être plus petit que ω, afin que le second oculaire ne diminue point le champ que l'oeil admettrait sans cela. Donc si nous supposons $\omega = \frac{1}{10}$ et $n = \frac{1}{4}$, cette condition demande qu'il soit $\frac{1}{4}r > \frac{1}{10}$, et partant $r > \frac{4}{10}$; laquelle renferme par conséquent déjà celle qui exige $r > \frac{6\omega}{l}$ ou $r > \frac{6}{50}$ pouce. Cela observé, à cause de $A = \frac{(\mathfrak{A}-1)p}{\mathfrak{A}}$, $B = (1-\mathfrak{B})r$ et $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = m$, nous aurons ces deux valeurs:

$$\text{I.} \quad \varphi = \frac{nm(1-\mathfrak{B})r}{(\mathfrak{B}-1)(\mathfrak{A}-1)p - m(\mathfrak{A}-1)(1-\mathfrak{B})r} = -\frac{nmr}{(\mathfrak{A}-1)(p+mr)},$$

$$\text{III.} \quad \varphi = \frac{m(1-\mathfrak{B})\omega}{(1-\mathfrak{B})(\mathfrak{A}-1)p + m(\mathfrak{A}-m)(1-\mathfrak{B})r} = \frac{m\omega}{(\mathfrak{A}-1)p - m(m-\mathfrak{A})r}.$$

95. Puisque A et B sont nécessairement des quantités positives, il faut qu'il soit $\mathfrak{A} > 1$ $(1 - \mathfrak{B})r > o$. Donc si le second oculaire est convexe ou $r > o$, il faut qu'il soit $\mathfrak{B} < 1$ partant $\mathfrak{A} > m$, et dans ce cas nos deux valeurs de φ seront:

$$\text{I.} \quad \varphi = -\frac{nmr}{(\mathfrak{A}-1)(p+mr)} \quad \text{et} \quad \text{III.} \quad \varphi = \frac{m\omega}{(\mathfrak{A}-1)p + m(\mathfrak{A}-m)r},$$

dont la première, qui est la plus petite si $nr = \omega$, sera celle qui determine le champ apparent. Puis qu'il convient donc de rendre $\mathfrak{A} - 1$ si petit qu'il est possible, soit $\mathfrak{A} = m$ et à cause de $\mathfrak{B} = 1$ il sera $B = o$, d'où l'on tire $q = \frac{\mathfrak{B}pr}{p+mr}$, de sorte que le premier oculaire doit être concave, ou pour ce cas $q = -\frac{pr}{p+mr}$, et le demi-diamètre du champ apparent moyen sera $= \frac{nmr}{(m-1)(p+mr)}$ qui devient d'autant plus grand, plus on augmente r. Mais puisque $nr = \omega$, il sera $= \frac{nm\omega}{(m-1)(np+m\omega)}$ et partant plus petit que si l'on employait seulement deux verres.

96. Mais si nr est plus grand que ω, il peut arriver que l'autre valeur de φ soit la plus petite, savoir si $r = \frac{\omega p}{np - m\omega}$, et alors celle-ci aura lieu qui sera $\varphi = \frac{m\omega}{(m-1)p} = \frac{[illegible]}{m(m-1)\omega}$ tout comme dans le cas de deux verres dont l'oculaire est concave. Or si l'on prend $\mathfrak{A} > m$ le champ apparent devient encore plus petit, de sorte que ce cas ne fournisse aucune lunette qui vaille mieux que celles à deux verres. Examinons donc l'autre cas où l'oculaire est concave et posons pour cet effet $r = -\varrho$ et à cause de $B = (\mathfrak{B} - 1)\varrho$, nous aurons $\mathfrak{B} > 1$ et $\mathfrak{A} < m$, d'où nos deux formules pour φ seront:

$$\text{I.} \quad \varphi = \frac{nm\varrho}{(\mathfrak{A}-1)(p-m\varrho)}, \qquad \text{III.} \quad \varphi = \frac{m\omega}{(\mathfrak{A}-1)p + m(m-\mathfrak{A})\varrho},$$

dont la dernière est la plus petite, à moins que $m\varrho$ ne surpasse beaucoup p. Cependant on ne saurait en aucune manière obtenir un plus grand champ apparent qu'au cas de deux verres.

97. Puisqu'il serait mal à propos de se servir de lunettes à 3 verres, si l'on n'en pouvait retirer aucun avantage sur celles à deux verres, je ne m'arrêterai pas à développer davantage ce dernier cas, comme ne fournissant aucune lunette qui mériterait la moindre attention, surtout après avoir découvert une si excellente espèce de lunettes à 3 verres, qui ont un double avantage, tant par rapport au champ apparent qu'à la longueur entière de la lunette. Car, quand l'effet répondra au calcul, comme on n'en saurait douter, les avantages ne manqueront pas de devenir très considérables. Si une lunette à deux verres de 6 pieds de longueur a été suffisante pour observer les éclipses des satellites de Jupiter, on pourra faire les mêmes observations par le moyen d'une lunette de trois pieds à peu près, ce qui rendra peut-être ces observations possibles en mer, car non seulement la moindre longueur est propre à ce dessein, mais puisqu'une telle lunette découvre un champ quatre fois plus grand, cela doit faciliter considérablement son usage en mer, puisqu'il est d'autant plus facile de conserver une étoile dans la lunette et de la retrouver quand on l'aura perdue.

98. Ces mêmes avantages deviennent surtout fort importants à l'égard des objectifs d'une fort grande distance de foyer qui en rend l'usage extrêmement difficile. Car dès qu'un tel verre a deux cents pieds de foyer ou davantage, quelqu'excellent qu'il soit d'ailleurs, il y faut presqu'entièrement renoncer, vu qu'on ne saurait manier une si grande longueur, et quoiqu'on y eût réussi, le fruit en serait toujours fort petit pour l'astronomie à cause de la rapidité du mouvement dont on verrait passer les étoiles par la lunette. Or, employant le même objectif pour une telle lunette à trois verres, on gagne d'abord sur la longueur presque la moitié, ce qui doit rendre la manoeuvre beaucoup plus aisée, et quoiqu'elle grossit également, le plus grand champ apparent qu'elle découvre diminue fort l'incommodité que la rapidité du mouvement cause. Mais il sera important de pousser ces recherches plus loin, pour voir si, en employant plusieurs verres, on pourrait encore davantage raccourcir la longueur de la lunette et en augmenter en même temps le champ apparent.

Section IV.

Recherches sur les lunettes à quatre verres.

99. Que les quatre verres soyent en A, B, C, D, leurs distances de foyer p, q, r, s et l'oeil en E. Posant les distances $AB = A$, $BC = B$, $CD = C$ et $DE = D$, il faut qu'il soit $\mathfrak{D} = -1$, d'où nous aurons les distances de foyer:

$$p = \frac{\mathfrak{A}A}{1+\mathfrak{A}}, \quad q = \frac{\mathfrak{B}AB}{(1+\mathfrak{B})A + (1+\mathfrak{A})\mathfrak{B}B}, \quad r = \frac{\mathfrak{C}BC}{(1+\mathfrak{C})B + (1+\mathfrak{B})\mathfrak{C}C}, \quad s = \frac{C}{1+\mathfrak{C}};$$

posons pour abréger:

$$A = \frac{1+\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}} P, \quad B = \frac{1+\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}} Q, \quad C = \frac{1+\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}} R,$$

afin que nous ayons:

$$p = P, \quad q = \frac{PQ}{P+\mathfrak{A}Q}, \quad r = \frac{QR}{Q+\mathfrak{B}R}, \quad s = \frac{R}{\mathfrak{C}},$$

où il faut remarquer que les quantités A, B, C, D doivent toujours être positives. Or posant la multiplication $= m$, nous avons vu qu'il doit être toujours $x = \frac{m\omega}{l}$ et $p = P = \frac{m^2\omega^2}{ll^2}$, de sorte que P est une quantité donnée.

100. Pour les limites du cône lumineux sur chaque verre oculaire et sur l'oeil, nous aurons:

sur B . . . . $A\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}}$,

sur C . . . . $\left(\mathfrak{A}B + \frac{A}{\mathfrak{B}}\right)\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{AB}}$,

sur D . . . . $\left(\mathfrak{AB}C + \frac{\mathfrak{A}B}{\mathfrak{C}} + \frac{A}{\mathfrak{BC}}\right)\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{ABC}}$,

sur E . . . . $\left(\mathfrak{ABC}D + \frac{\mathfrak{AB}C}{\mathfrak{D}} + \frac{\mathfrak{A}B}{\mathfrak{CD}} + \frac{A}{\mathfrak{BCD}}\right)\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{ABC}}$, où pour éviter la confusion les condition suivantes sont requises:

$$q > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}i}, \quad r > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}i}, \quad s > \frac{6\omega}{i},$$

et de là pour le demi-diamètre du champ apparent moyen nous obtiendrons:

$$\text{I.} \quad \varphi = \frac{nq}{A} = \frac{n\mathfrak{A}Q}{(1+\mathfrak{A})(P+\mathfrak{A}Q)},$$

$$\text{II.} \quad \varphi = \frac{n\mathfrak{B}r}{A+\mathfrak{A}\mathfrak{B}B} = \frac{n\mathfrak{A}\mathfrak{B}QR}{((1+\mathfrak{A})P+\mathfrak{A}^2(1+\mathfrak{B})Q)(Q+\mathfrak{B}R)},$$

$$\text{III.} \quad \varphi = \frac{n\mathfrak{B}\mathfrak{C}s}{A+\mathfrak{A}\mathfrak{B}B+\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}C} = \frac{n\mathfrak{A}\mathfrak{B}R}{(1+\mathfrak{A})P+\mathfrak{A}^2(1+\mathfrak{B})Q+\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2(1+\mathfrak{C})R},$$

$$\text{IV.} \quad \varphi = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{C}\omega}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2D-\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}C-\mathfrak{A}\mathfrak{B}B-A} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\omega}{\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2D-\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2(1+\mathfrak{C})R-\mathfrak{A}^2(1+\mathfrak{B})Q-(1+\mathfrak{A})P}$$

dont la plus petite valeur aura lieu.

101. Mais sans introduire ces nouvelles lettres P, Q, R, posons seulement $A = \frac{1+\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}p$ [illegible] $C = (1+\mathfrak{C})s$, de sorte que nous ayons:

$$q = \frac{\mathfrak{B}Bp}{(1+\mathfrak{B})p+\mathfrak{A}\mathfrak{B}B}, \quad r = \frac{\mathfrak{C}Bs}{B+(1+\mathfrak{B})\mathfrak{C}s},$$

et nos quatre valeurs de φ seront:

$$\text{I.} \quad \varphi = \frac{nq}{A},$$

$$\text{II.} \quad \varphi = \frac{n\mathfrak{B}r}{A+\mathfrak{A}\mathfrak{B}B},$$

$$\text{III.} \quad \varphi = \frac{n\mathfrak{B}\mathfrak{C}s}{A+\mathfrak{A}\mathfrak{B}B+\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}C},$$

$$\text{IV.} \quad \varphi = -\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{C}\omega}{A+\mathfrak{A}\mathfrak{B}B+\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}C-\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2D},$$

où il est d'abord clair que pour que le champ apparent ne devienne trop petit, il faut qu'il ne dépende pas de l'oeil, et partant on aura pour le lieu de l'oeil:

$$D = \frac{A+\mathfrak{A}\mathfrak{B}B+\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}C}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2},$$

laquelle quantité ne doit jamais devenir négative.

102. La multiplication est ici égale à $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, en sorte que si $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ est un nombre positif, la représentation est renversée, mais droite si $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ est négatif. A cause de ces trois nombres $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ selon qu'ils sont positifs ou négatifs, nous aurons huit cas à examiner où la multiplication sera toujours $= m$, le demi-diamètre de la pupille $= \omega$, la clarté pleine qu'on aperçoit à la vue simple en chaque objet $= 1$ et la clarté dont la lunette montre le même objet $= \frac{1}{i^2}$. Or, en examinant

...cas, je ne développerai que les espèces qui auront quelqu'avantage sur les lunettes à deux ...verres, c'est à dire qui découvrent un plus grand champ ou qui fournissent des lunettes ...courtes. Dans cette vue je donnerai l'exclusion à celles où la quatrième valeur de φ déter-... champ apparent puisqu'il deviendrait alors trop petit. Ainsi, ayant ou:

$$D = \frac{A}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} + \frac{B}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}^2} + \frac{C}{\mathfrak{C}},$$

... selon les lettres introduites:

$$D = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} + \frac{(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} + \frac{(1+\mathfrak{C})R}{\mathfrak{C}^2},$$

... quantité doit toujours être positive.

I. Cas des lunettes à 4 verres,

où les trois nombres $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sont positifs.

103. Dans ce cas la représentation est renversée et la multiplication $m = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$. Donc si nous introduisons les lettres P, Q, R, qu'il soit:

$$A = \frac{1+\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}P, \qquad B = \frac{1+\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}Q, \qquad C = \frac{1+\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}}R,$$

nous aurons pour le lieu de l'oeil:

$$D = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{m^2} + \frac{(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} + \frac{(1+\mathfrak{C})R}{\mathfrak{C}^2},$$

et partant les quantités Q et R doivent être positives; la quantité P étant toujours donnée $P = p = \frac{m^2\omega^2}{il^2}$. Or, pour le demi-diamètre du champ apparent moyen φ nous aurons ces trois formules:

$$\text{I.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + 1 + \mathfrak{A},$$

$$\text{II.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} + \mathfrak{A}(1+\mathfrak{B}),$$

$$\text{III.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}(1+\mathfrak{C}).$$

Ces formules étant les renversées des précédentes, c'est la plus grande qui aura lieu. Mais pour les distances de foyer on aura:

$$p = P, \qquad q = \frac{PQ}{P+\mathfrak{A}Q}, \qquad r = \frac{QR}{Q+\mathfrak{B}R}, \qquad s = \frac{R}{\mathfrak{C}}.$$

104. Or la quelle de ces trois formules soit la plus grande, il faut faire en sorte qu'elle devienne la plus petite qu'il soit possible, afin qu'on obtienne le plus grand champ apparent possible. Mais si la troisième est la plus grande, il est évident qu'à cause de $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = m$, sa valeur est plus grande que m, et partant $\varphi < \frac{n}{m}$; et si la première ou la seconde était la plus grande, le champ apparent

*

deviendrait encore plus petit, d'où il est évident que ce cas ne fournit aucune lunette qui préférable à celles de deux ou trois verres; et partant je ne m'arrêterai pas à développer soigneusement les qualités des lunettes de ce cas. Or, en cas qu'on ait construit une lunette qui y appartient, il sera aisé par ces formules d'en connaître les propriétés, et on trouvera toujours que non seulement le champ apparent est trop petit, mais que la lunette même devient trop longue.

II. Cas des lunettes à 4 verres,
où $\mathfrak{A}$ est négatif mais $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ positifs.

105. Posons donc $-\mathfrak{A}$ pour $+\mathfrak{A}$ et nos formules seront:

$$A = \frac{\mathfrak{A}-1}{\mathfrak{A}} P, \qquad B = \frac{1+\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}} Q, \qquad C = \frac{1+C}{\mathfrak{C}} R;$$

$$p = P, \qquad q = \frac{PQ}{P-\mathfrak{A}Q}, \qquad r = \frac{QR}{Q+\mathfrak{B}R}, \qquad s = \frac{R}{\mathfrak{C}},$$

et les 3 valeurs de $\frac{n}{\varphi}$:

$$\text{I.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}Q} - \mathfrak{A} + 1,$$

$$\text{II.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}Q} - \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} - \mathfrak{A}(1+\mathfrak{B}),$$

ou:

$$\frac{n}{\varphi} = \left(\frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}} - \mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q\right)\left(\frac{1}{\mathfrak{B}R} + \frac{1}{Q}\right),$$

$$\text{III.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} - \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} - \mathfrak{A}\mathfrak{B} - m,$$

à cause de la multiplication $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = m$, et pour le lieu de l'oeil:

$$D = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{m^2} + \frac{(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} + \frac{(1+\mathfrak{C})R}{\mathfrak{C}^2}.$$

106. Ici il est d'abord évident que le nombre $\mathfrak{A}$ doit être plus grand que l'unité et:

$$\frac{(\mathfrak{A}-1)P}{m^2} < \frac{(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} + \frac{(1+\mathfrak{C})R}{\mathfrak{C}^2},$$

pour que les intervalles A et D proviennent positifs, et par la même raison les quantités Q et R seront positives. Maintenant il faut voir laquelle des 3 valeurs de $\frac{n}{\varphi}$ est la plus grande et ensuite il faut tâcher de la rendre aussi petite qu'il est possible. Pour cet effet voyons sous quelles conditions chacune de ces trois valeurs devient la plus petite, afin qu'on puisse rendre la plus grande aussi petite qu'il est possible. Or la première s'évanouit en faisant $\mathfrak{A} = 1$, et alors les deux autres valeurs seront:

$$\text{II.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} + 1 + \mathfrak{B}, \qquad \text{III.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} + \mathfrak{B} + m,$$

dont la plus grande aurait lieu qui est indubitablement la troisième. Cependant il serait toujours $\frac{n}{\varphi} > m$ et partant $\varphi < \frac{n}{m}$, ce qui ne produirait aucun avantage sur les lunettes à deux verres.

Il faut donc mettre $\mathfrak{A} > 1$, d'où la première valeur de $\frac{n}{\varphi}$ devient plus grande, et changeant de signes les deux autres valeurs, puisque les signes ne font rien à notre dessein et qu'il s'agit uniquement des valeurs absolues, nous aurons:

$$\text{I.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}Q} - \mathfrak{A} + 1,$$

$$\text{II.} \quad \frac{n}{\varphi} = \mathfrak{A}(1+\mathfrak{B}) + \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} - \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}Q} - \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R},$$

$$\frac{n}{\varphi} = \left(\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q - \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}}\right)\left(\frac{1}{\mathfrak{B}R} + \frac{1}{Q}\right),$$

$$\text{III.} \quad \frac{n}{\varphi} = m + \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} - \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R},$$

Il faut de plus qu'il soit:

$$q > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}l}, \qquad r > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}l}, \qquad s > \frac{6\omega}{l}.$$

Cependant il pourrait bien arriver que la seconde devînt négative, auquel cas il y faudrait changer les signes; mais la troisième est toujours positive, puisque la valeur de D est telle et que la troisième se change en $\frac{n}{\varphi} = \frac{m^2 D}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R}$.

108. Or pour qu'il devienne $\varphi > \frac{n}{m}$ en vertu de la troisième formule, il faut qu'il soit $\frac{\mathfrak{A}-1}{\mathfrak{A}}P > \mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 R$, et partant la seconde doit être présentée ainsi:

$$\text{II.} \quad \frac{n}{\varphi} = \left(\frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}} - \mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q\right)\left(\frac{1}{\mathfrak{B}R} + \frac{1}{Q}\right),$$

laquelle ne doit pas être plus grande que la troisième. Rendons-les donc égales pour avoir:

$$\frac{2(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}Q} = \frac{2\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} + m + \mathfrak{A}(1+2\mathfrak{B}),$$

d'où nous tirons:

$$\frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q + \frac{(m+\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{B}QR}{2Q+\mathfrak{B}R};$$

Il faut donc qu'il soit:

$$\frac{(m+\mathfrak{A}\mathfrak{B})Q}{2Q+\mathfrak{B}R} > \mathfrak{A}\mathfrak{B} \quad \text{ou} \quad (m-\mathfrak{A}\mathfrak{B})Q > \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 R.$$

Donc $\mathfrak{A}\mathfrak{B} < m$ et $\mathfrak{C} > 1$, soit $\lambda > 1$ et posons $Q = \frac{\lambda\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 R}{m-\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$, d'où nous tirons:

$$\frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}} = \frac{\lambda\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2(1+\mathfrak{B})}{m-\mathfrak{A}\mathfrak{B}}R + \frac{\lambda\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2(m+\mathfrak{A}\mathfrak{B})}{2\lambda\mathfrak{A}\mathfrak{B}+m-\mathfrak{A}\mathfrak{B}}R.$$

109. Mais pour mieux développer ces formules, puisque ce n'est que la plus grande qui saurait avoir lieu, dans les autres on pourra donner à n une plus petite valeur, afin qu'elles soient

d'accord entr'elles. Que n, n^I, n^{II} marquent donc des valeurs de n telles que la plus grande ne surpasse point $\frac{1}{4}$, si nous supposons que le demi-diamètre de l'ouverture d'un oculaire ne doive être plus grand que le quart de sa distance de foyer. Ayant donc rendu positives nos trois formules, nous aurons:

$$\text{I.}\quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}Q} - \mathfrak{A} + 1,$$

$$\text{II.}\quad \frac{n^I}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}Q} - \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} - \mathfrak{A}(1+\mathfrak{B}),$$

$$\text{III.}\quad \frac{n^{II}}{\varphi} = m + \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} - \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R}.$$

D'où nous tirons:

$$\frac{n^{II}+n^I-n}{\varphi} = m-1, \quad \text{et partant} \quad \varphi = \frac{n^{II}+n^I-n}{m-1};$$

et partant le champ apparent sera le plus grand, si les valeurs n^{II} et n^I sont les plus grandes et n la plus petite.

110. Posons donc $\mathfrak{A}Q = P$ pour rendre $n = o$ et que les deux autres n^{II} et n^I deviennent égales pour avoir $\varphi = \frac{2n^I}{m-1}$, d'où résulte le plus grand champ apparent qui soit possible dans ce cas, et nous aurons:

$$\text{II.}\quad \frac{n^I}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}S} + \mathfrak{A} - 1 - \frac{(1+\mathfrak{B})P}{\mathfrak{B}R} - \mathfrak{A}(1+\mathfrak{B}),$$

ou:

$$\frac{n^I}{\varphi} = \frac{-(\mathfrak{A}\mathfrak{B}+1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} - \mathfrak{A}\mathfrak{B} - 1.$$

Or, cette valeur devenant négative, on voit qu'on doit prendre $P > \mathfrak{A}Q$; et partant n ne saurait s'évanouir. Soit donc $P = \mathfrak{A}(Q+\mathfrak{B})$ pour avoir:

$$\text{I.}\quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)\mathfrak{B}}{Q},$$

$$\text{II.}\quad \frac{n^I}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)\mathfrak{B}(Q+\mathfrak{B}R)}{\mathfrak{B}QR} - \frac{(\mathfrak{A}\mathfrak{B}+1)Q}{\mathfrak{B}R} - \mathfrak{A}\mathfrak{B} - 1,$$

$$\text{III.}\quad \frac{n^{II}}{\varphi} = m + \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \frac{(\mathfrak{A}\mathfrak{B}+1)Q}{\mathfrak{B}R} - \frac{(\mathfrak{A}-1)\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}R}.$$

111. Posons donc ces deux dernières valeurs égales entr'elles et nous aurons:

$$\frac{(\mathfrak{A}-1)\mathfrak{B}(2Q+\mathfrak{B}R)}{\mathfrak{B}QR} = \frac{2(\mathfrak{A}\mathfrak{B}+1)Q}{\mathfrak{B}R} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + 1 + m,$$

donc:

$$\frac{(\mathfrak{A}-1)\mathfrak{B}}{Q} = \frac{2(\mathfrak{A}\mathfrak{B}+1)Q + (2\mathfrak{A}\mathfrak{B}+1)\mathfrak{B}R + m\mathfrak{B}R}{2Q+\mathfrak{B}R} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} + 1 + \frac{(m+\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{B}R}{2Q+\mathfrak{B}R}.$$

ce qui est la valeur de $\frac{n}{\varphi}$, et les deux autres seront:

$$\frac{n^I}{\varphi} = \frac{n^{II}}{\varphi} = m + \mathfrak{A}\mathfrak{B} - \frac{(m + \mathfrak{A}\mathfrak{B})\,Q}{2Q + \mathfrak{B}R} = \frac{(m + \mathfrak{A}\mathfrak{B})\,(Q + \mathfrak{B}R)}{2Q + \mathfrak{B}R},$$

d'où la distance de l'oeil devient:

$$D = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R\,(m + \mathfrak{A}\mathfrak{B})\,(Q + \mathfrak{B}R)}{m^2\,(2Q + \mathfrak{B}R)}.$$

Ensuite la première valeur de $\frac{n}{\varphi}$ donne:

$$\frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{\mathfrak{A}Q} = \mathfrak{A}\,(\mathfrak{B} + 1) + \frac{(m + \mathfrak{A}\mathfrak{B})\,\mathfrak{B}R}{2Q + \mathfrak{B}R} = \frac{2\mathfrak{A}\,(\mathfrak{B} + 1)\,Q + (m + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A})\,\mathfrak{B}R}{2Q + \mathfrak{B}R},$$

d'où nous tirons:

$$\frac{\mathfrak{B}R}{Q} = \frac{2\,(\mathfrak{A} - 1)\,P - 2\mathfrak{A}^2\,(\mathfrak{B} + 1)\,Q}{\mathfrak{A}\,(m + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A})\,Q - (\mathfrak{A} - 1)\,P},$$

et partant:

$$\frac{n}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{\mathfrak{A}Q} - \mathfrak{A} + 1,$$

$$\frac{n^I}{\varphi} = \frac{n^{II}}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{2\mathfrak{A}Q} + \frac{m - \mathfrak{A}}{2}.$$

112. Or, afin que la fraction $\frac{\mathfrak{B}R}{Q}$ soit positive, nous avons ces limites:

$$\frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{\mathfrak{A}Q} > \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A} \quad \text{et} \quad \frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{\mathfrak{A}Q} < m + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A},$$

ensuite que la valeur de $\frac{n^I}{\varphi} = \frac{n^{II}}{\varphi}$ surpasse $\frac{n}{\varphi}$, on a $\frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{\mathfrak{A}Q} < m + \mathfrak{A} - 2$. Posons donc $\frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{\mathfrak{A}Q} = m + \mathfrak{A} - 2 - \mu$ de sorte que $\mathfrak{A}\mathfrak{B} < m - 2 - \mu$, et nous aurons: $\frac{n}{\varphi} = m - 1 - \mu$ et $\frac{n^I}{\varphi} = \frac{n^{II}}{\varphi} = m - 1 - \frac{\mu}{2}$ et $\frac{\mathfrak{B}R}{Q} = \frac{2\,(m - 2 - \mu - \mathfrak{A}\mathfrak{B})}{2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + 2 + \mu}$.

Alors le demi-diamètre du champ moyen sera $\varphi = \frac{n^I}{m - 1 - \frac{\mu}{2}}$, et les autres quantités:

$$Q = \frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{\mathfrak{A}\,(m + \mathfrak{A} - 2 - \mu)}, \qquad R = \frac{2\,(\mathfrak{A} - 1)\,(m - 2 - \mu - \mathfrak{A}\mathfrak{B})\,P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\,(m + \mathfrak{A} - 2 - \mu)\,(2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + 2 + \mu)};$$

où il faut prendre $\mu < m - 2 - \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, et partant il sera $\varphi < \frac{2n^I}{m + \mathfrak{A}\mathfrak{B}}$.

113. Avant que de déterminer quelque chose de précis, il faut considérer les autres quantités et les conditions qu'il faut remplir; or nous trouverons:

$$A = \frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{\mathfrak{A}}, \qquad B = \frac{(\mathfrak{A} - 1)\,(1 + \mathfrak{B})\,P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\,(m + \mathfrak{A} - 2 - \mu)}, \qquad C = \frac{2\,(\mathfrak{A} - 1)\,(1 + \mathfrak{C})\,(m - 2 - \mu - \mathfrak{A}\mathfrak{B})\,P}{m\,(m + \mathfrak{A} - 2 - \mu)\,(2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + 2 + \mu)},$$

$$p = P, \quad q = \frac{(\mathfrak{A} - 1)\,p}{\mathfrak{A}\,(m - \mu - 1)}, \quad r = \frac{2\,(\mathfrak{A} - 1)\,(m - 2 - \mu - \mathfrak{A}\mathfrak{B})\,P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\,(2m - 2 - \mu)\,(m + \mathfrak{A} - 2 - \mu)} \quad \text{et} \quad s = \frac{2\,(\mathfrak{A} - 1)\,(m - 2 - \mu - \mathfrak{A}\mathfrak{B})\,P}{m\,(m + \mathfrak{A} - 2 - \mu)\,(2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + 2 + \mu)},$$

et il est requis qu'il soit:

$$q > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}l}, \quad r > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}l} \quad \text{et} \quad s > \frac{6\omega}{l}.$$

Ces dernières conditions nous montrent qu'on ne peut pas prendre $m - 2 - \mu - \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ trop petit ou μ trop grand, comme il serait avantageux pour l'augmentation du champ apparent. Donc dans l'hypothèse:

$$p = P = \frac{3}{50}m^2 \quad \text{et} \quad \frac{\omega}{l} = \frac{1}{50},$$

il faut qu'il soit:

$$m\mathfrak{A} > 3m - 2\mu - 2,$$

$$m^2\mathfrak{A} > 3m^2 + (4m + \mu m - \mu - 2)\mathfrak{A} - 8m - 4m\mu + (\mu + 2)^2 + \mathfrak{A}\mathfrak{B}m(\mathfrak{A} - 1)$$

$$m^2(\mathfrak{A} - 1) > m\mathfrak{A}(\mathfrak{B} + 2 + \mu + \mathfrak{A}\mathfrak{B}) + 2\mathfrak{A}^2\mathfrak{B} - 4\mathfrak{A}\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A} - 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mu + \mathfrak{A}\mu - (\mu + 2)^2.$$

114. Soit $\mu + 2 = \lambda$, de sorte que $\lambda < m + \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ et $\lambda > 2$ et ces conditions seront:

$$m\mathfrak{A} > 3m - 2\lambda + 2,$$

$$m^2\mathfrak{A} > 3m^2 + (\lambda m + 2m - \lambda)\mathfrak{A} - 4\lambda m + \mathfrak{A}\mathfrak{B}(\mathfrak{A} - 1)m + \lambda^2,$$

$$m^2(\mathfrak{A} - 1) > m\mathfrak{A}(\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B} + \lambda) + 2\mathfrak{A}^2\mathfrak{B} - 2\lambda\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \lambda\mathfrak{A} - \lambda^2,$$

et le demi-diamètre du champ moyen $\varphi = \frac{2n}{2m - \lambda}$. Par la seconde formule on reconnait que λ doit être moindre que m et même plus petit que $m - 1$. Après quelques essais j'ai trouvé qu'on satisfait assez près à ces conditions, en posant $\mathfrak{A} = 4$, $\mathfrak{B} = 1$, $\mathfrak{C} = \frac{m}{4}$, $\lambda = m - 8$, de sorte que $\varphi = \frac{2n}{m + 8}$; donc on aura:

$$A = \frac{3}{4}P, \quad B = \frac{1}{8}P, \quad C = \frac{m + 4}{2m^2}P, \quad D = \frac{m + 8}{m^3}P,$$

$$p = P, \quad q = \frac{1}{12}P, \quad r = \frac{1}{2m + 16}P, \quad s = \frac{2}{m^2}P.$$

Il faut seulement remarquer que r ne devient pas plus grand que $\frac{6m\omega}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}l}$, mais le défaut est si petit qu'on le peut aisément négliger, surtout si m est un nombre fort grand.

115. Pour éviter cet inconvénient, posons en général $\lambda = m - \nu$, et nos trois conditions deviendront:

I. $m\mathfrak{A} > m + 2\nu + 2,$

II. $\nu m\mathfrak{A} > m\mathfrak{A} + \nu\mathfrak{A} + m\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\mathfrak{A} - 1) + 2m\nu + \nu^2,$

III. $\nu m\mathfrak{A} > m\mathfrak{A} - \nu\mathfrak{A} + m\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\mathfrak{A} - 1) + 2\mathfrak{A}^2\mathfrak{B} + 2\nu\mathfrak{A}\mathfrak{B} + 2m\nu - \nu^2,$

où la seconde renferme la troisième si $\nu > \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, mais si $\nu < \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, la seconde est renfermée dans la troisième. Donc si nous posons $\nu = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, la seconde et la troisième seront identiques et chacune se réduit à $0 > m + m\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2$, ce qui est impossible. Il faut donc qu'il soit $\nu > \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ et alors il suffit de remplir la seconde condition. Posons donc $\nu = \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \pi$, et la seconde condition exige:

$$\pi m(\mathfrak{A} - 2) > \mathfrak{A}(1 + \mathfrak{B})(m + \mathfrak{A}\mathfrak{B}) + \pi\mathfrak{A} + 2\pi\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \pi^2.$$

où l'on voit que si m était infini, il faudrait qu'il fût $\pi > \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}-2}$. Soit donc $\pi = \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}-2} + \varrho$, il est requis:

$$\varrho m(\mathfrak{A} - 2) > \frac{\mathfrak{A}^2(\mathfrak{A}-1)(1+\mathfrak{B})(1+\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{B})}{(\mathfrak{A}-2)^2} + \frac{\varrho\mathfrak{A}(\mathfrak{A}+2\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}-2} + \varrho^2.$$

116. Il est donc nécessaire qu'il soit $\mathfrak{A} > 2$ et $\varrho > 0$, et ayant trouvé des valeurs convenables pour ϱ, on aura $\nu = \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}-2} + \varrho$; $\lambda = m - \nu$ et le demi-diamètre du champ apparent:

$$\varphi = \frac{2n}{m + \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}-2} + \varrho} = \frac{2n(\mathfrak{A}-2)}{(m+\varrho)(\mathfrak{A}-2) + \mathfrak{A}(1+\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{B})}.$$

Supposons d'abord $\mathfrak{A} = 3$ et il faut prendre:

$$\varrho m > 18(1+\mathfrak{B})(1+2\mathfrak{B}) + 3\varrho(3+4\mathfrak{B}) + \varrho^2.$$

Posons de plus $\mathfrak{B} = 1$, et si l'on prend $\varrho m > 108 + 21\varrho + \varrho^2$, on aura $\varphi = \frac{2n}{m+9+\varrho}$. Or puisque $m > \frac{108}{\varrho} + 21 + \varrho$, ce cas ne saurait avoir lieu, à moins qu'il ne fût $m > 21 + 2\sqrt{108}$ ou $m > 41$, car la plus petite valeur de m résulte en posant $\varrho = \sqrt{108}$.

117. Mais avant que d'entrer en détail, voilà la théorie générale de ce cas. Qu'on prenne $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ et ϱ, en sorte qu'il soit:

$$\varrho m(\mathfrak{A} - 2) > \frac{\mathfrak{A}^2(\mathfrak{A}-1)(1+\mathfrak{B})(1+\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{B})}{(\mathfrak{A}-2)^2} + \frac{\varrho\mathfrak{A}(\mathfrak{A}+2\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}-2} + \varrho^2,$$

et qu'on fasse $\lambda = m - \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}-2} - \varrho$, d'où le demi-diamètre du champ apparent moyen sera $\varphi = \frac{2n}{2m-\lambda}$; et ensuite les distances de foyer des quatre verres seront:

$$p = P = \frac{m^2\omega^2}{\mathfrak{i}^2} = \frac{3}{50}m^2 \text{ pouces}, \qquad q = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}(m+1-\lambda)},$$

$$r = \frac{2(\mathfrak{A}-1)(m-\lambda-\mathfrak{A}\mathfrak{B})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(2m-\lambda)(m+\mathfrak{A}-\lambda)}, \qquad s = \frac{2(\mathfrak{A}-1)(m-\lambda-\mathfrak{A}\mathfrak{B})P}{m(m+\mathfrak{A}-\lambda)(2\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\lambda)},$$

et les distances des verres deviendront:

$$A = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}}, \qquad B = \frac{(\mathfrak{A}-1)(1+\mathfrak{B})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m+\mathfrak{A}-\lambda)}, \qquad C = \frac{2(\mathfrak{A}-1)(m+\mathfrak{A}\mathfrak{B})(m-\lambda-\mathfrak{A}\mathfrak{B})P}{m\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m+\mathfrak{A}-\lambda)(2\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\lambda)},$$

et la distance de l'oeil:

$$D = \frac{(\mathfrak{A}-1)(2m-\lambda)(m-\lambda-\mathfrak{A}\mathfrak{B})}{m^2(m+\mathfrak{A}-\lambda)(2\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\lambda)}P = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(2m-\lambda)C}{2m(m+\mathfrak{A}\mathfrak{B})}, \text{ ou bien } D = \frac{(2m-\lambda)s}{2m}.$$

118. Je remarque ici d'abord que, pour rendre la lunette le plus court qu'il est possible, il faut donner à $\mathfrak{A}$ une valeur qui surpasse tant soit peu 2, et à $\mathfrak{B}$ une valeur fort grande; mais alors le champ apparent devient fort petit et à moins que la multiplication m ne soit extrêmement grande, la valeur de ϱ devient fort grande, ce qui diminue encore le champ apparent. Si nous posons comme ci-dessus $\mathfrak{A} = 3$ et $\mathfrak{B} = 1$, et que nous prenions $\varrho = 9$, le demi-diamètre du champ apparent sera $\varphi = \frac{2n}{m+18}$, pourvu qu'il soit $m > 42$. Dans ce cas on aura donc $\lambda = m - 18$ et partant les autres déterminations seront:

$$p = P = \frac{3}{50} m^2, \quad q = \frac{2}{57} P, \quad r = \frac{20P}{21(m+18)}, \quad s = \frac{20P}{7m(m-12)},$$

$$A = \frac{2}{3} P, \quad B = \frac{4}{63} P, \quad C = \frac{20(m+3)P}{21m(m-12)}, \quad D = \frac{10(m+18)P}{7m^2(m-12)}.$$

119. Examinons un autre exemple, en posant $\mathfrak{A} = 4$ et $\mathfrak{B} = 2$ et la condition à remplir sera $\varrho m > 126 + 16\varrho + \frac{\varrho^2}{2}$. Posons $\varrho = 9$, et ce cas aura lieu quand $m > 34\frac{1}{2}$. Donc pour ce cas nous aurons $\lambda = m - 23$ et les autres déterminations se trouveront:

$$p = P = \frac{3}{50} m^2, \quad q = \frac{1}{32} P, \quad r = \frac{5P}{12(m+23)}, \quad s = \frac{10P}{3m(m-7)},$$

$$A = \frac{3}{4} P, \quad B = \frac{1}{24} P, \quad C = \frac{5(m+8)P}{12m(m-7)}, \quad D = \frac{5(m+23)P}{3m^2(m-7)},$$

et le demi-diamètre du champ apparent $\varphi = \frac{2n}{m+23}$. Mais lorsque la multiplication est beaucoup plus grande, on peut prendre pour ϱ une plus petite valeur. Ainsi, posant $\varrho = 6$, pour les cas où $m > 43$ on aura $\lambda = m - 20$, et les autres déterminations seront:

$$p = P = \frac{3}{50} m^2, \quad q = \frac{1}{28} P, \quad r = \frac{3P}{8m+20}, \quad s = \frac{3P}{m(m-4)},$$

$$A = \frac{3}{4} P, \quad B = \frac{3}{64} P, \quad C = \frac{3(m+8)P}{8m(m-4)}, \quad D = \frac{3(m+20)P}{2m^2(m-4)}$$

et le demi-diamètre du champ apparent $\varphi = \frac{2n}{m+20}$.

120. Quand on a principalement en vue le raccourcissement de la lunette, on peut bien mettre $\mathfrak{A} = 2\frac{1}{2}$ et on aura:

$$m > \frac{75(1+\mathfrak{B})(2+3\mathfrak{B})}{2\varrho} + 5(5+6\mathfrak{B}) + 2\varrho \quad \text{et} \quad \lambda = m - \tfrac{5}{2}(2+3\mathfrak{B}) - \varrho.$$

Soit $\mathfrak{B} = 1$, de sorte que $\lambda = m - \frac{25}{2} - \varrho$ et $m > \frac{375}{\varrho} + 55 + 2\varrho$.

Afin que m ne doive être extrêmement grand, posons $\varrho = \frac{15}{2}$, pour avoir $\lambda = m - 20$ et $m > 120$ et $\varphi = \frac{2n}{m+20}$. Or les autres déterminations de la lunette seront:

$$p = P = \frac{3}{50} m^2, \quad q = \frac{1}{35} P, \quad r = \frac{14 P}{15(m+20)}, \quad s = \frac{7p}{3m(m-15)},$$

$$A = \frac{3}{5} P, \quad B = \frac{4}{75} P, \quad C = \frac{7(2m+5)P}{15m(m-15)}, \quad D = \frac{7(m+20)P}{6m^2(m-15)}.$$

Ces valeurs sont donc fort propres pour les lunettes qui doivent beaucoup grossir.

121. Or, si l'on veut construire des lunettes qui ne doivent pas beaucoup grossir, il faut donner à $\mathfrak{A}$ des valeurs plus grandes. Ainsi supposant $\mathfrak{A} = 4$, puisque:

$$m > \frac{6(1+\mathfrak{B})(1+3\mathfrak{B})}{\varrho} + 4 + 6\mathfrak{B} + \frac{\varrho}{2},$$

prenons $\mathfrak{B} = \frac{1}{3}$, et $\varrho = 4$ pour avoir $m > 12$, et nous obtiendrons $\lambda = m - 8$ et le demi-diamètre du champ $\varphi = \frac{2n}{m+8}$; les autres déterminations seront:

$$p = P = \frac{3}{50} m^2 \text{ pouces}, \quad q = \frac{1}{12} P, \quad r = \frac{5P}{2(m+8)}, \quad s = \frac{10P}{m(3m-16)},$$

$$A = \frac{3}{4} P, \quad B = \frac{1}{4} P, \quad C = \frac{5(3m+4)P}{2m(3m-16)}, \quad D = \frac{5(m+8)P}{m^2(3m-16)}.$$

Cette lunette sera pourtant considérablement plus courte que les ordinaires à 4 verres et a outre cela le même avantage qu'elle représente les objets debout; mais le plus grand avantage qui la rend préférable aux ordinaires, est que le champ apparent est considérablement plus grand. Et, par les mêmes raisons, elle surpasse aussi beaucoup les lunettes à deux verres.

122. Pour les grandes multiplications il est avantageux de donner à $\mathfrak{A}$ une plus petite valeur, pour diminuer d'autant plus la longueur de la lunette, comme nous venons de remarquer dans le § 120. Mais puisque ces déterminations ne sauraient avoir lieu à moins qu'il ne fût $m > 120$, pour de moindres multiplications il faut donner à $\mathfrak{B}$ de plus petites valeurs. Ainsi supposant $\mathfrak{A} = 2\frac{1}{2}$, $\mathfrak{B} = \frac{1}{3}$, $\varrho = 7\frac{1}{2}$, on aura $m > 70$ et $\lambda = m - 15$, donc le demi-diamètre du champ $\varphi = \frac{2n}{m+15}$, et les autres déterminations seront:

$$p = P = \frac{3}{50} m^2, \quad q = \frac{3}{80} P, \quad r = \frac{102 P}{35(m+15)}, \quad s = \frac{51 P}{7m(3m-40)},$$

$$A = \frac{3}{5} P, \quad B = \frac{24}{175} P, \quad C = \frac{51(6m+5)P}{53m(3m-40)}, \quad D = \frac{51(m+15)P}{14m^2(3m-40)}.$$

Cette lunette devient un peu plus longue que celle du § 120. Car la distance B est ici plus grande. Mais en récompense le champ apparent est ici aussi un peu plus grand. Ces exemples sont suffisants pour faire voir comment on doit construire en chaque cas proposé une lunette qui réponde le mieux à notre intention, tant par rapport au champ apparent qu'à la longueur de la lunette.

Exemple 1.

123. *On demande la construction d'une lunette à quatre verres qui grossisse le diamètre des objets 20 fois.*

*

Ayant $m=20$, la distance de foyer de l'objectif doit être 24 pouces et partant $P=$ … choisis pour cet effet les formules du § 121, qui donnent d'abord un champ apparent dont le diamètre est $=\frac{2n}{28}$ ou bien de $1^{0}1'22''$ en posant $n=\frac{1}{4}$, et les autres déterminations seront

Distance de foyer du premier oculaire en $B=2$ pouces,

„ „ du second oculaire en $C=2\frac{1}{7}$ pouces,

„ „ du troisième oculaire en $D=\frac{3}{11}$ pouces,

Distance de l'objectif au premier oculaire $AB=18$ pouces,

„ du premier oculaire au second oculaire $BC=6$ pouces,

„ du second au troisième oculaire $CD=4\frac{4}{11}$ pouces,

„ du troisième oculaire à l'oeil $DE=\frac{21}{100}$ pouces.

Et partant, la longueur de la lunette est $AD=28\frac{4}{11}$.

Exemple 2.

124. *On demande la construction d'une lunette qui grossisse le diamètre des objets 40 fois.*

Ayant $m=40$ l'objectif doit avoir pour sa distance de foyer 96 pouces, de sorte que $P=96$. Pour ce cas je poserai $\mathfrak{A}=3$, $\mathfrak{B}=\frac{1}{2}$; $\varrho=6$ d'où l'on tire $\lambda=m-12$, $\varphi=\frac{2n}{m+12}$ et …

$$p=P=\frac{3}{50}m^2,\quad q=\frac{2P}{39},\quad r=\frac{28P}{15(m+12)},\quad s=\frac{14P}{5m(m-9)},$$

$$A=\frac{2}{3}P,\quad B=\frac{2}{15}P,\quad C=\frac{24(2m+3)P}{15m(m-9)},\quad D=\frac{7(m+12)P}{5m^2(m-9)};$$

et partant pour la lunette requise, nous aurons:

Distance de foyer du premier oculaire en $B=4\frac{12}{13}$ pouces,

„ „ du second oculaire en $C=3\frac{29}{65}$ pouces,

„ „ du troisième oculaire en $D=\frac{168}{775}$ pouces,

Distance de l'objectif au premier oculaire $AB=64$ pouces,

„ du premier oculaire au second oculaire $BC=12\frac{4}{5}$ pouces,

„ du second oculaire au troisième oculaire $CD=5\frac{773}{775}$ pouces,

„ du troisième oculaire à l'oeil $DE=\frac{546}{3875}$ pouces.

Le demi-diamètre du champ apparent $\varphi=\frac{n}{26}=34'$, en posant $n=\frac{1}{4}$, et la longueur de cette lunette est $82\frac{618}{775}$.

125. Avant que d'abandonner ce cas des lunettes à quatre verres, je développerai encore plus généralement les formules générales du § 117, et d'abord pour que la valeur de m puisse être prise plus petite, j'observe qu'il faut mettre:

$$\varrho = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}-2}\sqrt{(\mathfrak{A}-1)(1+\mathfrak{B})(1+\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{B})},$$

et mettant ensuite:

$$\varrho m(\mathfrak{A}-2) = \frac{\mathfrak{A}^2(\mathfrak{A}-1)(1+\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{B})}{(\mathfrak{A}-2)^2} + \frac{\varrho\mathfrak{A}(\mathfrak{A}+2\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}-2} + \varrho^2,$$

on en tire la valeur de:

$$\mathfrak{B} = \frac{m^2(\mathfrak{A}-2)^2-(2m-1)\mathfrak{A}^2}{4m\mathfrak{A}(\mathfrak{A}-1)};$$

et partant: $$\varrho = \frac{m^2(\mathfrak{A}-2)^2-\mathfrak{A}^2}{4m(\mathfrak{A}-2)}, \quad \text{et} \quad \lambda = 2m - \tfrac{1}{2}(m-1)\mathfrak{A},$$

d'où le demi-diamètre du champ apparent moyen devient $\varphi = \frac{4n}{(m-1)\mathfrak{A}}$. Puis les autres déterminations se trouveront:

$$p = P = \frac{m^2\omega^2}{il^2} = \frac{3}{50}m^2 \text{ pouces}, \quad q = \frac{2(\mathfrak{A}-1)P}{(m-1)\mathfrak{A}(\mathfrak{A}-2)}, \quad r = \frac{8(\mathfrak{A}-1)P}{m^2(\mathfrak{A}-2)^2-2m\mathfrak{A}^2+\mathfrak{A}^2}, \quad s = \frac{2(\mathfrak{A}-1)P}{m(m-\mathfrak{A})},$$

$$A = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{2(\mathfrak{A}-1)[m(\mathfrak{A}-2)+\mathfrak{A}]P}{\mathfrak{A}[m^2(\mathfrak{A}-2)^2-2m\mathfrak{A}^2+\mathfrak{A}^2]}, \quad C = \frac{2(m-1)^2\mathfrak{A}^2(\mathfrak{A}-1)P}{m[m-\mathfrak{A}][m^2(\mathfrak{A}-2)^2-2m\mathfrak{A}^2+\mathfrak{A}^2]}$$

$$\text{et} \quad D = \frac{(m-1)\mathfrak{A}(\mathfrak{A}-1)P}{2m^2(m-\mathfrak{A})}.$$

Or il faut prendre: $$\mathfrak{A} > \frac{2m(m+\sqrt{2m-1})}{(m-1)^2}.$$

126. Plus on prend grande la valeur de $\mathfrak{A}$ celle de $\mathfrak{B}$ sera diminuée, mais aussi le champ apparent est rétréci et la distance A devient plus grande. Il faut donc dans chaque cas choisir une telle valeur pour $\mathfrak{A}$ qui augmente le champ apparent, sans augmenter trop la distance B. Ainsi, posant $m = 20$, puisque $\mathfrak{A} > \frac{40(20+\sqrt{39})}{19^2}$, on peut prendre $\mathfrak{A} = 3$ et le demi-diamètre du champ apparent sera $\varphi = \frac{4n}{57}$, tant soit peu plus petit que dans le § 123, mais la lunette sera aussi plus longue. Car les déterminations seront:

$$p = P = 24 \text{ pouces}, \quad q = \frac{32}{19}, \quad r = \frac{384}{49}, \quad s = \frac{24}{85},$$

$$A = 16, \quad B = \frac{736}{49}, \quad C = \frac{77976}{4165}, \quad D = \frac{171}{850}.$$

Or on voit par cet exemple, qu'on n'obtient pas par ce moyen la lunette la plus avantageuse, et partant il vaudra mieux de se servir dans chaque cas plutôt des formules particulières développées ci-dessus qui paraîtront les plus convenables. Or, ayant déjà donné quelques exemples, je ne m'arrêterai pas plus long-temps à ce cas qui paraît d'ailleurs mériter un examen plus soigneux.

III. Cas des lunettes à quatre verres,

où $\mathfrak{A}$ est positif, $\mathfrak{B}$ négatif et $\mathfrak{C}$ positif.

127. Posons donc $-\mathfrak{B}$ pour $+\mathfrak{B}$, et nos formules seront:

$$A = \frac{1+\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}} P, \quad B = \frac{\mathfrak{B}-1}{\mathfrak{B}} Q, \quad C = \frac{1+\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}} R,$$

et posant m pour $\mathfrak{ABC}$ on aura:

$$D = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{m^2} - \frac{(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} + \frac{(1+\mathfrak{C})R}{\mathfrak{C}^2},$$

et les lunettes de ces cas représenteront les objets debout. Ensuite nous aurons les distances de foyer:

$$p = P, \quad q = \frac{PQ}{P+\mathfrak{A}Q}, \quad r = \frac{QR}{Q-\mathfrak{B}R}, \quad s = \frac{R}{\mathfrak{C}},$$

et les trois valeurs de $\frac{n}{\varphi}$ seront:

$$\text{I.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + 1 + \mathfrak{A},$$

$$\text{II.} \quad \frac{n^I}{\varphi} = -\frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{AB}R} + \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} - \mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1),$$

$$\text{III.} \quad \frac{n^{II}}{\varphi} = -\frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{AB}R} + \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} - \mathfrak{AB}(1+\mathfrak{C}).$$

128. Ici il est d'abord évident que $\frac{\mathfrak{B}-1}{\mathfrak{B}} Q$ doit être une quantité positive et:

$$\frac{(1+\mathfrak{A})P}{m^2} + \frac{(1+\mathfrak{C})R}{\mathfrak{C}^2} > \frac{(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2},$$

ou bien:

$$\frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{AB}R} + \mathfrak{AB}(1+\mathfrak{C}) > \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R},$$

et partant la troisième formule est négative.

Posons donc:

$$\text{III.} \quad \frac{n^{II}}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{AB}R} - \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} + \mathfrak{AB} + m = \frac{m^2 D}{\mathfrak{AB}R},$$

et la seconde deviendra:

$$\frac{n^I}{\varphi} = -\frac{m^2 D}{\mathfrak{AB}R} + m + \mathfrak{A} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q}.$$

Mais pour que le champ apparent provienne plus grand, que dans le cas des deux verres, il faut qu'il soit:

$$\frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} > \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{AB}R} + \mathfrak{AB}.$$

d'où la seconde formule est positive et nos trois formules, étant rendues positives, seront:

$$\text{I.}\qquad \frac{n}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + \mathfrak{A} + 1,$$

$$\text{II.}\qquad \frac{n^I}{\varphi} = -\frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} - \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A},$$

$$\text{III.}\qquad \frac{n^{II}}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} - \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} + \mathfrak{A}\mathfrak{B} + m.$$

129. Les lettres n, n^I, n^{II} marqueront donc des fractions positives ou égales à $\frac{1}{4}$ ou plus grandes, et leur combinaison fournit:

$$\frac{n^{II} + n^I - n}{\varphi} = m - 1.$$

Il faut donc tâcher de rendre n^I et n^{II} égales à $\frac{1}{4}$, et la valeur de n aussi petite qu'il est possible. Posons donc $n^I = n^{II}$, ce qui donne:

$$\frac{2(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + m = \frac{2\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + \mathfrak{A},$$

$$\frac{2}{\mathfrak{B}R}\left(\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q - \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}}\right) = m + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{A} - \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q},$$

et on aura:

$$\mathfrak{B}R = \frac{2Q[\mathfrak{A}^2(\mathfrak{B}-1)Q - (1+\mathfrak{A})P]}{\mathfrak{A}(m+2\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{A})Q - (1+\mathfrak{A})P},$$

et ensuite:

$$\frac{n^I}{\varphi} = \frac{n^{II}}{\varphi} = \frac{m+\mathfrak{A}}{2} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{2\mathfrak{A}Q}.$$

Cette valeur doit être plus grande que $\frac{n}{\varphi}$, ce qui donne $\frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} < m - \mathfrak{A} - 2$.

130. Posons donc $\frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} = m - \mathfrak{A} - \lambda$, de sorte que $\lambda > 2$, et nous aurons pour le champ apparent $\frac{n^I}{\varphi} = m - \frac{\lambda}{2}$, par sonséquent $\varphi = \frac{2n^I}{2m-\lambda}$. Ensuite nous aurons:

$$Q = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}(m-\mathfrak{A}-\lambda)}, \qquad R = \frac{2(1+\mathfrak{A})(\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+\lambda)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m-\mathfrak{A}-\lambda)(2\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\lambda)},$$

d'où l'on voit que $m < \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \lambda$ et $m > \mathfrak{A} + \lambda$. Or ayant trouvé ces valeurs de Q et R, nos distances des verres seront:

$$A = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}}, \qquad B = \frac{(1+\mathfrak{A})(\mathfrak{B}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m-\mathfrak{A}-\lambda)}, \qquad C = \frac{2(1+\mathfrak{A})(m+\mathfrak{A}\mathfrak{B})(\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+\lambda)P}{m\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m-\mathfrak{A}-\lambda)(2\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\lambda)},$$

et la distance de l'oeil:

$$D = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R}{m^2}\cdot\frac{n^I}{\varphi} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R(2m-\lambda)}{2m^2},$$

ou bien:

$$D = \frac{(1+\mathfrak{A})(2m-\lambda)(\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+\lambda)P}{m^2(m-\mathfrak{A}-\lambda)(2\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\lambda)}.$$

Ensuite les distances de foyer:

$$p = P, \qquad q = \frac{(1 + \mathfrak{A})\,P}{\mathfrak{A}(m + 1 - \lambda)}, \qquad r = \frac{2\,(1 + \mathfrak{A})\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B} - m + \lambda)\,P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\,(m - \mathfrak{A} - \lambda)\,(2m - \lambda)},$$

et enfin: $$s = \frac{2\,(1 + \mathfrak{A})\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B} - m + \lambda)\,P}{m\,(m - \mathfrak{A} - \lambda)\,(2\,\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \lambda)}, \qquad \text{donc} \qquad D = \frac{(2m - \lambda)\,s}{2m}.$$

131. Mais il reste de remplir ces conditions, qu'il soit:

$$q > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}l}, \qquad r > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}l}, \qquad s > \frac{6\omega}{l},$$

Donc, posant $\frac{\omega}{l} = \frac{1}{50}$ et $P = \frac{3}{50}\,m^2$, ces conditions donnent:

$$\text{I.} \quad m\,(1 + \mathfrak{A}) > 2\,(m + 1 - \lambda) \quad \text{ou} \quad m\mathfrak{A} > m + 2 - 2\lambda,$$

$$\text{II.} \quad m\mathfrak{A}\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B} + \lambda) > (\mathfrak{A} + 3)\,m^2 - 2m\mathfrak{A} - 4\lambda m + \lambda\mathfrak{A} + \lambda^2,$$

$$\text{III.} \quad m\mathfrak{A}\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{B} + \lambda) > (\mathfrak{A} + 1)\,m^2 - 2\mathfrak{A}^2\mathfrak{B} - 2\lambda\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \lambda\mathfrak{A} - \lambda^2;$$

la première se remplit d'elle même et les deux autres soyent remplies en sorte:

$$m\mathfrak{A}\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \lambda) = (\mathfrak{A} + 3)\,m^2 - m\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 2m\mathfrak{A} - 4\lambda m + \lambda\mathfrak{A} + \lambda^2 + \zeta,$$

$$m\mathfrak{A}\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \lambda) = (\mathfrak{A} + 1)\,m^2 + m\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 2\mathfrak{A}^2\mathfrak{B} - 2\lambda\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \lambda\mathfrak{A} - \lambda^2 + \eta,$$

prenant pour ζ et η des quantités positives, d'où l'on tire:

$$\zeta - \eta + 2\,(m - \lambda - \mathfrak{A})\,(m - \lambda - \mathfrak{A}\mathfrak{B}) = 0.$$

132. Mais nous avons vu que $m > \lambda + \mathfrak{A}$ et $m < \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \lambda$, donc $\zeta - \eta > 0$, et partant, si nous posons $\eta = o$ ou que nous remplissions la dernière condition, l'autre sera remplie d'elle-même. Posons donc comme auparavant $\lambda = m - \nu$, et la dernière condition donne:

$$m\mathfrak{A}\mathfrak{B}\,(\mathfrak{A} + 1) > \nu m\mathfrak{A} - m\mathfrak{A} + 2\nu m - 2\mathfrak{A}^2\mathfrak{B} + 2\nu\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \nu\mathfrak{A} - \nu^2,$$

d'où le cas $m = \infty$ donne $\nu < \frac{\mathfrak{A}\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B} + 1)}{\mathfrak{A} + 2}$. Soit donc de plus $\nu = \frac{\mathfrak{A}\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B} + 1)}{\mathfrak{A} + 2} - \pi$, et il est requis:

$$\pi m\,(\mathfrak{A} + 2) > \frac{\mathfrak{A}^2\,(\mathfrak{A} + 1)\,(\mathfrak{B} - 1)\,\mathfrak{A}\mathfrak{B} + 3\mathfrak{B} - 1)}{(\mathfrak{A} + 2)^2} - \frac{\pi\mathfrak{A}\,(\mathfrak{A} + 2\mathfrak{B})}{\mathfrak{A} + 2} - \pi^2.$$

On aura donc:

$$\lambda = m - \frac{\mathfrak{A}\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B} + 1)}{\mathfrak{A} + 2} - \pi \qquad \text{et} \qquad \varphi = \frac{2n}{m + \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B} + 1)}{\mathfrak{A} + 2} + \pi},$$

et outre cela: $$\frac{\mathfrak{A}\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B} + 1)}{\mathfrak{A} + 2} + \pi > \mathfrak{A} \quad \text{et} \quad < \mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

d'où l'on aura: $$\frac{\mathfrak{A}\,(\mathfrak{A} + 1)\,(\mathfrak{B} - 1)}{\mathfrak{A} + 2} + \pi > 0 \qquad \text{et} \qquad \pi < \frac{\mathfrak{A}\,(\mathfrak{B} - 1)}{\mathfrak{A} + 2},$$

de sorte que la première se remplit d'elle-même, à cause de $\pi > 0$, si $\mathfrak{B} > 1$.

133. On découvre ici d'abord un cas aussi remarquable qu'avantageux, si l'on met $\mathfrak{B}=1$, alors toutes les conditions requises se remplissent en posant $\pi=0$ et on aura:

$$\lambda = m - \mathfrak{A} \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{2n}{m+\mathfrak{A}};$$

donc le champ apparent deviendra plus grand plus qu'on prendra petite la valeur de $\mathfrak{A}$. Mais pour trouver les déterminations il faut bien considérer qu'on aura $Q=\infty$ et $(\mathfrak{B}-1)Q=B$. D'où l'on tire:

$$\mathfrak{B}R = \frac{2Q[\mathfrak{A}^2B-(1+\mathfrak{A})P]}{\mathfrak{A}(m+\mathfrak{A})Q} \qquad \text{donc} \qquad R = \frac{2[\mathfrak{A}^2B-(1+\mathfrak{A})P]}{\mathfrak{A}(m+\mathfrak{A})},$$

partant:

$$A = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}}, \qquad B = B, \qquad C = \frac{2[\mathfrak{A}^2B-(1+\mathfrak{A})P]}{m\mathfrak{A}},$$

$$p = P, \qquad q = \frac{P}{\mathfrak{A}}, \qquad r = \frac{2[\mathfrak{A}^2B-(1+\mathfrak{A})P]}{\mathfrak{A}(m+\mathfrak{A})}, \qquad s = \frac{2[\mathfrak{A}^2B-(1+\mathfrak{A})P]}{m(m+\mathfrak{A})}$$

$$\text{et} \quad D = \frac{\mathfrak{A}^2B-(1+\mathfrak{A})P}{m^2}.$$

Or puisque $s > \frac{6\omega}{l}$, il faut qu'il soit:

$$B > \frac{3m}{50\mathfrak{A}^2}(2m+m\mathfrak{A}+\mathfrak{A}) \quad \text{ou} \quad B > \frac{(2m+m\mathfrak{A}+\mathfrak{A})P}{m\mathfrak{A}^2} \quad \text{et} \quad m > \mathfrak{A}+2 \quad \text{ou} \quad \mathfrak{A} < m-2.$$

134. Donc pour que la distance B devienne la plus petite, posons:

$$B = \frac{(2m+m\mathfrak{A}+\mathfrak{A})P}{m\mathfrak{A}^2}, \quad \text{et à cause de} \quad \mathfrak{A}^2B-(1+\mathfrak{A})P = \frac{(m+\mathfrak{A})P}{m},$$

nous aurons:

$$A = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}}, \qquad B = \frac{(2m+m\mathfrak{A}+\mathfrak{A})P}{m\mathfrak{A}^2} \qquad C = \frac{2(m+\mathfrak{A})P}{m^2\mathfrak{A}} \qquad D = \frac{(m+\mathfrak{A})P}{m^3},$$

$$p = P, \qquad q = \frac{P}{\mathfrak{A}}, \qquad r = \frac{2P}{m\mathfrak{A}}, \qquad s = \frac{2P}{m^2} \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{2n}{m+\mathfrak{A}}.$$

Où il est clair, que plus on prend $\mathfrak{A}$ petit, plus le champ apparent sera augmenté, mais la longueur de la lunette devient plus grande; or elle deviendra la plus petite, si l'on prend $\mathfrak{A}=m-2$, et le champ apparent le plus petit $\varphi = \frac{n}{m-1}$, qui est pourtant encore plus grand qu'au cas des deux verres. Soit donc $\mathfrak{A}=m-2$ et les autres déterminations seront:

$$A = \frac{m-1}{m-2}P, \qquad B = \frac{(m-1)(m+2)}{m(m-2)^2}P, \qquad C = \frac{4(m-1)}{m^2(m-2)}P, \qquad D = \frac{2(m-1)}{m^3}P,$$

$$p = P, \qquad q = \frac{P}{m-2}, \qquad r = \frac{2P}{m(m-2)}, \qquad s = \frac{2P}{m^2}, \qquad \varphi = \frac{n}{m-1}.$$

135. La construction commune des lunettes à quatre verres est aussi renfermée dans ce cas $\mathfrak{B}=1$; on n'à qu'à supposer que $q=r$, d'où l'on tire $B = \frac{m+3\mathfrak{A}+2}{2\mathfrak{A}^2}P$, et les déterminations de la lunette seront:

$$p = P = \frac{3}{50} m^2, \quad q = \frac{P}{\mathfrak{A}}, \quad r = \frac{P}{\mathfrak{A}} \text{ et } s = \frac{P}{m}, \text{ et } \varphi = \frac{2n}{m+\mathfrak{A}},$$

$$A = \frac{1+\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}} P, \quad B = \frac{m+3\mathfrak{A}+2}{2\mathfrak{A}^2} P, \quad C = \frac{m+\mathfrak{A}}{m\mathfrak{A}} P, \quad D = \frac{m+\mathfrak{A}}{2m^2} P.$$

Or pour $\mathfrak{A}$ qui doit être $< m-1$, il semble qu'on ait choisi la valeur qui produit le moindre champ apparent et cela peut être pour raccourcir la lunette. Car posant $\mathfrak{A} = m-2$, il résulte la construction commune des lunettes à 4 verres que voilà:

$$p = P = \frac{3}{50} m^2 \text{ pouces}, \quad q = \frac{P}{m-2}, \quad r = \frac{P}{m-2}, \quad s = \frac{P}{m} \text{ et } \varphi = \frac{n}{m-1},$$

$$A = \frac{m-1}{m-2} P, \quad B = \frac{2(m-1)}{(m-2)^2} P, \quad C = \frac{2(m-1)}{m(m-2)} P, \quad D = \frac{m-1}{m^2} P.$$

Mais outre que rien n'oblige à faire $r = q$, on peut aussi donner à la lunette un peu plus de longueur, pour procurer un plus grand champ apparent.

136. Soit p. ex. $\mathfrak{A} = \frac{m-2}{2}$, et les déterminations du cas $q = r$ seront:

$$p = P = \frac{3}{50} m^2, \quad q = \frac{2P}{m-2}, \quad r = \frac{2P}{m-2}, \quad s = \frac{P}{m} \text{ et } \varphi = \frac{4n}{3m-2},$$

$$A = \frac{m}{m-2} P, \quad B = \frac{5m-2}{(m-2)^2} P, \quad C = \frac{(3m-2)}{m(m-2)} P, \quad D = \frac{3m-2}{4m^2} P,$$

où la longueur de la lunette est:

$$A + B + C = \frac{m^3 + 6m^2 - 10m + 4}{m(m-2)^2} P,$$

qui est dans le cas précédent:

$$A + B + C = \frac{m^3 + m^2 - 6m + 4}{m(m-2)^2} P,$$

de sorte que l'excès de celle-ci est seulement:

$$= \frac{5mm - 4m}{m(m-2)^2} P = \frac{5m-4}{(m-2)^2} P,$$

pendant que le diamètre du champ apparent est à celui-là comme $4m-4$ à $3m-2$ ou à peu près d'un tiers plus grand; et la différence dans la longueur s'évanouit, si la multiplication m est fort grande. Mais on peut mettre en général $\mathfrak{A} = \frac{m-2}{\nu}$, marquant par ν un nombre quelconque plus grand que l'unité. De là on aura les déterminations suivantes:

$$p = P = \frac{3}{50} m^2, \quad q = \frac{\nu P}{m-2}, \quad r = \frac{\nu P}{m-2}, \quad s = \frac{P}{m} \text{ et } \varphi = \frac{2\nu n}{(\nu+1)m-2},$$

$$A = \frac{m-2+\nu}{m-2} P, \quad B = \frac{(\nu+3)m + 2(\nu-3)}{2(m-2)^2} \nu P, \quad C = \frac{(\nu+1)m-2}{m(m-2)} P, \quad D = \frac{(\nu+1)m-2}{2\nu m^2} P,$$

où la longueur de la lunette est:

$$A + B + C = \frac{2m^3 + (\nu^2 + 7\nu - 6)m^2 + 2\nu(\nu-7)m + 8}{2m(m-2)^2} P,$$

qui surpasse celle du cas $\nu = 1$ de la quantité:

$$\frac{(\nu^2 + 7\nu - 8)\,m^2 + 2\,(\nu^2 - 7\nu + 6)\,m}{2m\,(m-2)^2}\,P = \frac{(\nu - 1)\,[(\nu + 8)\,m + 2\,(\nu - 6)]}{2\,(m-2)^2}\,P.$$

137. Ce cas $q = r$ fournit la commodité, si c'en est une, que les deux premiers oculaires sont égaux et qu'on peut employer pour le troisième le même oculaire, que la lunette à deux verres; l'objectif étant le même, on peut aussi dans ce cas obtenir le même champ apparent qu'en général, sans supposer $q = r$. Mais on allonge de cette manière sans nécessité la lunette, et l'hypothèse la plus avantageuse est sans doute si l'on met $B = \frac{(2m + m\mathfrak{A} + \mathfrak{A})\,P}{m\mathfrak{A}^2}$. Qu'on prenne donc aussi $\mathfrak{A} = \frac{m-2}{\nu}$, posant $\nu > 1$, et les déterminations seront:

$$p = P = \frac{3}{50}\,m^2, \quad q = \frac{\nu P}{m-2}, \quad r = \frac{2\nu P}{m\,(m-2)}, \quad s = \frac{2P}{m^2} \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{2\nu n}{(\nu+1)\,m - 2},$$

$$A = \frac{(m + \nu - 2)\,P}{m-2}, \quad B = \frac{\nu\,[m^2 + (2\nu - 1)\,m - 2]\,P}{m\,(m-2)^2}, \quad C = \frac{2\,[(\nu+1)\,m - 2]\,P}{m^2\,(m-2)}, \quad D = \frac{[(\nu+1)\,m - 2]\,P}{\nu m^3},$$

donc l'on trouve la longueur de la lunette:

$$A + B + C = \frac{m^4 + 2\,(\nu - 2)\,m^3 + (2\nu^2 - \nu + 6)\,m^2 - 2\,(3\nu + 4)\,m + 8}{m^2\,(m-2)^2}\,P,$$

qui est plus petite que la précédente de la quantité:

$$\frac{(\nu+1)(\nu+2)\,m^3 - 2\,(\nu^2 + 6\nu + 6)\,m^2 + 12\,(\nu+2)\,m - 16}{2m^2\,(m-2)^2}\,P = \frac{[(\nu+1)\,m - 2]\,[(\nu+2)\,m - 4]}{2m^2\,(m-2)}\,P.$$

Il y a la commodité que le dernier oculaire demeure toujours le même, puisqu'à cause de $P = \frac{3}{50}\,m^2$ on a $s = \frac{6}{50} = 0{,}12$ pouces.

138. Quoique je n'aie développé que le cas $\mathfrak{B} = 1$, puisqu'il est le plus avantageux, je n'ai pas besoin de m'arrêter aux autres cas où $\mathfrak{B} > 1$. Car alors il faudrait qu'il fût $m > \lambda + \mathfrak{A}$, et partant le demi-diamètre du champ apparent deviendrait plus petit que $\frac{2n}{m + \mathfrak{A}}$; ce qui renfermerait une imperfection considérable. D'ailleurs, si nous regardons la longueur de la lunette, la seconde espèce l'emporte bien sur celle-ci, vu qu'elle fournit non seulement un aussi grand champ apparent, mais qu'elle réduit la lunette à une longueur beaucoup plus petite, qui souvent n'excède pas même la moitié. Or on peut remarquer ici en général que, toutes les fois que la lettre $\mathfrak{A}$ est positive, la longueur de la lunette devient fort considérable; car la distance de l'objectif au premier oculaire étant $A = \frac{(1 + \mathfrak{A})\,P}{\mathfrak{A}}$, et partant plus grande que P, sans conter les autres distances B, C; tandis que les cas où $\mathfrak{A}$ est négatif, fournissent des lunettes dont la longueur tout entière est au-dessous de P.

*

IV. Cas des lunettes à quatre verres, *où $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont positifs, mais $\mathfrak{C}$ négatif.*

139. Cette espèce représente encore les objets debout, et si nous posons $-\mathfrak{C}$, au lieu de $+\mathfrak{C}$, nos formules seront:

$$A = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}}, \quad C = \frac{(\mathfrak{C}-1)R}{\mathfrak{C}} = \frac{(m-\mathfrak{A}\mathfrak{B})R}{m}.$$

Ensuite on aura:

$$D = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{m^2} + \frac{(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} - \frac{(\mathfrak{C}-1)R}{\mathfrak{C}^2},$$

donc à cause de $(\mathfrak{C}-1)$ positif, il faut qu'il soit:

$$(1+\mathfrak{A})P + \mathfrak{A}^2(1+\mathfrak{B})Q > \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2(\mathfrak{C}-1)R \quad \text{ou} \quad > \mathfrak{A}\mathfrak{B}(m-\mathfrak{A}\mathfrak{B})R.$$

Ensuite nous avons:

$$p = P, \quad q = \frac{PQ}{P+\mathfrak{A}Q}, \quad r = \frac{QR}{Q+\mathfrak{B}R}, \quad s = \frac{R}{\mathfrak{C}},$$

et les trois valeurs de $\frac{n}{\varphi}$ seront:

$$\text{I.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + 1 + \mathfrak{A},$$

$$\text{II.} \quad \frac{n^I}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + \mathfrak{A} + \mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

$$\text{III.} \quad \frac{n^{II}}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} + \mathfrak{A}\mathfrak{B} - m = \frac{m^2 D}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R}.$$

140. Si R est positif et partant le dernier oculaire concave, toutes ces trois formules sont positives, et puisque:

$$\frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} + \mathfrak{A}\mathfrak{B} > m,$$

la seconde donne $\frac{n^I}{\varphi} > m + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + \mathfrak{A}$, et partant on aurait $\varphi < \frac{n}{m}$; donc puisque le champ apparent serait plus petit qu'au cas des deux verres, j'exclus d'abord ce cas. Soit donc R négatif et partant $\mathfrak{C} < 1$ ou $m < \mathfrak{A}\mathfrak{B}$; et posant $-R$ au lieu de $+R$, nous aurons:

$$A = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}}; \quad B = \frac{(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}}, \quad C = \frac{(\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m)R}{m}, \quad r = \frac{QR}{\mathfrak{B}R-Q}, \quad s = \frac{R}{\mathfrak{C}}$$

$$\text{et} \quad D = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{m^2} + \frac{(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} - \frac{(1-\mathfrak{C})R}{\mathfrak{C}^2}.$$

$$\text{I.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + 1 + \mathfrak{A}. \qquad \text{II.} \quad \frac{n^I}{\varphi} = -\frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} - \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + \mathfrak{A} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}$$

$$\text{III.} \quad \frac{n^{II}}{\varphi} = m + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}.$$

car il faut qu'il soit:

$$\mathfrak{AB} > \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{AB}R} + \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R},$$

pour augmenter le champ apparent.

141. De là nous tirons d'abord $\frac{n^I + n^{II} - n}{\varphi} = m - 1$, et partant il faut rendre $n^{II} = n^I$ ou plus petit que n^I, d'où il s'ensuit:

$$m + \frac{2(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{AB}R} + \frac{2\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} = \mathfrak{A} + 2\mathfrak{AB} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q},$$

$$\mathfrak{B}R = \frac{2Q[(1+\mathfrak{A})P + \mathfrak{A}^2(1+\mathfrak{B})Q]}{\mathfrak{A}(2\mathfrak{AB}+\mathfrak{A}-m)Q + (1+\mathfrak{A})P},$$

et de là on obtient: $$\frac{n^I}{\varphi} = \frac{n^{II}}{\varphi} = \frac{m+\mathfrak{A}}{2} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{2\mathfrak{A}Q},$$

et puisque cette valeur doit être plus grande que $\frac{n}{\varphi}$, on aura:

$$\frac{m+\mathfrak{A}}{2} > 1 + \mathfrak{A} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{2\mathfrak{A}Q}, \quad \text{ou} \quad \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} < m - \mathfrak{A} - 2;$$

donc il faut qu'il soit $m > \mathfrak{A} + 2$ ou $\mathfrak{A} < m - 2$; outre cela il faut avoir égard à cette condition $m < \mathfrak{AB}$ donc $\mathfrak{AB} > \mathfrak{A} + 2$ ou $\mathfrak{B} > \frac{\mathfrak{A}+2}{\mathfrak{A}}$.

142. Posons donc $\frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} = m - \mathfrak{A} - \lambda$, de sorte que $\lambda > 2$, et nous aurons $\frac{n^I}{\varphi} = m - \frac{1}{2}\lambda$, par conséquent le demi-diamètre du champ apparent sera $\varphi = \frac{2n^I}{2m-\lambda}$. Or ayant maintenant $Q = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}(m-\mathfrak{A}-\lambda)}$, cette valeur substituée donne $R = \frac{2(1+\mathfrak{A})(m+\mathfrak{AB}-\lambda)P}{\mathfrak{AB}(m-\mathfrak{A}-\lambda)(2\mathfrak{AB}-\lambda)}$. Et de là les distances des verres proviennent:

$$A = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{(1+\mathfrak{A})(1+\mathfrak{B})P}{\mathfrak{AB}(m-\mathfrak{A}-\lambda)}, \quad C = \frac{2(1+\mathfrak{A})(\mathfrak{AB}-m)(m+\mathfrak{AB}-\lambda)P}{m\mathfrak{AB}(m-\mathfrak{A}-\lambda)(2\mathfrak{AB}-\lambda)}$$

$$\text{et} \quad D = \frac{\mathfrak{AB}R}{m^2} \cdot \frac{n^I}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})(2m-\lambda)(m+\mathfrak{AB}-\lambda)P}{m^2(m-\mathfrak{A}-\lambda)(2\mathfrak{AB}-\lambda)},$$

et les distances de foyer:

$$p = P, \quad q = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}(m+1-\lambda)}, \quad r = \frac{2(1+\mathfrak{A})(m+\mathfrak{AB}-\lambda)P}{\mathfrak{AB}(m-\mathfrak{A}-\lambda)(2m-\lambda)},$$

et enfin: $$s = \frac{2(1+\mathfrak{A})(m+\mathfrak{AB}-\lambda)P}{m(m-\mathfrak{A}-\lambda)(2\mathfrak{AB}-\lambda)}, \quad \text{donc } D = \frac{(2m-\lambda)}{2m}s.$$

Il reste donc à remplir ces conditions qu'il soit:

$$q > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}l}, \quad r > \frac{6m\omega}{\mathfrak{AB}l} \quad \text{et} \quad s > \frac{6\omega}{l},$$

ou bien, si nous posons $\frac{\omega}{l} = \frac{1}{50}$, à cause de $P = \frac{3}{50}m^2$, nous aurons $\frac{6\omega}{l} = \frac{2P}{m^2}$, et nos conditions seront:

$$q > \frac{2P}{m\mathfrak{A}}, \quad r > \frac{2P}{m\mathfrak{AB}}, \quad s > \frac{2P}{m^2}.$$

143. Nous devons donc satisfaire à ces conditions:

$$\text{I.}\quad \frac{m(1+\mathfrak{A})}{m+1-\lambda} > 2.$$

$$\text{II.}\quad \frac{m(1+\mathfrak{A})(m+\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\lambda)}{(m-\mathfrak{A}-\lambda)(2m-\lambda)} > 1.$$

$$\text{III.}\quad \frac{m(1+\mathfrak{A})(m+\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\lambda)}{(m-\mathfrak{A}-\lambda)(2\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\lambda)} > 1.$$

Or puisque $\mathfrak{A}\mathfrak{B} > m$, il s'ensuit $2\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\lambda > 2m-\lambda$, et partant la troisième formule est moindre que la seconde, d'où il suffit de remplir la troisième et la seconde sera d'autant plus remplie. On aura donc:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} > \frac{\lambda^2+\lambda m\mathfrak{A}+\lambda\mathfrak{A}-m^2(\mathfrak{A}+1)}{2\lambda+m\mathfrak{A}+2\mathfrak{A}-m},$$

et partant:
$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m > \frac{(\lambda+m\mathfrak{A}+\mathfrak{A})(\lambda-2m)}{2\lambda+m\mathfrak{A}+2\mathfrak{A}-m},$$

ce qui est toujours vrai à cause de $\lambda < 2m$.

144. Or λ doit être plus petit que $m-\mathfrak{A}$; donc si nous posons $\lambda = m-\mathfrak{A}-\pi$, nous aurons:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} > \frac{\pi^2+\pi\mathfrak{A}-\pi m(2+\mathfrak{A})-m\mathfrak{A}(1+\mathfrak{A})}{m(1+\mathfrak{A})-2\pi},$$

et si nous posons:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \frac{\pi^2+\pi\mathfrak{A}-\pi m(2+\mathfrak{A})-m\mathfrak{A}(1+\mathfrak{A})}{m(1+\mathfrak{A})-2\pi}+\varrho,$$

puisque $\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m$ doit être une quantité positive, il faut qu'il soit:

$$\varrho > \frac{(m+\mathfrak{A}+\pi)[m(1+\mathfrak{A})-\pi]}{m(1+\mathfrak{A})-2\pi}.$$

Or, à cause de $\varphi = \frac{2n}{m+\mathfrak{A}+\pi}$, il faut prendre π aussi petit qu'il est possible pour augmenter le champ apparent; cependant si l'on prend π trop petit, à cause de $m-\mathfrak{A}-\lambda = \pi$, la longueur de la lunette deviendrait énorme. Outre cela, puisque $\frac{m(1+\mathfrak{A})}{m+1-\lambda} > 2$, il faut prendre $\pi < \frac{m-2}{2}(\mathfrak{A}+1)$ ou $\mathfrak{A}+1 > \frac{2\pi}{m-2}$; ensuite puisque $\lambda > 2$, on aura $m-\mathfrak{A}-\pi > 2$ et $\mathfrak{A} < m-\pi-2$. On prendra donc pour $\mathfrak{A}$ et π des valeurs convenables, et posant $\varrho = \frac{(m+\mathfrak{A}+\pi)[m(1+\mathfrak{A})-\pi]}{m(1+\mathfrak{A})-2\pi}+\nu$, on aura $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = m+\nu$ et $\mathfrak{B} = \frac{m+\nu}{\mathfrak{A}}$; $\lambda = m-\mathfrak{A}-\pi$; donc $\varphi = \frac{2n}{m+\mathfrak{A}+\pi}$; $1+\mathfrak{B} = \frac{m+\mathfrak{A}+\nu}{\mathfrak{A}}$; $m-\mathfrak{A}-\lambda = \pi$; $\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m = \nu$; $m+\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\lambda = m+\nu+\mathfrak{A}+\pi$; $2\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\lambda = m+2\nu+\mathfrak{A}+\pi$; $2m-\lambda = m+\mathfrak{A}+\pi$.

145. Prenant donc $\mathfrak{A}$ et π en sorte que le champ apparent devienne si grand qu'on souhaite et qu'il soit $\mathfrak{A} < m-\pi-2$, et $\mathfrak{A}+1 > \frac{2\pi}{m-2}$, et donnant a ν aussi une valeur quelconque positive, les déterminations de la lunette seront:

$$p = P, \quad q = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{A}+\pi)}, \quad r = \frac{2(1+\mathfrak{A})(m+\nu+\mathfrak{A}+\pi)P}{\pi(m+\nu)(m+\mathfrak{A}+\pi)}, \quad s = \frac{2(1+\mathfrak{A})(m+\nu+\mathfrak{A}+\pi)P}{\pi m(m+2\nu+\mathfrak{A}+\pi)},$$

$$A = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{(1+\mathfrak{A})(m+\mathfrak{A}+\nu)P}{\pi\mathfrak{A}(m+\nu)}, \quad C = \frac{2(1+\mathfrak{A})\nu(m+\nu+\mathfrak{A}+\pi)P}{\pi m(m+\nu)(m+2\nu+\mathfrak{A}+\pi)}$$

$$\text{et} \quad D = \frac{(1+\mathfrak{A})(m+\mathfrak{A}+\pi)(m+\nu+\mathfrak{A}+\pi)}{\pi m^2(m+2\nu+\mathfrak{A}+\pi)}P \quad \text{enfin} \quad \varphi = \frac{2n}{m+\mathfrak{A}+\pi}.$$

Si l'on met $\nu = o$, l'intervalle entre les deux derniers oculaires C, s'évanouit et ces deux verres deviennent égaux, savoir $r = s = \frac{2(1+\mathfrak{A})P}{\pi m}$; ils tiennent alors lieu d'un seul, dont la distance de l'oeil n'est que la moitié; mais puisqu'ils admettent une plus grande ouverture, c'est de là que l'avantage d'un plus grand champ apparent résulte; car d'ailleurs c'est le cas de la première espèce des lunettes à trois verres.

116. Il y a dans cette espèce un cas bien remarquable, qui résulte en posant $\nu = \infty$; car alors les déterminations se réduisent aux formes suivantes:

$$p = P, \quad q = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{A}+\pi)}, \quad r = \frac{2(1+\mathfrak{A})P}{\pi(m+\mathfrak{A}+\pi)}, \quad s = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\pi m},$$

$$A = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\pi\mathfrak{A}}, \quad C = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\pi m}, \quad D = \frac{(1+\mathfrak{A})(m+\mathfrak{A}+\pi)P}{2\pi m^2},$$

et le demi-diamètre du champ apparent $\varphi = \frac{2n}{m+\mathfrak{A}+\pi}$. Qu'on suppose par exemple $\mathfrak{A} = 2$; et $\pi = 4$ et on aura:

$$p = P, \quad q = \frac{3}{14}P, \quad r = \frac{3P}{2(m+6)}, \quad s = \frac{3P}{4m}, \quad \varphi = \frac{2n}{m+6},$$

$$A = \frac{3}{2}P, \quad B = \frac{3}{8}P, \quad C = \frac{3}{4m}P, \quad D = \frac{3(m+6)}{8m^2}P.$$

Mais ces lunettes, où m doit être plus grand que 8, deviennent trop longues par rapport à l'avantage qu'on en retire, et puisqu'on peut obtenir le même avantage par des lunettes beaucoup plus courtes; il ne serait pas à propos d'employer cette espèce; je m'en vais donc examiner l'espèce suivante.

V. Cas des lunettes à quatre verres,

où les deux nombres $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont négatifs et $\mathfrak{C}$ positif.

117. Cette espèce représentera les objets renversés. Posons donc dans nos formules générales $-\mathfrak{A}$ et $-\mathfrak{B}$ au lieu de $+\mathfrak{A}$ et $+\mathfrak{B}$, et nous aurons:

$$A = \frac{\mathfrak{A}-1}{\mathfrak{A}}P, \quad B = \frac{\mathfrak{B}-1}{\mathfrak{B}}Q, \quad C = \frac{1+\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}}R,$$

et pour l'oeil:

$$D = -\frac{(\mathfrak{A}-1)P}{m^2} - \frac{(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} + \frac{(1+\mathfrak{C})R}{\mathfrak{C}^2}.$$

Il faut donc qu'il soit $\mathfrak{A} > 1$, $(\mathfrak{B} - 1)\,Q > 1$ et:

$$(\mathfrak{A} - 1)\,P + \mathfrak{A}^2(\mathfrak{B} - 1)\,Q < \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2(1 + \mathfrak{C})\,R \text{ ou } < \mathfrak{A}\mathfrak{B}\,(m + \mathfrak{A}\mathfrak{B})\,R;$$

ensuite: $$p = P, \quad q = \frac{PQ}{P - \mathfrak{A}Q}, \quad r = \frac{QR}{Q - \mathfrak{B}R}, \quad s = \frac{R}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R}{m},$$

et les valeurs de $\frac{n}{\varphi}$;

$$\text{I.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{\mathfrak{A}\,Q} - \mathfrak{A} + 1.$$

$$\text{II.} \quad \frac{n^I}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} - \frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{\mathfrak{A}\,Q} + \frac{\mathfrak{A}\,(\mathfrak{B} - 1)\,Q}{\mathfrak{B}R} + \mathfrak{A} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}.$$

$$\text{III.} \quad \frac{n^{II}}{\varphi} = -\frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} - \frac{\mathfrak{A}\,(\mathfrak{B} - 1)\,Q}{\mathfrak{B}R} + \mathfrak{A}\mathfrak{B} + m.$$

148. Pour augmenter le champ apparent au-delà des lunettes à deux verres, il faut qu'il soit

$$\frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{\mathfrak{A}\,(\mathfrak{B} - 1)\,Q}{\mathfrak{B}R} > \mathfrak{A}\mathfrak{B} \quad \text{et} \quad < \mathfrak{A}\mathfrak{B} + m,$$

et alors ces trois formules fournissent cette égalité:

$$\frac{n + n^I + n^{II}}{\varphi} = m + 1, \quad \text{et partant} \quad \varphi = \frac{n + n^I + n^{II}}{m + 1}.$$

Donc le plus grand champ apparent qu'on puisse obtenir est lorsque chaque lettre n, n^I, n^{II} reçoit la plus grande valeur dont elle est susceptible, savoir $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}$ au moins. Le meilleur moyen est donc de les rendre égales entr'elles, pour qu'il en résulte $\varphi = \frac{3n}{m + 1}$, de sorte que dans ce cas le demi-diamètre du champ apparent devient trois fois plus grand qu'au cas des deux verres. Or posant $n = n^I = n^{II}$, on aura $\frac{n}{\varphi} = \frac{m + 1}{3}$; d'où l'on tire:

$$Q = \frac{3\,(\mathfrak{A} - 1)\,P}{\mathfrak{A}\,(m + 3\mathfrak{A} - 2)}, \quad \text{et} \quad R = \frac{3\,(\mathfrak{A} - 1)\,(m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 2)\,P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\,(m + 3\mathfrak{A} - 2)\,(2m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 1)};$$

ou bien: $$\frac{Q}{P} = \frac{3\,(\mathfrak{A} - 1)}{\mathfrak{A}\,(m + 3\mathfrak{A} - 2)} \quad \text{et} \quad \frac{R}{Q} = \frac{m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 2}{\mathfrak{B}\,(2m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 1)}.$$

149. De là on trouve les autres déterminations:

$$A = \frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{3\,(\mathfrak{A} - 1)\,(\mathfrak{B} - 1)\,P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\,(m + 3\mathfrak{A} - 2)}, \quad C = \frac{3\,(\mathfrak{A} - 1)\,(m + \mathfrak{A}\mathfrak{B})\,(m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 2)\,P}{m\mathfrak{A}\mathfrak{B}\,(m + 3\mathfrak{A} - 2)\,(2m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 1)}$$

$$\text{et} \quad D = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R}{m^2} \cdot \frac{m + 1}{3} = \frac{(m + 1)\,(\mathfrak{A} - 1)\,(m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 2)\,P}{m^2\,(m + 3\mathfrak{A} - 2)\,(2m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 1)},$$

$$p = P, \quad q = \frac{3\,(\mathfrak{A} - 1)\,P}{\mathfrak{A}\,(m + 1)}, \quad r = \frac{3\,(\mathfrak{A} - 1)\,(m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 2)\,P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\,(m + 1)\,(m + 3\mathfrak{A} - 2)}, \quad s = \frac{3\,(\mathfrak{A} - 1)\,(m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 2)\,P}{m\,(m + 3\mathfrak{A} - 2)\,(2m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 1)}.$$

Mais il faut de plus qu'il soit $q > \frac{2P}{m\mathfrak{A}}$, $r > \frac{2P}{m\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$, $s > \frac{2P}{m^2}$; ou bien:

$$\text{I.}\quad \frac{3(\mathfrak{A}-1)}{m+1} > \frac{2}{m}.$$

$$\text{II.}\quad \frac{3(\mathfrak{A}-1)(m+3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2)}{(m+1)(m+3\mathfrak{A}-2)} > \frac{2}{m}.$$

$$\text{III.}\quad \frac{3(\mathfrak{A}-1)(m+3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2)}{(m+3\mathfrak{A}-2)(2m+3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-1)} > \frac{2}{m}.$$

Puisque $\mathfrak{B} > 1$, la seconde formule est plus grande que la première, de sorte qu'il suffit de remplir celle-ci qui donne $\mathfrak{A} > \frac{5m+2}{3m}$. Donc, si nous posons $\mathfrak{A} = 2$, la troisième donne $\mathfrak{B} > \frac{m^2-20m-8}{6(m-8)}$.

150. Si nous avions pris $\mathfrak{A}$ plus grand, la valeur de $\mathfrak{B}$ serait devenue plus petite et même égale à l'unité, auquel cas la distance B s'évanouirait. Mais il faut remarquer, qu'en augmentant la valeur de $\mathfrak{A}$, la distance A et partant la longueur de la lunette devient plus grande, d'où il convient de donner à $\mathfrak{B}$ la plus grande valeur qui soit possible. Pour cet effet posons $\mathfrak{B} = \infty$ et puisque la seconde formule s'accomplit d'elle-même, il ne reste qu'à satisfaire à la première et la troisième:

$$\text{I.}\quad \frac{3(\mathfrak{A}-1)}{m+1} > \frac{2}{m} \quad \text{et} \quad \text{III.}\quad \frac{3(\mathfrak{A}-1)}{m+3\mathfrak{A}-2} > \frac{2}{m},$$

et puisque $\mathfrak{A} > 1$, celle-ci renferme déjà celle-là; il faut donc prendre $\mathfrak{A}$ en sorte qu'il soit $> \frac{5m-4}{3(m-2)}$. Or posant $\mathfrak{B} = \infty$, les déterminations des lunettes sont:

$$p = P = \frac{3}{50}m^2, \quad q = \frac{3(\mathfrak{A}-1)P}{(m+1)\mathfrak{A}}, \quad r = \frac{9(\mathfrak{A}-1)P}{(m+1)(m+3\mathfrak{A}-2)}, \quad s = \frac{3(\mathfrak{A}-1)P}{m(m+3\mathfrak{A}-2)},$$

$$A = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{3(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}(m+3\mathfrak{A}-2)}, \quad C = \frac{3(\mathfrak{A}-1)P}{m(m+3\mathfrak{A}-2)}, \quad D = \frac{(m+1)(\mathfrak{A}-1)P}{m^2(m+3\mathfrak{A}-2)};$$

le demi-diamètre du champ apparent $\varphi = \frac{3n}{m+1}$, qui est précisément trois fois plus grand qu'au cas des lunettes à deux verres convexes.

151. Donc si nous nous proposons de rendre la lunette la plus courte qu'il soit possible, il faut donner à $\mathfrak{A}$ la moindre valeur dont elle est susceptible. Posons donc $\mathfrak{A} = \frac{5m-4}{3m-6}$, et les déterminations des lunettes les plus parfaites de cette espèce seront:

$$p = P = \frac{3}{50}m^2 \text{ pouces}, \quad q = \frac{6P}{5m-4}, \quad r = \frac{6P}{m(m+1)}, \quad s = \frac{2P}{m^2},$$

$$A = \frac{2(m+1)P}{5m-4}, \quad B = \frac{6(m-1)P}{m(5m-4)}, \quad C = \frac{9P}{m^2}, \quad D = \frac{2(m+1)P}{3m^3},$$

qui donnent le demi-diamètre du champ apparent $\varphi = \frac{3n}{m+1}$.

La longueur de la lunette est:

$$A + B + C = \frac{2(m+1)(m^2-1)}{m^2(5m-4)}P,$$

laquelle était au cas des lunettes à deux verres $=\frac{m+1}{m}P$; de sorte que celle-là est à celle-ci comme: $2(m+4)(m-1)$ à $m(5m-4)$, ou comme $2m^2+6m-8$ à $5m^2-4m$; donc si la multiplication m est fort grande ou seulement $m>15$, les lunettes de cette espèce sont plus que deux fois plus courtes.

152. Considérons quelques exemples, et soit $m=25$ et partant $P=37,5$ pouces, lequel objectif suffit à observer les satellites de Jupiter, et les déterminations de la lunette seront:

$$p=37,5, \quad q=\frac{225}{121}=1,8595, \quad r=\frac{9}{16}=0,3461, \quad s=\frac{3}{25}=0,12,$$

$$A=\frac{1950}{121}=16,1157, \quad B=\frac{207}{121}=1,7107, \quad C=\frac{3}{25}=0,12, \quad D=0,0416.$$

Et si nous posons $n=\frac{1}{5}$, le demi-diamètre du champ apparent sera $\varphi=\frac{3}{130}=1^0, 19', 20''$; si nous avions mis $n=\frac{1}{4}$, nous aurions $\varphi=1^0, 39', 20''$. Or si l'on joignait à ce même objectif un seul oculaire convexe, pour en former une lunette commune à deux verres, le demi-diamètre du champ apparent ne serait que $26', 27''$, en posant $n=\frac{1}{5}$; et au cas $n=\frac{1}{4}$ on aurait $\varphi=33', 7''$. Mais ce plus grand champ apparent n'est pas le seul avantage qu'on retire de cette lunette a 4 verres: elle en est aussi plus courte; toute sa longueur, en y ajoutant la distance de l'oeil, n'étant que de 17,988 pouces ou presque de 18 pouces, pendant que la lunette à 2 verres a 40,56 ou $40\frac{1}{2}$ pouces de longueur. Voilà donc une lunette de 18 pouces fort propre à observer les satellites de Jupiter.

153. Posons aussi $m=50$, et la distance de foyer de l'objectif doit être de 150 pouces. Une lunette de deux verres serait longue 156,06 pouces et découvrirait un champ apparent dont le demi-diamètre serait $13', 29''$. Or une lunette à 4 verres de cette espèce où $m=50$ aura les déterminations suivantes:

$$p=150 \text{ pouces}, \quad q=\frac{150}{41}=3,6585, \quad r=\frac{6}{17}=0,3529, \quad s=\frac{3}{25}=0,12,$$

$$A=\frac{2550}{41}=62,1951, \quad B=\frac{147}{41}=3,5122, \quad C=\frac{3}{25}=0,12, \quad D=0,0408;$$

le demi-diamètre du champ apparent étant de $40', 27''$, posant $n=\frac{1}{5}$ et de $50', 34''$ posant $n=\frac{1}{4}$. Toute la longueur de cette lunette est donc 65,8681 ou presque de 66 pouces, et partant presque plus que de la moitié plus courte que celles à deux verres qui multiplient autant de fois. En comptant 12 pouces pour un pied, on aura une lunette de $5\frac{1}{2}$ pieds qui grossit les objets autant qu'une à deux verres de 13 pieds de longueur, avec la même clarté et qui découvre outre cela un champ neuf fois plus grand. Une telle lunette sera d'un grand usage dans l'astronomie.

154. Posons de plus $m=100$, et la distance de foyer de l'objectif doit être $p=600$ pouces. Si l'on en faisait une lunette à deux verres, nous avons vu ci-dessus que le demi-diamètre du champ apparent serait de $6', 49''$ et toute la longueur de la lunette de 612,06 pouces. Or si nous

Donnons le même objectif à une lunette de 4 verres de cette espèce, les déterminations seront les suivantes:

$$p = 600 \text{ pouces}, \quad q = \frac{275}{31} = 7{,}2581, \quad r = \frac{36}{101} = 0{,}3564, \quad s = \frac{3}{25} = 0{,}12,$$

$$A = \frac{7575}{31} = 244{,}3548, \quad B = \frac{441}{62} = 7{,}1129, \quad C = 0{,}12, \quad D = 0{,}0404;$$

le demi-diamètre du champ apparent étant de $20', 27''$, posant $n = \frac{1}{5}$; et toute la longueur de la lunette est 251,6281 pouces ou de 21 pieds à peu près, qui rendra donc non seulement les mêmes mais encore de plus grands services qu'une lunette ordinaire de 51 pieds. Une telle lunette sera donc propre à observer même les satellites de Saturne et, puisqu'elle découvre à la fois la lune tout entière, son usage doit être très important dans l'astronomie.

155. De même une lunette ordinaire de 200 pieds pourra être réduite à une de 80 pieds et partant mise en pratique. Soit donc $m = 200$, et on doit prendre $p = 2400$ pouces pour la distance du foyer de l'objectif, et une lunette ordinaire à deux verres serait longue 2412 pouces et ne découvrirait qu'un champ dont le demi-diamètre $3', 25''$. Mais faisant de cet objectif une lunette de cette espèce, on aura les déterminations suivantes:

$$p = 2400, \quad q = 14{,}4578, \quad r = 0{,}3582, \quad s = 0{,}12 \text{ pouces},$$

$$A = 968{,}6747, \quad B = 14{,}3133, \quad C = 0{,}12, \quad D = 0{,}0402 \text{ pouces};$$

donc toute la longueur ne sera que de 983,1482 pouces ou environ de 82 pieds, tandisque la lunette de deux verres, qui grossit également, a 201 pieds de longueur. Outre cela le demi-diamètre du champ apparent est ici 3 fois plus grand et $10', 15''$, avantage qui est très considérable étant joint à une longueur au delà de deux fois plus courte.

156. Il n'y a donc aucun doute que cette espèce ne renferme des lunettes très excellentes tant à cause du grand champ qu'elles découvrent que par rapport à leur longueur. Nous avons déjà remarqué ces mêmes avantages dans les lunettes à trois verres et maintenant nous voyons qu'on les peut porter à un plus haut degré par l'addition du 4ème verre. Cependant il semble qu'on puisse encore davantage raccourcir ces lunettes en posant, comme nous avons trouvé d'abord, $\mathfrak{A} = \frac{5m+2}{3m}$ et $\mathfrak{B} = 1$, car alors la distances A devient plus petite $= \frac{2(m+1)}{5m+2}P$, et la distance B s'évanouit entièrement; mais la distance C devient d'autant plus grande et partant les déterminations seront:

$$p = P, \quad q = \frac{6}{5m+2}P, \quad r = \frac{6}{5m+2}P, \quad s = \frac{1}{2m}P,$$

$$A = \frac{2(m+1)}{5m+2}P, \quad B = 0, \quad C = \frac{(m+1)(3m+2)}{2m(5m+2)}P, \quad D = \frac{m+1}{6m^2}P.$$

Ainsi posant $m = 100$ et $P = 600$, on aura:

$$p = 600, \quad q = 7{,}171, \quad r = 7{,}171, \quad s = 3,$$

$$A = 241{,}434, \quad B = 0, \quad C = 181{,}980, \quad D = 1{,}01,$$

de sorte que cette lunette est beaucoup plus longue que la précédente. Il est donc plus avantageux de se tenir aux déterminations précédentes où il a été supposé $\mathfrak{B} = \infty$.

VI. Cas des lunettes à quatre verres, *où $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$ sont négatifs et $\mathfrak{B}$ positif.*

157. Les lunettes de cette espèce représentent encore les objets renversés, et en faisant le développement de nos formules, comme auparavant, on pourra faire en sorte que le demi-diamètre du champ apparent devient aussi $\varphi = \frac{3n}{m+1}$; nous n'avons qu'à y mettre $\mathfrak{B}$ négatif, puisque $\mathfrak{C}$ devient de soi-même négatif. Nous avons donc, après avoir satisfait aux premières conditions

$$A = \frac{\mathfrak{A}-1}{\mathfrak{A}} P, \quad B = \frac{3(\mathfrak{A}-1)(\mathfrak{B}+1)}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m+3\mathfrak{A}-2)} P, \quad C = \frac{3(\mathfrak{A}-1)(\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+2)}{m\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m+3\mathfrak{A}-2)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2m+1)} P$$

$$\text{et} \quad D = \frac{(m+1)(\mathfrak{A}-1)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+2)}{m^2(m+3\mathfrak{A}-2)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2m+1)} P;$$

et ensuite:

$$p = P, \quad q = \frac{3(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}(m+1)}, \quad r = \frac{3(\mathfrak{A}-1)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+2)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m+1)(m+3\mathfrak{A}-2)}, \quad s = \frac{3(\mathfrak{A}-1)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+2)P}{m(m+3\mathfrak{A}-2)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2m+1)}$$

et les autres conditions à remplir sont:

$$\text{I.}\ \frac{3(\mathfrak{A}-1)}{m+1} > \frac{2}{m}, \quad \text{II.}\ \frac{3(\mathfrak{A}-1)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+2)}{(m+1)(m+3\mathfrak{A}-2)} > \frac{2}{m}, \quad \text{III.}\ \frac{3(\mathfrak{A}-1)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+2)}{(m+3\mathfrak{A}-2)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2m+1)} > \frac{2}{m}.$$

158. Donc pour que les distances A, B, C, D soyent positives, il faut qu'il soit $\mathfrak{A} > 1$ et $\mathfrak{A}\mathfrak{B} > m$, et partant $3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 2m + 2 > m + 2$. Par conséquent il suffit de remplir la première et la troisième condition, puisque la seconde y est déjà renfermée. Or la première donne $\mathfrak{A} > \frac{5m+2}{3m}$; donc puisqu'il est avantageux de prendre $\mathfrak{A}$ si petit qu'il est possible, posons $\mathfrak{A} = \frac{5m+2}{3m}$ et la troisième condition donne $6\mathfrak{A}\mathfrak{B} < m^2 + 5m - 2$, et il faut qu'il soit $\mathfrak{A}\mathfrak{B} > m$; ce qui ne saurait avoir lieu, à moins qu'il ne fût $m^2 + 5m - 2 > 6m$ ou $m^2 > m + 2$ ou $m > 2$, ce qu'on peut toujours supposer. Ayant donc pris $\mathfrak{A} = \frac{5m+2}{3m}$, il faut qu'il soit:

$$\mathfrak{B} < \frac{m(m^2+5m-2)}{2(5m+2)} \quad \text{et} \quad \mathfrak{B} > \frac{3m^2}{5m+2}.$$

Or, plus on prend grand $\mathfrak{B}$ et plus deviendra petite la distance B, et la valeur de $\mathfrak{A}$ rend déjà la distance A plus petite qu'au cas précédent. Cependant la distance B devient plus grande, puisqu'il n'est pas permis de prendre $\mathfrak{B} = \infty$.

159. Or posant $\mathfrak{A} = \frac{5m+2}{3m}$, pour rendre la distance A la plus petite qu'il soit possible, les déterminations de la lunette seront:

$$p = P, \quad q = \frac{6P}{5m+2}, \quad r = \frac{6[(5m+2)\mathfrak{B} - m^2 + 2m]P}{(m+1)(m+2)(5m+2)\mathfrak{B}}, \quad s = \frac{2[(5m+2)\mathfrak{B} - m^2 + 2m]P}{m(m+2)[(5m+2)\mathfrak{B} - 2m^2 + m]}$$

$$A = \frac{2(m+1)P}{5m+2}, \quad B = \frac{6m(\mathfrak{B}+1)P}{(m+2)(5m+2)\mathfrak{B}}, \quad C = \frac{2[(5m+2)\mathfrak{B} - 3m^2][(5m+2)\mathfrak{B} - m^2 + 2m]P}{m(m+2)(5m+2)\mathfrak{B}[(5m+2)\mathfrak{B} - 2m^2 + m]}$$

$$\text{et} \quad D = \frac{2(m+1)[(5m+2)\mathfrak{B} - m^2 + 2m]P}{3m^2(m+2)[(5m+2)\mathfrak{B} - 2m^2 + m]},$$

pourvu qu'on prenne:

$$\mathfrak{B} > \frac{3m^2}{5m+2} \quad \text{et} \quad \mathfrak{B} < \frac{m(m^2+5m-2)}{2(5m+2)}.$$

Or puisqu'il semble avantageux de prendre $\mathfrak{B}$ si grand qu'il est possible, posons $\mathfrak{B} = \frac{m(m^2+5m-2)}{2(5m+2)}$, et les déterminations seront:

$$p = P, \quad q = \frac{6}{5m+2}P, \quad r = \frac{6}{m^2+5m-2}P, \quad s = \frac{2}{m^2}P,$$

$$A = \frac{2(m+1)P}{5m+2}, \quad B = \frac{6(m+1)(m+2)P}{(5m+2)(m^2+5m-2)}, \quad C = \frac{2(m+1)(m-2)P}{m^2(m^2+5m-1)} \quad \text{et} \quad D = \frac{2(m+1)P}{3m^3}.$$

160. Puisque m marque toujours un nombre assez considérable, l'application sera rendue plus aisée par ces formules:

$$q = \frac{6}{5}P\left(\frac{1}{m} - \frac{2}{5m^2} + \frac{4}{25m^3} - \frac{8}{125m^4}\right) = \frac{9}{125}\left(m - \frac{2}{5} + \frac{4}{25m} - \frac{8}{125m^2}\right),$$

$$r = 6P\left(\frac{1}{m^2} - \frac{5}{m^3} + \frac{27}{m^4}\right) = 3s\left(1 - \frac{5}{m} + \frac{27}{m^2}\right) = \frac{9}{25}\left(1 - \frac{5}{m} + \frac{27}{m^2}\right),$$

$$s = \frac{2}{m^2}P = \frac{6}{50} \quad \text{à cause de} \quad P = \frac{3}{50}m^2.$$

$$A = \frac{2}{5}P + \frac{1}{3}q,$$

$$B = q - \frac{2}{5}r + \frac{144}{25m^3}P - \frac{3888}{125m^4}P = q - \frac{2}{5}r + \frac{216}{625m} - \frac{5832}{3125m^2},$$

$$C = 5\left(1 - \frac{6}{m} + \frac{30}{m^2}\right),$$

$$D = 5\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3m}\right);$$

et le demi-diamètre du champ apparent est toujours $\varphi = \frac{3n}{m+1}$. Soit $m = 25$ et $P = 37,5$, et les déterminations pour ce cas seront:

$$p = 37,5, \quad q = 1,77, \quad r = 0,30, \quad s = 0,12,$$

$$A = 15,59, \quad B = 1,67, \quad C = 0,09, \quad D = 0,0416;$$

d'où la longueur de la lunette est 17,39 qui est presque d'un pouce plus petite qu'au cas précédent, de sorte que ce cas comprend l'espèce la plus parfaite des lunettes à 4 verres.

Table des lunettes à 4 verres,

qui semblent les plus parfaites.

Multiplication.	Distances de foyer du 1r oculaire.	du 2d oculaire.	du 3e oculaire.	Distances de l'objectif au 1r ocul.	du 1r ocul. au 2d ocul.	du 2d oc. au 3e oc.	du 3e oc. à l'oeil.	Demi-diam. du champ app. moyen.
m	q	r	s	AB	BC	CD	DE	
5	0,33	0,19	0,12	0,71	0,30	$0{,}04\frac{1}{2}$	0,05	5° 43′ 11″
10	0,69	0,24	0,12	2,63	0,62	0,07	0,04	3 7 7
15	1,05	0,27	0,12	5,75	0,97	0,08	0,04	2 8 42
20	1,41	0,29	0,12	10,07	1,31	0,09	0,04	1 38 3
25	1,77	0,30	0,12	15,59	1,67	0,09	0,04	1 19 16
30	2,13	0,31	0,12	22,31	2,03	0,10	0,04	1 6 30
35	2,49	0,31	0,12	30,23	2,38	0,10	0,04	0 57 16
40	2,85	0,32	0,12	39,35	2,74	0,11	0,04	0 50 18
45	3,21	0,32	0,12	49,67	3,10	0,11	0,04	0 44 51
50	3,57	0,33	0,12	61,19	3,45	0,11	0,04	0 40 27
60	4,29	0,33	0,12	87,83	4,16	0,11	0,04	0 33 51
70	5,01	0,33	0,12	119,22	4,88	0,11	0,04	0 29 3
80	5,73	0,34	0,12	155,51	5,59	0,11	0,04	0 25 27
90	6,45	0,34	0,12	196,55	6,31	0,11	0,04	0 22 39
100	7,17	0,34	0,12	242,39	7,03	0,11	0,04	0 20 27
120	8,61	0,34	0,12	348,47	8,47	0,11	0,04	0 17 3
140	10,05	0,35	0,12	473,75	9,91	0,12	0,04	0 14 39
160	11,49	0,35	0,12	618,23	11,36	0,12	0,04	0 12 48
180	12,93	0,35	0,12	781,91	12,79	0,12	0,04	0 11 28
200	14,37	0,35	0,12	964,79	14,23	0,12	0,04	0 10 15
225	16,17	0,35	0,12	1220,39	16,03	0,12	0,04	0 9 9
250	17,97	0,35	0,12	1505,99	17,83	0,12	0,04	0 8 12
275	19,77	0,35	0,12	1821,59	19,63	0,12	0,04	0 7 27
300	21,57	0,35	0,12	2167,19	21,43	0,12	0,04	0 6 51
350	25,17	0,36	0,12	2948,39	25,03	0,12	0,04	0 5 54
400	28,77	0,36	0,12	3849,59	28,63	0,12	0,04	0 5 9
450	32,37	0,36	0,12	4870,79	32,23	0,12	0,04	0 4 33
500	35,97	0,36	0,12	6011,99	35,83	0,12	0,04	0 4 6

Les distances de foyer de l'objectif doivent être prises des tables précédentes.

VII. Cas des lunettes à quatre verres,

$\mathfrak{A}$ *étant positif et* $\mathfrak{B}$ *et* $\mathfrak{C}$ *négatifs.*

161. Ces lunettes représentent encore les objets renversés, mais puisque $\mathfrak{A}$ est positif, leur longueur sera plus grande qu'au cas précédent.

Or posant $-\mathfrak{B}$ et $-\mathfrak{C}$ pour $+\mathfrak{B}$ et $+\mathfrak{C}$ dans les formules principales, nous aurons:

$$A = \frac{(1+\mathfrak{A})}{\mathfrak{A}} P, \quad B = \frac{\mathfrak{B}-1}{\mathfrak{B}} Q, \quad C = \frac{\mathfrak{C}-1}{\mathfrak{C}} R \quad \text{et} \quad D = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{m^2} - \frac{(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} - \frac{(\mathfrak{C}-1)}{\mathfrak{C}^2}$$

de sorte qu'à cause de $(\mathfrak{B}-1)Q > 0$ et $(\mathfrak{C}-1)R > 0$, il faut qu'il soit:

$$(1+\mathfrak{A})P > \mathfrak{A}^2(\mathfrak{B}-1)Q + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2(\mathfrak{C}-1)R.$$

Ensuite les distances de foyer sont:

$$p = P, \quad q = \frac{PQ}{P+\mathfrak{A}Q}, \quad r = \frac{QR}{Q-\mathfrak{B}R}, \quad s = -\frac{R}{\mathfrak{C}},$$

les trois valeurs de $\frac{n}{\varphi}$:

$$\text{I.}\quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + \mathfrak{A} + 1,$$

$$\text{II.}\quad \frac{n^{I}}{\varphi} = + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} - \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} - \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} - \mathfrak{A} + \mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

$$\text{III.}\quad \frac{n^{I}}{\varphi} = - \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} - \mathfrak{A}\mathfrak{B} + m = - \frac{m^2 D}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R}.$$

162. J'ai donné à ces formules les signes, afin qu'on en puisse tirer le plus grand champ apparent, et partant il faut que R soit une quantité négative et par conséquent $\mathfrak{C} < 1$. De là nous tirons:

$$\frac{n + n^{I} + n^{II}}{\varphi} = m + 1 \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{n + n^{I} + n^{II}}{m+1};$$

d'où l'on obtient le plus grand champ apparent en rendant à n, n^{I}, n^{II} les plus grandes valeurs dont ces lettres sont susceptibles. Posons donc $n^{I} = n^{II} = n$, pour avoir $\varphi = \frac{3n}{m+1}$, et à cause de $\frac{n}{\varphi} = \frac{n^{I}}{\varphi} = \frac{n^{II}}{\varphi} = \frac{m+1}{3}$, nous aurons:

$$\text{I.}\quad \frac{m-2}{3} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + \mathfrak{A}; \quad \text{donc} \quad Q = \frac{3(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}(m-3\mathfrak{A}-2)},$$

$$\text{II.}\quad \frac{2(m+1)}{3} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} - \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} + 1 + \mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

d'où l'on tire:

$$R = \frac{3(1+\mathfrak{A})(m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m-3\mathfrak{A}-2)(2m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-1)};$$

et puisque R doit être une quantité négative, il faut qu'il soit ou $3\mathfrak{A} > m-2$ ou $3\mathfrak{A}\mathfrak{B} > m-2$.

163. Or ces valeurs étant substituées donnent les déterminations suivantes:

$$p = \frac{P}{m}, \quad q = \frac{3(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}(m+1)}, \quad r = \frac{3(1+\mathfrak{A})(m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m+1)(m-3\mathfrak{A}-3}, \quad s = \frac{3(1+\mathfrak{A})(m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2)P}{m(m-3\mathfrak{A}-2)(2m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-1)},$$

$$A = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{3(1+\mathfrak{A})(\mathfrak{B}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m-3\mathfrak{A}-2)}, \quad C = \frac{3(1+\mathfrak{A})(m-\mathfrak{A}\mathfrak{B})(m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2)P}{m\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m-3\mathfrak{A}-2)(2m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-1)}$$

$$\text{et} \quad D = - \frac{(1+\mathfrak{A})(m+1)(m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2)P}{m^2(m-3\mathfrak{A}-2)(2m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-1)}.$$

Maintenant nous devons satisfaire à ces conditions:

$$\text{I.}\quad \frac{3(1+\mathfrak{A})}{m+1} > \frac{2}{m},$$

$$\text{II.}\quad \frac{3(1+\mathfrak{A})(m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2)}{(m+1)(m-3\mathfrak{A}-2)} > \frac{2}{m},$$

$$\text{III.}\quad \frac{3(1+\mathfrak{A})(m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2)}{(m-3\mathfrak{A}-2)(2m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-1)} > \frac{2}{m};$$

où il faut observer que s est une quantité positive étant $s = +\frac{3mD}{m+1}$, et puisque $\mathfrak{C} < 1$ [illegible] avons $m < \mathfrak{AB}$, et partant:

$$C = \frac{-3(1+\mathfrak{A})(\mathfrak{AB}-m)(m-3\mathfrak{AB}-2)P}{m\mathfrak{AB}(m-3\mathfrak{A}-2)(2m-3\mathfrak{AB}-1)}.$$

164. Il faut donc que $\frac{m-3\mathfrak{AB}-2}{(m-3\mathfrak{A}-2)(2m-3\mathfrak{AB}-1)}$, soit une quantité négative et que $\frac{\mathfrak{B}-1}{m-3\mathfrak{A}-2}$ soit une quantité positive, d'où résultent deux cas à considérer selon que $\mathfrak{B} > 1$ ou $\mathfrak{B} < 1$. Soit donc d'abord $\mathfrak{B} > 1$ et il faut qu'il soit $3\mathfrak{A} < m-2$ et $3\mathfrak{AB} > m-2$, mais pourtant $3\mathfrak{AB} < 2m-1$. Or la première condition exige $3m\mathfrak{A}+3m > 2m+1$, ce qui est toujours vrai, et les deux autres doivent être présentées en sorte:

$$\text{II.}\quad \frac{3(1+\mathfrak{A})(3\mathfrak{AB}-m+2)}{(m+1)(m-3\mathfrak{A}-2)} > \frac{2}{m} \quad \text{et} \quad \text{III.}\quad \frac{3(1+\mathfrak{A})(3\mathfrak{AB}-m+2)}{(m-3\mathfrak{A}-2)(2m-3\mathfrak{AB}-1)} > \frac{2}{m};$$

mais puisque $m-3\mathfrak{AB}-2 < 0$, en ajoutant de part et d'autre $m+1$, on aura $2m-3\mathfrak{AB}-1 < m+1$ et partant en satisfaisant à la II., l'autre sera aussi remplie. De là nous tirons en égalant la seconde à $\frac{2}{m}$:

$$\mathfrak{AB} = \frac{(m-2)(5m+2)+3\mathfrak{A}(m^2-4m-2)}{9m(1+\mathfrak{A})},$$

et cette valeur satisfait aussi à la condition $3\mathfrak{AB} < 2m-1$. Mais dans ce cas on trouve $\mathfrak{AB} < m$, de sorte que la distance C deviendrait négative.

165. Soit donc $\mathfrak{B} < 1$ et partant $3\mathfrak{A} > m-2$, d'où la fraction $\frac{m-3\mathfrak{AB}-2}{2m-3\mathfrak{AB}-1}$ doit être positive, par conséquent ou $3\mathfrak{AB} < m-2$ ou $3\mathfrak{AB} > 2m-1$. Au premier cas on aura:

$$\text{II.}\quad \frac{3(1+\mathfrak{A})(m-3\mathfrak{AB}-2)}{(m+1)(3\mathfrak{A}-m+2)} > \frac{2}{m} \quad \text{et} \quad \text{III.}\quad \frac{3(1+\mathfrak{A})(m-3\mathfrak{AB}-2)}{(3\mathfrak{A}-m+2)(2m-3\mathfrak{AB}-1)} > \frac{2}{m},$$

où $2m-3\mathfrak{AB}-1$ étant $> m+1$, la III. formule renferme la seconde. Mais la condition $\mathfrak{AB} < \frac{m-2}{3}$ répugne à celle qui exige $\mathfrak{AB} > m$. Il ne reste donc que le cas $3\mathfrak{AB} > 2m-1$ qui donne:

$$\text{II.}\quad \frac{3(1+\mathfrak{A})(3\mathfrak{AB}-m+2)}{(m+1)(3\mathfrak{A}-m+2)} > \frac{2}{m}, \qquad \text{III.}\quad \frac{3(1+\mathfrak{A})(3\mathfrak{AB}-m+2)}{(3\mathfrak{A}-m+2)(3\mathfrak{AB}-2m+1)} > \frac{2}{m};$$

ou à cause de $\mathfrak{AB} > m$ il est $3\mathfrak{AB}-2m+1 > m+1$, de sorte que la III. formule renferme la seconde. Posons donc:

$$\frac{3\mathfrak{AB}-m+2}{3\mathfrak{AB}-2m+1} > \frac{2(3\mathfrak{A}-m+2)}{3m(1+\mathfrak{A})},$$

et de là on tirera:

$$3\mathfrak{AB} > \frac{(m-2)(7m-2)+3\mathfrak{A}(m^2-6m+2)}{5m-4+3\mathfrak{A}(m-2)}.$$

Or cela est toujours vrai, si $\mathfrak{AB} > m$.

166. Nous n'avons donc qu'à remplir ces conditions:

$$\text{I. } \mathfrak{B} < 1, \qquad \text{II. } \mathfrak{A} > \frac{m-2}{3} \quad \text{et} \quad \text{III. } \mathfrak{A}\mathfrak{B} > m,$$

la troisième renferme déjà la seconde à cause de $\mathfrak{B} < 1$. Ayant donc pris $\mathfrak{B} < 1$, on n'a qu'à prendre $\mathfrak{A} > \frac{m}{\mathfrak{B}}$; et les déterminations de la lunette seront:

$$p = P, \quad q = \frac{3(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}(m+1)}, \quad r = \frac{3(1+\mathfrak{A})(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+2)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m+1)(3\mathfrak{A}-m+2)}, \quad s = \frac{3(1+\mathfrak{A})(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+2)P}{m(3\mathfrak{A}-m+2)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2m+1)},$$

$$A = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{3(1+\mathfrak{A})(1-\mathfrak{B})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(3\mathfrak{A}-m+2)}, \quad C = \frac{3(1+\mathfrak{A})(\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+2)P}{m\mathfrak{A}\mathfrak{B}(3\mathfrak{A}-m+2)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2m+1)}$$

$$\text{et} \quad D = \frac{(1+\mathfrak{A})(m+1)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+2)P}{m^2(3\mathfrak{A}-m+2)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2m+1)}.$$

Alors le demi-diamètre du champ apparent moyen sera $\varphi = \frac{3n}{m+1}$. Une des limites principales de cette espèce de lunettes provient en posant $\mathfrak{B} = 1$ et $\mathfrak{A} = m$, qui donne:

$$p = P, \quad q = r = s = \frac{3}{m}P, \quad A = \frac{1+m}{m}P, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = \frac{(1+m)}{m^2}P;$$

on déduit des lunettes à deux verres convexes, en triplant le verre oculaire pour lui donner une ouverture trois fois plus grande. On peut aussi faire que l'une ou l'autre des distances B et C s'évanouisse.

167. Un cas particulier mérite encore d'être remarqué, si l'on met $\mathfrak{B} = 0$ et $\mathfrak{A} = \infty$, mais en sorte que $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ soit un nombre fini $> m$; soit donc $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mu$ et les déterminations de la lunette seront:

$$p = P, \quad q = \frac{3P}{m+1}, \quad r = \frac{(3\mu-m+2)P}{\mu(m+1)}, \quad s = \frac{(3\mu-m+2)P}{m(3\mu-2m+1)},$$

$$A = P, \quad B = \frac{P}{\mu}, \quad C = \frac{(\mu-m)(3\mu-m+2)P}{\mu m(3\mu-2m+1)}, \quad D = \frac{(m+1)(3\mu-m+2)P}{3m^2(3\mu-2m+1)},$$

pourvu qu'on prenne $\mu > m$. Donc si l'on met $\mu = \infty$, on aura:

$$p = P, \quad q = \frac{3P}{m+1}, \quad r = \frac{3P}{m+1}, \quad s = \frac{P}{m},$$

$$A = P, \quad B = 0, \quad C = \frac{P}{m}, \quad D = \frac{m+1}{3m^2}P.$$

Ou si l'on met $\mu = m$, on aura l'autre limite de ce cas:

$$p = P, \quad q = \frac{3P}{m+1}, \quad r = \frac{2P}{m}, \quad s = \frac{2P}{m},$$

$$A = P, \quad B = \frac{P}{m}, \quad C = 0, \quad D = \frac{2(m+1)}{3m^2}P;$$

Tous les autres cas où $\mu > m$ sont compris entre ces deux limites.

168. Posons pour donner un exemple $\mu = \frac{4m+1}{3}$, pour avoir $3\mu - m + 2 = 3(m+1)$ et $3\mu - 2m + 1 = 2(m+1)$, et les déterminations de nos lunettes seront:

$$p = P, \quad q = \frac{3P}{m+1}, \quad r = \frac{9P}{4m+1}, \quad s = \frac{3P}{2m},$$

$$A = P, \quad B = \frac{3P}{4m+1}, \quad C = \frac{3(m+1)P}{2m(4m+1)}, \quad D = \frac{(m+1)P}{2m^2}.$$

Ainsi posant $m = 50$ ou $P = 150$ pouces, la lunette doit être construite en sorte:

$$p = 150, \quad q = 8{,}823, \quad r = 6{,}716, \quad s = 4{,}5,$$

$$A = 150, \quad B = 2{,}239, \quad C = 1{,}141, \quad D = 1{,}53;$$

et la longueur de la lunette est $= 153{,}38$ pouces, un peu plus grande que si l'on n'employait que deux verres. Mais l'avantage de ces lunettes s'évanouit toujours à l'égard des espèces précédentes, qui, étant au-delà de la moitié plus courtes, découvrent un aussi grand champ. Il ne reste donc qu'à examiner la huitième espèce.

VIII. Cas des lunettes à quatre verres, *les trois nombres $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ étant négatifs.*

169. Ces lunettes représentent les objets debout, et posant la multiplication $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = m$, les déterminations, après avoir mis $-\mathfrak{A}$, $-\mathfrak{B}$, $-\mathfrak{C}$, pour $+\mathfrak{A}$, $+\mathfrak{B}$, $+\mathfrak{C}$, seront:

$$A = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}}, \quad C = \frac{(\mathfrak{C}-1)R}{\mathfrak{C}}$$

$$\text{et} \quad D = -\frac{(\mathfrak{A}-1)P}{m^2} - \frac{(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} - \frac{(\mathfrak{C}-1)R}{\mathfrak{C}^2} = -\frac{\mathfrak{A}A - \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}B - \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}C}{m^2}.$$

Cette distance étant donc nécessairement négative, il faut appliquer l'oeil immédiatement au dernier verre oculaire et avoir égard au limite qui répond à l'ouverture de la pupille et qui donne:

$$\frac{\omega}{\varphi} = \frac{A}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} + \frac{\mathfrak{A}B}{\mathfrak{C}} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}C,$$

les autres étant:

$$\text{I.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}Q} - \mathfrak{A} + 1 = \frac{\mathfrak{A}}{Q} - \mathfrak{A} + 1,$$

$$\text{II.} \quad \frac{n'}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} - \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}Q} + \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} + \mathfrak{A} - \mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

$$\text{III.} \quad \frac{n''}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} - \mathfrak{A}\mathfrak{B} + m = \frac{\mathfrak{C}}{R} \cdot \frac{\omega}{\varphi},$$

$$\text{et} \quad p = P, \quad q = \frac{PQ}{P - \mathfrak{A}Q}, \quad r = \frac{QR}{Q - \mathfrak{B}R}, \quad s = -\frac{R}{\mathfrak{C}}.$$

Mais puisque le champ apparent devient fort petit je ne m'arrête pas à développer plus amplement ce cas.

Fig. 265. p. 675.

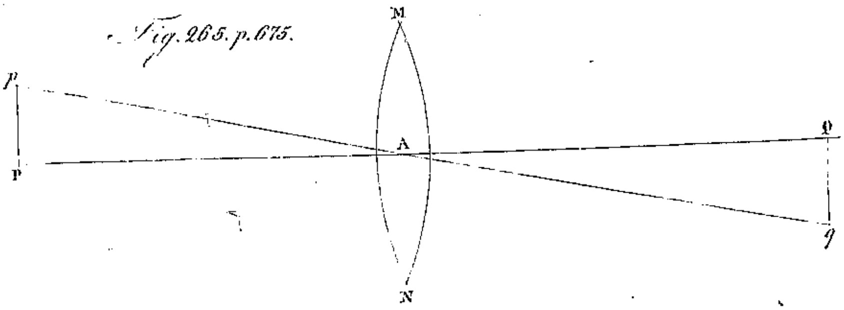

Fig. 267. p. 680.

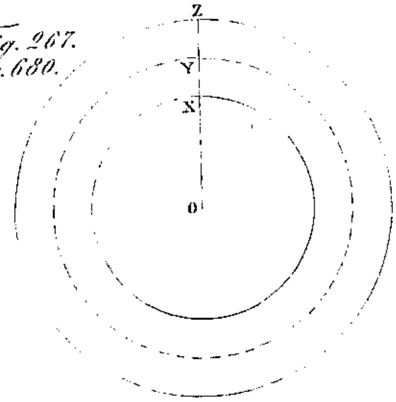

Fig. 266. p. 676.

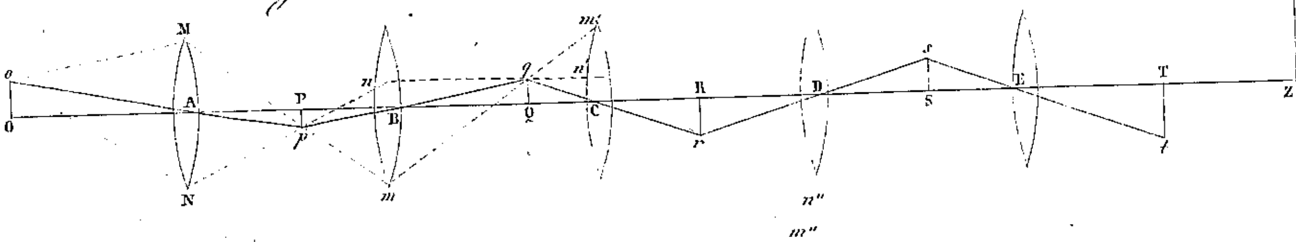

Fig. 268. p. 756.

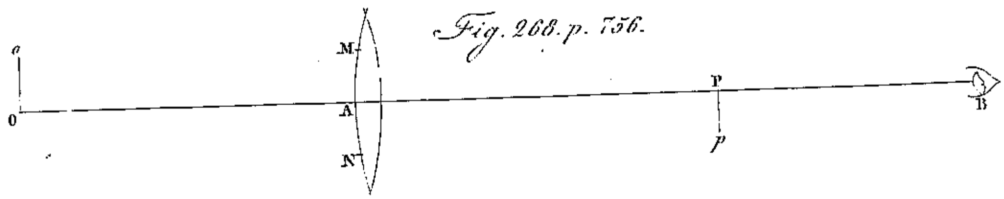

Fig. 269. p. 759.

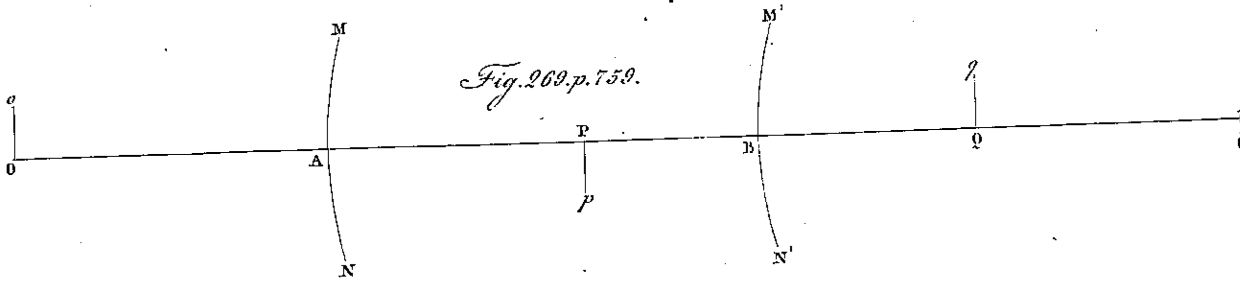

Fig. 270. p. 770.

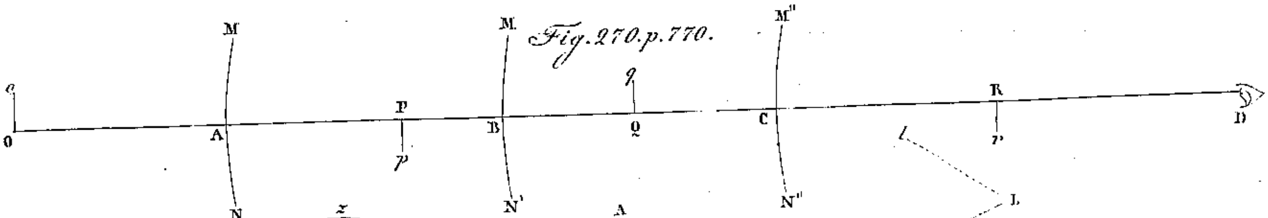

Fig. 271. p. 784.

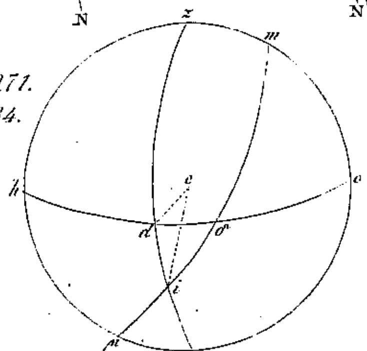

Fig. 272. p. 785.