1862

Von der Kraft der Rammen, Pfähle einzuschlagen

Leonhard Euler

X.

Von der Kraft der Rammen, Pfähle einzuschlagen.

(Conv. acad. exhib. d. 18 Maii 1772.)

---

1. Zuerst ist zu betrachten der Hammer selbst, dessen Gewicht gesetzt wird $= P$, und die Höhe, aus welcher er herabfällt bis zu dem Stosse, sei $= a$; also, dass seine Geschwindigkeit in einer Secunde betragen wird $2\sqrt{ga}$, wo g die Höhe bedeutet, aus der ein Körper in einer Secunde fällt. Der Kürze halber aber sei diese Geschwindigkeit $= c$, so dass $c = 2\sqrt{ga}$.

2. Um sich den Stoss und die Wirkung desselben auf den Pfahl deutlich vorzustellen, so soll der Hammer nicht unmittelbar auf den Pfahl stossen, sondern es soll sich dazwischen ein Elastrum gleichsam als ein Kissen auf dem Pfahl befinden, also, dass der Stoss nicht anders, als durch dieses Kissen auf den Pfahl wirkt.

3. Im ersten Anfang sei die Dicke dieses Elastri $= \alpha$, in welchem Zustande dasselbe keinen Widerstand leistet; sobald aber dasselbe auch nur ein wenig zusammengedrückt wird, so soll sich eine elastische Kraft äussern, um dasselbe wieder in seinen natürlichen Zustand zu versetzen.

4. Dieses Kissen dienet dazu, um uns die Wirkung des Hammers auf den Pfahl, wodurch derselbe die Theilchen des Holzes zusammendrückt, auf eine bestimmtere Art zu versinnlichen.

5. Man kann sich auch statt dieses Kissens, eines mit Luft angefüllten Gefässes bedienen, auf dessen Deckel der Hammer stösst und denselben näher gegen den Boden treibet; wodurch die Luft in einen kleineren Raum zusammengedrückt wird, und also eine desto grössere Kraft ausübet. Demnach wird α die Höhe dieses Gefässes andeuten, wo sich die Luft noch in ihrem natürlichen Zustande befindet. Hierdurch erhalten wir nun eine Regel, nach welcher diese widerstehende Kraft bequem ausgedrückt werden kann.

6. Denn ist entweder das Kissen näher zusammengepresst, oder der Deckel des Gefässes näher gegen den Boden gedrückt worden, so dass die Dicke desselben $= y$, und also kleiner als α geworden, so wird sich die Dichtigkeit der nun zusammengepressten Luft verhalten wie $\alpha : y$, und also die Dichtigkeit sein $= \frac{\alpha}{y}$, und um eben soviel grösser wird auch die elastische Kraft der Luft

sein, wovon aber der Druck der natürlichen Luft abgezogen werden muss; weswegen der gegenwärtige Druck proportional sein wird dieser Formel: $\frac{\alpha-y}{y}$. Man setze demnach diese widerstehende Kraft $= A \cdot \frac{\alpha-y}{y}$.

7. Aus dieser Formel erhellet, dass, wenn $y=\alpha$, und also das Kissen in seinem natürlichen Zustande sich befindet, diese Kraft $=0$ werde; dieselbe aber um so viel grösser anwachse, je kleiner y wird; so dass wenn $y=0$ werden sollte, die Kraft sogar unendlich sein würde; wodurch also die ungeheure Kraft des Stosses auf eine verständliche Art wird erklärt werden können.

8. Was den Pfahl selbst betrifft, so ist nicht nur die Masse desselben, welche $=M$, zu erwägen, sondern insbesondere der grosse Widerstand, welchen derselbe antrifft, indem er in die Erde geschlagen wird. Wir wollen denselben durch den Buchstaben Q andeuten, wodurch diejenige Kraft ausgedrückt wird, welche dem Pfahl widersteht, sobald er weiter in die Erde getrieben wird. Daher so lang die stossende Kraft des Hammers kleiner ist als dieser Widerstand, so lang bleibt der Pfahl unbeweglich.

9. Dieses vorausgesetzt, lasset uns betrachten, wie sich Alles nach einer Zeit von t Secunden verhalten werde. Alsdann sei nun der Hammer von A bis X (Fig. 161) gekommen, also dass $AX=x$, und die Dicke des Gefässes sei nun $XY=y$, und folglich die Kraft desselben $= A\cdot\frac{\alpha-y}{y}$, wodurch dasselbe theils dem Hammer widersteht, theils den Pfahl hinabzudrücken sich bemühet.

10. Da im Anfang das obere Ende des Pfahles in B war, also, dass $AB=\alpha$, nun aber dasselbe sich in Y befindet, so ist der Raum, durch den der Pfahl schon fortgetrieben worden, $BY=x+y-\alpha$; wobei aber zu merken, dass anfänglich, so lange die Kraft des Hammers den Widerstand des Pfahles Q nicht zu überwinden vermögend ist, der Pfahl noch nicht weicht. So lange also wird $BY=0$ bleiben und mithin $y=\alpha-x$.

11. Nun lasst uns, nach den Grundsätzen der Bewegung, erstlich die Bewegung des Hammers bestimmen. Da nun derselbe, in der Zeit t, durch den Raum $AX=x$ fortgerückt ist, so ist seine Geschwindigkeit $=\frac{dx}{dt}$, und also die Beschleunigung $=\frac{ddx}{dt^2}$. Nun aber ist die forttreibende Kraft des Hammers seine Schwere $=P$, die widerstehende Kraft aber $=A\cdot\frac{\alpha-y}{y}$, folglich die Kraft selbst $=P-A\cdot\frac{\alpha-y}{y}$. Da nun die Masse des Hammers auch $=P$, so bekommt man

$$\frac{ddx}{dt^2}=2g\,(1-\frac{A}{P}\cdot\frac{\alpha-y}{y}),$$

aus welcher die Bewegung des Hammers zu bestimmen ist.

12. Hieraus lässt sich nun die Bewegung des Hammers von Anfang an, bis der Pfahl anfängt zu weichen, bestimmen; denn da alsdann $y=\alpha-x$ ist, so erhalten wir

$$\frac{ddx}{dt^2}=2g\,(1-\frac{A}{P}\cdot\frac{x}{\alpha-x}).$$

Man multiplicire mit $2dx$ und integrire

$$\frac{dx^2}{dt^2} = 2g\left(2x + \frac{2Ax}{P} + \frac{2\alpha A}{P}\, l\,(\alpha - x) + \text{Const.}\right).$$

Hier bedeutet $\frac{dx^2}{dt^2}$ das Quadrat der Geschwindigkeit, welche im Anfange, da $x = 0$ gesetzt worden $= c = 2\sqrt{ga}$. Folglich bekommen wir, um C zu bestimmen,

$$c^2 = 4ga = 2g\,(-\frac{2\alpha A}{P}\, l\alpha + \text{Const.})$$

$$\text{und} \quad C = 2a - \frac{2\alpha A}{P}\, l\alpha.$$

Daher unsere Gleichung sein wird

$$\frac{dx^2}{dt^2} = 4g\,(\frac{A+P}{P}\cdot x - \frac{\alpha A}{P}\, l\,.\,\frac{\alpha}{\alpha - x} + a).$$

Hieraus wird nun die Bewegung des Hammers bestimmt, so lange, bis die Kraft des Kissens dem Widerstande des Pfahles gleich wird; denn da x zunimmt, so nimmt y um so viel ab, und daher die Kraft $A\cdot\frac{\alpha - y}{y}$ immer zu. Wir wollen demnach setzen, dass, wenn $x = \beta$, und also $y = \alpha - \beta$, alsdann die Kraft des Kissens $= A\cdot\frac{\beta}{\alpha - \beta}$ dem Widerstande des Pfahles gleich werde; also dass $Q = \frac{A\beta}{\alpha - \beta}$, mithin $A = \frac{Q\,(\alpha - \beta)}{\beta}$. Für den Zeitpunkt also, da der Pfahl anfängt zu rücken, werden wir haben

$$\frac{dx^2}{dt^2} = 4g\,(\frac{A+P}{P}\cdot\beta - \frac{\alpha A}{P}\, l\cdot\frac{\alpha}{\alpha - \beta} + a),$$

welches also nicht Statt finden kann, wenn nicht

$$\frac{A+P}{P}\cdot\beta + a > \frac{\alpha A}{P}\, l\cdot\frac{\alpha}{\alpha - \beta} \quad \text{ist.}$$

Denn wenn diese Formel $= 0$ wird, ehe $x = \beta$, so hat der Stoss sein Ende erreicht; folglich wird der Pfahl nur alsdann eingeschlagen, wenn

$$a > \frac{\alpha A}{P}\, l\cdot\frac{\alpha}{\alpha - \beta} - \frac{A+P}{P}\cdot\beta \quad \text{ist.}$$

13. Da von nun an nicht mehr $y = \alpha - x$ ist, so werden wir für die fernere Bewegung des Hammers diese Gleichung zu betrachten haben:

$$\frac{ddx}{dt^2} = 2g\,(1 - \frac{A}{P}\cdot\frac{\alpha - y}{y}),$$

und da der Pfahl schon durch den Raum $x + y - \alpha$ hineingetrieben worden, die hineintreibende Kraft aber $= A\cdot\frac{\alpha - y}{y}$, der Widerstand $= Q$ und die Masse des Pfahls $= M$ ist, so erhält man für die Bewegung des Pfahls folgende Gleichung:

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = 2g\,(\frac{A}{M}\cdot\frac{\alpha - y}{y} - \frac{Q}{M}).$$

14. Man subtrahire nun die erste Gleichung von dieser, so hat man

$$\frac{ddy}{dt^2} = 2g\left(\frac{\alpha - y}{y}\left(\frac{A}{M} + \frac{A}{P}\right) - \frac{Q}{M} - 1\right),$$

welche mit $2dy$ multiplicirt und integrirt gibt

$$\frac{dy^2}{dt^2} = 4g\left[(\alpha l y - y)\left(\frac{A}{M} + \frac{A}{P}\right) - \frac{Qy}{M} - y + C\right].$$

Hier muss C aus dem Zeitpunkte bestimmt werden, wo der Pfahl sich zu bewegen anfängt, oder wo $y = \alpha - \beta$, und damals war die Geschwindigkeit des Pfahles noch $\frac{dx + dy}{dt} = 0$. Damals aber war

$$\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{g}\left(\frac{A + P}{P}\beta - \frac{\alpha A}{P} l \cdot \frac{\alpha}{\alpha - \beta} + a\right), \quad \text{folglich war}$$

$$\frac{dy}{dt} = -2\sqrt{g}\left(\frac{A + P}{P}\beta - \frac{\alpha A}{P} l \cdot \frac{\alpha}{\alpha - \beta} + a\right).$$

Daher bekommen wir diese Gleichung

$$\left(\frac{A + P}{P}\beta - \frac{\alpha A}{P} l \cdot \frac{\alpha}{\alpha - \beta} + a\right) = \left[\left(\alpha l (\alpha - \beta) - \alpha + \beta\right)\left(\frac{A}{M} + \frac{A}{P}\right) - \frac{Q(\alpha - \beta)}{M} - \alpha + \beta + \text{Const.}\right].$$

Folglich ist

$$C = \frac{A + P}{P}\beta - \frac{\alpha A}{P} l \cdot \frac{\alpha}{\alpha - \beta} + \frac{Q(\alpha - \beta)}{M} - \left(\alpha l (\alpha - \beta) - \alpha + \beta\right)\left(\frac{A}{M} + \frac{A}{P}\right) + a + \alpha - \beta$$

und daher wird man haben

$$\frac{dy^2}{dt^2} = 4g\left[\left(\frac{A}{M} + \frac{A}{P}\right)\left(\alpha l \frac{y}{\alpha - \beta} - y + \alpha - \beta\right) - \frac{Q}{M}(y - \alpha + \beta) - y + \alpha - \beta + \frac{A + P}{P}\beta - \frac{\alpha A}{P} l \frac{\alpha}{\alpha - \beta} + a\right].$$

15. Da man nun diese Gleichung zwischen y und t gefunden, so ist noch übrig auch x zu bestimmen. Zu diesem Ende multiplicire man die erste Gleichung mit P, und die andere mit M, so gibt die Summe derselben

$$\frac{(P + M)\, ddx + M ddy}{dt^2} = 2g\,(P - Q),$$

welche mit dt multiplicirt und integrirt gibt

$$\frac{(P + M)\, dx + M dy}{dt} = 2gt\,(P - Q) + \text{Const.}$$

Da man nun $\frac{dy}{dt}$ gefunden, so wird hieraus auch $\frac{dx}{dt}$ bestimmt, woraus man denn die Geschwindigkeit des Pfahls, nämlich $\frac{dx + dy}{dt}$ herleiten kann, und die Rechnung so weit fortsetzen, bis diese Geschwindigkeit verschwindet.

Um diese Untersuchung weiter auszuführen, müssen zwei Fälle betrachtet werden; der erste, wenn der Stoss nicht stark genug ist, um den Pfahl weiter hinabzutreiben, welches geschieht, wenn der Hammer seine Bewegung verliert, ehe $x = \beta$ wird, das ist, ehe die Kraft des Elastri dem Widerstand des Pfahls gleich wird. Nachdem dieser Fall wohl erörtert worden, so wird es nicht mehr schwer fallen, mit dem andern Falle zu Stande zu kommen, wo der Pfahl wirklich tie[f] hineingetrieben wird.

16. Vor allen Dingen aber ist nöthig, den für die Kraft des Elastri angegebenen Ausdru[ck] $A\frac{\alpha-y}{y}$ besser zu erläutern; indem die Buchstaben A und α nicht blos unserer Willkühr überlass[en] sind. Denn, behalten wir die Zusammendrückung der Luft, um die Stelle des Stosses auf den F[all] zu vertreten, so kommt es hauptsächlich auf die Weite des Gefässes, darin die Luft enthalten [ist,] an; denn, setzt man diese Weite $=b^2$, so muss A das Gewicht einer Wassersäule ausdrück[en,] deren Basis $=b^2$, die Höhe aber $=33$ Fuss, als welche mit dem Druck der Atmosphäre im Gleic[h]gewicht steht. Folglich wird $A=$ dem Gewicht einer Masse Wassers, deren Volumen $=33b^2$ cubische Fuss; und solchergestalt können auch die andern Gewichte und Massen, als P, Q und [M] in cubischen Fussen Wassers ausgedrückt werden, wobei man 70 Pfund auf einen cubischen Fu[ss] zu rechnen pflegt.

17. Es ist aber leicht zu begreifen, dass die obgedachte Weite b^2 sowohl aus der unte[rn] Breite des Hammers, als der obern Dicke des Pfahles bestimmt werden muss, weil der Hamm[er] gewiss eine andere Wirkung hervorbringen würde, je nachdem seine Basis breiter oder schmäle[r] wäre, und nachdem der Kopf des Pfahles eine grössere oder geringere Dicke hat.

18. Inzwischen muss man nicht glauben, dass man sich so genau an die oben gegebene Formel zu binden habe; indem es wohl sein könnte, dass man die Quetschung der Theilchen de[s] Holzes mit einer dichteren oder dünneren Luft vergleichen sollte, da dann der Buchstab A wo[hl] eine andere Grösse bekommen könnte für eben dieselbe Breite b^2. Ferner könnte auch die Form[el] $\frac{\alpha-y}{y}$ gar wohl eine andere Gestalt haben; weil man so genau nicht bestimmen kann, nach welche[m] Gesetze der Zusammendrückung der Hammer auf die obersten Zäserchen des Holzes wirkt; und wenn man auch bei der Vergleichung mit der Luft bleiben will, so weiss man, dass, wenn y se[hr] viele Mal kleiner als α geworden, alsdann die elastische Kraft weit grösser werde, als nach de[m] Ausdruck $\frac{\alpha}{y}$. Also könnte diese Formel gar wohl eine ganz andere Gestalt haben, wenn dabei nu[r] dieses beobachtet wird, dass, wenn $y=\alpha$, die Kraft gänzlich verschwinde; hingegen aber, wen[n] $y=0$, unendlich gross werde.

19. Daher können wir, anstatt der Formel $A\cdot\frac{\alpha-y}{y}$, gar füglich andere gebrauchen, als d[a] sind $A\left(\frac{\alpha^2-y^2}{y^2}\right)$, oder überhaupt $A\left(\frac{\alpha^n-y^n}{y^n}\right)$, welche ebenfalls $=0$ wird, wenn $y=\alpha$, und un[]endlich gross, wenn $y=0$; deren ganzer Unterschied also nur darin besteht, dass für die mittler[en] Werthe von y, zwischen α und 0, die elastische Kraft grösser oder kleiner herauskomme. In[s]sonderheit aber werden wir genöthigt sein eine solche Formel zu erwählen, dass die Rechnung ohne alzugrosse Weitläufigkeit zu Stande gebracht werden kann, welches uns um soviel weniger zu verdenken sein wird, da uns die wahren Gesetze, nach welchen die Quetschung geschieht, unbe[]kannt sind, und weil es hiebei nicht sowohl auf absolute Bestimmungen, als blos auf Vergleichun[g] verschiedener Fälle ankommt. Lasset uns nun den ersten Fall wiederum vornehmen, für welche[n] wir diese Gleichung gefunden:

$$\frac{ddx}{dt^2} = 2g\left(1 - \frac{A}{P}\cdot\frac{\alpha-y}{y}\right),$$

deren Integral oben gefunden worden

$$\frac{dx^2}{dt^2} = 4g\left(\frac{A+P}{P}x - \frac{\alpha A}{P}\,l\,\frac{\alpha}{\alpha-x} + a\right).$$

Wollte man nun aus dieser Formel den Ort, das ist, den Werth für x bestimmen, wo die Geschwindigkeit des Hammers $= 0$ wird, und also der ganze Stoss sich endigt, so würde man allerdings die grössten Schwierigkeiten finden, um dieses zu leisten; denn man würde auf diese Gleichung kommen:

$$0 = \frac{A+P}{P}x - \frac{\alpha A}{P}\,l\,\frac{\alpha}{\alpha-x} + a,$$

aus welcher sich der Werth von x durch keine algebraischen Operationen bestimmen lässt, welches doch ein sehr wesentliches Stück in der ganzen Unsersuchung ausmacht. Da nun diese Unbequemlichkeit von der angenommenen Formel $A\,.\,\frac{\alpha-y}{y}$ herrührt, so sind wir genöthigt, statt derselben, eine andere, und vorzüglich diese: $A\left(\frac{\alpha^2}{y^2} - 1\right)$ zu gebrauchen, als wobei sich alles ordentlich integriren lassen wird. Da wir nun diese Gleichung haben

$$\frac{ddx}{2g\,dt^2} = 1 - \frac{A}{P}\left(\frac{\alpha^2}{y^2} - 1\right)$$

und $x + y = \alpha$ ist, so multiplicire man mit dx, oder mit $-dy$, so wird die Integration geben

$$\frac{dx^2}{4g\,dt^2} = -y - \frac{A}{P}\left(\frac{\alpha^2}{y} + y\right) + C.$$

Da nun $\frac{dx^2}{dt^2}$ gleich werden muss dem c^2, oder $4ga$, wenn $x=0$, und also $y=\alpha$, so bekömmt man

$$a = -\alpha - \frac{2A\alpha}{P} + \text{Const.}, \quad \text{folglich} \quad C = a + \alpha + \frac{2\alpha A}{P};$$

daher unsere Gleichung sein wird

$$\frac{dx^2}{4g\,dt^2} = a + \alpha - y - \frac{A}{P}\left(\frac{\alpha^2}{y} + y - 2\alpha\right) = a + \alpha - y - \frac{A(\alpha-y)^2}{Py},$$

oder, weil $\alpha - y = x$, so erhält man

$$\frac{dy^2}{4g\,dt^2} = a + x - \frac{A}{P}\cdot\frac{x^2}{\alpha-x},$$

aus welcher sich nun leicht bestimmen lässt, wo die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ verschwindet.

20. Diese Rechnung kann aber noch sehr erleichtert werden, wenn man in Betrachtung zieht, dass die ganze Quetschung nur ein ganz geringes Räumchen beträgt, welches hier durch den Buchstaben α ausgedrückt wird, und noch überdies x und y kleiner sein müssen, als α, so wird man in Rücksicht auf a, welches die Höhe des Falles des Hammers bedeutet, als etwas unendlich kleines ansehn können. Daher unsere Gleichung sein wird

$$a - \frac{A}{P}\cdot\frac{x^2}{\alpha-x} = 0, \quad \text{woraus wir finden} \quad x^2 = -\frac{aP}{A}x + \frac{a\alpha P}{A}.$$

Man setze $\frac{P}{A} = 2\lambda$, so ist

$$x^2 = -2\lambda a x + 2\lambda \alpha a \quad \text{und daher} \quad x = -\lambda a + \sqrt{(\lambda^2 a^2 + 2\lambda \alpha a)},$$

wo $\lambda^2 a^2$ sehr gross sein wird gegen $2\lambda\alpha a$; daher man durch die Näherung bekommt

$$x = -\lambda a + \lambda a + \alpha = \alpha.$$

Weil aber doch immer $x < \alpha$ sein muss, so muss die obige Näherung genauer genommen werden

$$x = \alpha - \frac{\alpha}{2\lambda a}, \quad \text{oder} \quad x = \alpha - \frac{A}{P} \cdot \frac{\alpha^2}{a}, \quad \text{und daher} \quad y = \frac{A}{P} \cdot \frac{\alpha^2}{a}.$$

21. Also vom ersten Anfang des Stosses fällt der Hammer nicht weiter, als durch diese kleine Höhe x, welche an sich selbst keineswegs beträchtlich ist, wo derselbe gänzlich zur Ruhe kommt, und also der Stoss völlig aufhört. Da nun in diesem Zustande die Grösse $y = \frac{A}{P} \cdot \frac{\alpha^2}{a}$, so wird die elastische Kraft unseres Kissens sein

$$= A\left(\frac{\alpha^2}{y^2} - 1\right) = A\left(\frac{P^2 a^2}{A^2 \alpha^2} - 1\right),$$

und weil die Einheit gleichsam unendlich klein sein wird im Vergleich zu $\frac{P^2 a^2}{A^2 \alpha^2}$, so wird diese Kraft sein $= \frac{P^2 a^2}{A \alpha^2}$, welcher Ausdruck augenscheinlich sehr gross sein muss. Doch aber nehmen wir hier an, dass derselbe noch nicht vermögend ist den Widerstand des Pfahls, Q, zu überwinden. Um diese Kraft einigermaassen zu erläutern, wollen wir z. B. annehmen, dass das Gewicht des Hammers $P = 280$ Pfund oder vier Cubikfuss Wasser betrage; ferner sei die Dicke der Pfähle oder $b^2 = \frac{1}{2}$ Quadratfuss, und also nach der obigen Hypothese $A = 16$ Cubikfuss. Ferner sei die Höhe a, aus welcher der Hammer fällt, $= 4$ Fuss; α aber $= \frac{1}{10}$ Zoll oder $\frac{1}{120}$ Fuss. Hieraus wird also die letzte Kraft des Hammers auf den Pfahl sein $16 . 14400 = 230400$ Cubikfuss Wasser. Daher, 70 Pfund auf 1 Fuss gerechnet, wird diese Kraft betragen 16128000 Pfund oder 161280 Centner. Gleichwohl aber setzen wir hier, dass diese Kraft noch nicht vermögend sei den Pfahl wirklich einzuschlagen. Hierüber wird dienlich sein folgende Anmerkungen zu machen: 1. je grösser das Gewicht des Hammers P angenommen wird, so wächst die Kraft nach dem Quadrat; und ebenfalls, je grösser die Höhe a gesetzt wird, so wächst auch die Kraft nach dem quadratischen Verhältniss; 2. je kleiner das Räumchen α sein wird, worin die Quetschung geschieht, so wird auch die Kraft des Hammers nach dem quadratischen Verhältniss grösser. Dieses beruhet aber hauptsächlich auf der Beschaffenheit des Holzes, nach welcher dasselbe härter oder weicher ist, und also für das harte Holz α einen weit kleineren Werth haben wird, als für das weiche Holz, woraus sich offenbar ergibt, dass je härter zum wenigsten der Kopf des Pfahls ist, die Wirkung des Hammers alsdann ungemein viel stärker sein werde. 3. Es versteht sich von selbst, dass je dicker der Pfahl ist, oder je grösser der Ausdruck b^2, woraus A bestimmt wird, die Kraft des Hammers desto kleiner sein werde, jedoch nur nach dem einfachen Verhältniss. 4. Eben dieser Schluss würde auch aus jeder andern Hypothese folgen, nach welcher die elastische Kraft des

Kiesens ausgedrückt wird, und auch sogar aus der ersten, welche wir zu verlassen genöthigt worden. Denn da wir für das Ende des Stosses diese Gleichung bekommen haben:

$$0 = \frac{A+P}{P} x - \frac{\alpha A}{P} l \cdot \frac{a}{a-x} + a,$$

so können wir auch hier gegen die Höhe a das erste Glied $\frac{A+P}{P} x$ ausstreichen, da dann nur noch diese Gleichung übrig ist:

$$a = \frac{\alpha A}{P} l \frac{a}{a-x}, \quad \text{oder} \quad l \cdot \frac{a}{a-x} = \frac{Pa}{A\alpha} = \frac{2\lambda a}{\alpha},$$

wenn gesetzt wird $\frac{P}{A} = 2\lambda$. Setzt man nun e für die Zahl, deren Logarithmus $= 1$, so bekommt man

$$\frac{a}{a-x} = e^{\frac{2\lambda a}{\alpha}} \quad \text{und hieraus} \quad x = \frac{a e^{\frac{2\lambda a}{\alpha}} - a}{e^{\frac{2\lambda a}{\alpha}}}, \quad \text{oder}$$

$$x = a - a e^{\frac{-2\lambda a}{\alpha}}, \quad \text{und folglich} \quad y = a - x = a e^{\frac{-2\lambda a}{\alpha}}.$$

Hieraus ergibt sich nun die letzte Kraft des Hammers auf den Pfahl

$$= A\left(\frac{a}{y} - 1\right) = A\left(e^{\frac{2\lambda a}{\alpha}} - 1\right) = A e^{\frac{2\lambda a}{\alpha}} = A e^{\frac{Pa}{A\alpha}};$$

wovon für das obige Exempel der Werth sein wird $= 16 . e^{120}$ Cubikfuss, welcher Werth noch weit grösser ist als der obgefundene. Denn der Logarithmus davon ist $l\,16 + 120\,le$, und $le = 0{,}43429$, also der gesuchte Logarithmus $= 53, \ldots$ so dass mithin die Zahl der Cubikfuss Wasser aus 54 Ziffern bestehen wird. Ungeachtet es nun scheint, dass nach dieser Hypothese die Kraft des Hammers auf den Pfahl weit wirksamer sein müsse, als nach der obigen, so wird man doch sehn, dass die Wirkung selbst, oder die Tiefe, in welche der Pfahl hineingetrieben wird, in beiden Fällen wohl sehr verschieden sein werde. Bei dem ersten Falle, wo der Pfahl noch nicht gerückt wird, ist noch nöthig die Zeit zu bestimmen, in welcher der Hammer durch das Räumchen $AX = x$ fortrückt, wozu noch eine zweite Integration erfordert wird.

22. Da man nämlich gefunden $\frac{dx^2}{4g\,dt^2} = a - \frac{A}{P} \cdot \frac{x^2}{a-x}$, so wird, wenn $\frac{A}{P} = \mu$,

$$4g\,dt^2 = \frac{(a-x)\,dx^2}{a(a-x) - \mu x^2},$$

folglich $2dt\sqrt{g} = \frac{dx\sqrt{(a-x)}}{\sqrt{(a(a-x) - \mu x^2)}}$, wovon das Integral gesucht werden muss. Man bringe diese Gleichung auf y, weil $a - x = y$, so hat man

$$2dt\sqrt{g} = \frac{-dy\sqrt{y}}{\sqrt{(ay - \mu(a-y)^2)}},$$

wo im Nenner enthalten ist der Factor $y - \frac{A}{P} \cdot \frac{a^2}{a}$, oder $ay - \frac{Aa^2}{P} = ay - \mu a^2$. Daher der andere Factor sich findet $a - \mu y$; also, dass man hat

$$2dt\sqrt{g} = \frac{-dy\sqrt{y}}{\sqrt{(a-\mu y)\left(y - \frac{\mu a^2}{a}\right)}}.$$

Da man nun hier anstatt $a - \mu y$ schreiben kann a, so bekommt man

$$2dt\sqrt{g} = \frac{-dy\sqrt{y}}{\sqrt{(ay - \mu a^2)}},$$

welche keine weiteren Schwierigkeiten hat.

23. Um nun dieses Integral zu finden, setze man

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{(ay - \mu a^2)}} = \frac{f}{\sqrt{a}}, \text{ so ist } \frac{y}{ay - \mu a^2} = \frac{f^2}{a} \text{ und daher } y = \frac{\mu a^2 f^2}{a(f^2 - 1)}.$$

Nun sei

$$f = \frac{1}{v}, \text{ so wird } y = \frac{\mu a^2}{a(1-v^2)}, \text{ folglich } dy = \frac{2\mu a^2 v\,dv}{a(1-v^2)^2},$$

welches mit $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{(ay - \mu a^2)}} = \frac{f}{\sqrt{a}} = \frac{1}{v\sqrt{a}}$ multiplicirt, gibt

$$dt\sqrt{g} = \frac{-\mu a^2 dv}{a\sqrt{a}\,(1-v^2)^2}, \text{ oder } \frac{adt\sqrt{ag}}{\mu a^2} = \frac{-dv}{(1-v^2)^2}.$$

Man setze nun $\int \frac{dv}{(1-v^2)^2} = \frac{\beta v}{1-v^2} + \gamma \int \frac{dv}{1-v^2}$, so wird $\beta = \gamma = \frac{1}{2}$, und also

$$\frac{at\sqrt{ag}}{\mu a^2} = \frac{-v}{2(1-v^2)} - \frac{1}{4} l \frac{1+v}{1-v},$$

folglich

$$\frac{at\sqrt{ag}}{\mu a^2} = \frac{-ayv}{2\mu a^2} - \frac{1}{4} l \cdot \frac{1+v}{1-v} + C, \text{ weil } v = \sqrt{\left(1 - \frac{\mu a^2}{ay}\right)}.$$

Wobei zu merken, dass, wenn $t = 0$, alsdann $x = 0$ und $y = a$, folglich $v = \sqrt{\left(1 - \frac{\mu a}{a}\right)}$, woraus man erhält

$$C = \frac{a}{2\mu a}\sqrt{\left(1 - \frac{\mu a}{a}\right)} + \frac{1}{4} l \cdot \frac{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{\mu a}{a}\right)}}{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{\mu a}{a}\right)}}.$$

Es ist aber zu merken, dass $\sqrt{\left(1 - \frac{\mu a^2}{ay}\right)} = 1 - \frac{\mu a^2}{2ay}$ und $\sqrt{\left(1 - \frac{\mu a}{a}\right)} = 1 - \frac{\mu a}{2a}$ und $v = 1 - \frac{\mu a^2}{2ay}$, welche Werthe unserer Gleichung diese Form geben

$$\frac{at\sqrt{ag}}{\mu a^2} = \frac{a}{2\mu a} - \frac{ay}{2\mu a^2} + \frac{1}{4} l \cdot \frac{2 - \frac{\mu a}{2a}}{2 - \frac{\mu a^2}{2ay}} - \frac{1}{4} l \frac{y}{a}.$$

Nun aber ist $l \cdot \frac{2 - \frac{\mu a}{2a}}{2 - \frac{\mu a^2}{2ay}} = l \cdot 2 - \frac{\mu a}{4a} - l \cdot 2 + \frac{\mu a^2}{4ay} = \frac{\mu a^2}{4ay} - \frac{\mu a}{4a}$; folglich

$$\frac{at\sqrt{ag}}{\mu a^2} = \frac{a}{2\mu a} - \frac{ay}{2\mu a^2} + \frac{1}{16}\cdot\frac{\mu a^2}{ay} - \frac{1}{16}\cdot\frac{\mu a}{a} - \frac{1}{4}\, l\, \frac{y}{a}$$

$$= \frac{a(a-y)}{2\mu a^2} + \frac{1}{16}\cdot\frac{\mu a}{a}\cdot\frac{(a-y)}{y} + \frac{1}{4}\, l\, \frac{a}{y}$$

. . . .

. . . .

(29) — — — zweite aber mit M, und es wird die Summe derselben geben

$$\frac{(P+M)\,ddx + M\,ddy}{2g\,dt^2} = P - Q,$$

welche mit dt multiplicirt und integrirt gibt

$$\frac{(P+M)\,dx + M\,dy}{2g\,dt} = (P-Q)\,t + C.$$

Da nun für unsern ersten Zeitpunkt $t=0$, $\frac{dx}{dt} = \frac{-dy}{dt} = 2\sqrt{g}\,(a - \frac{\mu a^2}{\gamma})$, so wird

$$C = \frac{P}{\sqrt{g}}\sqrt{(a - \frac{\mu a^2}{\gamma})};$$

daher dann sein wird

$$\frac{(P+M)\,dx + M\,dy}{2g\,dt} = (P-Q)\,t + \frac{P}{\sqrt{g}}\sqrt{(a - \frac{\mu a^2}{\gamma})}.$$

30. Nun sind wir im Stand das letzte Ende des Stosses zu bestimmen, welches sich ereignet, wenn der Pfahl seine Bewegung verliert, und also sein wird $\frac{dx+dy}{dt} = 0$. Alsdann wird man haben

$$\frac{-P\,dy}{2g\,dt} = (P-Q)\,t + \frac{P}{\sqrt{g}}\sqrt{(a - \frac{\mu a^2}{\gamma})}.$$

Wir haben aber schon oben gefunden

$\frac{dy}{dt} = -2\sqrt{g}\,.\,Y$; daher dann sein muss $\frac{P\sqrt{Y}}{\sqrt{g}} = (P-Q)\,t + \frac{P}{\sqrt{g}}\sqrt{(a - \frac{\mu a^2}{\gamma})}$.

31. Um nun dieses Ende zu bestimmen, so muss man aus der Gleichung $\frac{dy}{dt} = -2\sqrt{g}\,Y$ die Zeit t durch y bestimmen, welches durch diese Integration geschiehet $t = -\int\frac{dy}{2\sqrt{g}\,Y}$, wie oben schon bemerkt worden, und diesen Werth in die andere Aequation setzen, welche sodann sein wird

$$\frac{P\sqrt{Y}}{\sqrt{g}} = -(P-Q)\cdot\int\frac{dy}{2\sqrt{g}\,Y} + \frac{P}{\sqrt{g}}\sqrt{(a - \frac{\mu a^2}{\gamma})},$$

$$\text{oder}\quad P\sqrt{Y} = -(P-Q)\cdot\int\frac{dy}{2\sqrt{Y}} + P\sqrt{(a - \frac{\mu a^2}{\gamma})},$$

aus welcher der Werth für y gesucht werden muss, woraus sich sodann die Zeit t bestimmen lässt. Da nun aber die Hauptsache auf die Bestimmung des Raumes $x + y - a$, durch welchen der Pfahl wirklich fortgetrieben worden, ankommt, so fehlt uns nur noch der Werth von x, welcher aus dieser Gleichung

$$\frac{(P+M)\,dx+M\,dy}{2g\,dt}=(P-Q)\,t+\frac{P}{\sqrt{g}}\sqrt{\left(a-\frac{\mu\alpha^2}{\gamma}\right)}$$

leicht bestimmt werden kann; denn man darf nur mit dt multipliciren und integriren, so hat man

$$\frac{(P+M)\,x+My}{2g}=\frac{(P-Q)\,t^2}{2}+\frac{Pt}{\sqrt{g}}\sqrt{\left(a-\frac{\mu\alpha^2}{\gamma}\right)}+\text{Const.}$$

und weil im Anfang war $y=\gamma$, folglich $x=\alpha-\gamma$, und $t=0$, so wird $C=\frac{P(\alpha-\gamma)+M\alpha}{2g}$, und daher bekommen wir

$$x=\frac{(P-Q)\,gt^2}{P+M}+\frac{2Pt\sqrt{g}}{P+M}\left(a-\frac{\mu\alpha^2}{\gamma}\right)-\frac{My}{P+M}+\frac{P(\alpha-\gamma)+M\alpha}{P+M},$$

woraus sich der Werth von $x+y-\alpha$ anzeigen lässt, welcher den wirklichen Raum, durch welchen der Pfahl fortgetrieben worden, ausdrückt.

32. Da nun α kaum einen Messerrücken breit betragen kann, und γ noch weit kleiner ist als α, so können wir für den gesuchten Raum, durch welchen der Pfahl fortgetrieben wird, blos allein x ansetzen, wovon der Werth, wenn die obigen Kleinigkeiten weggelassen werden, also bequemer ausgedrückt wird:

$$x=\frac{(P-Q)\,gt^2}{P+M}+\frac{2Pt}{P+M}\sqrt{g}\left(a-\frac{\mu\alpha^2}{\gamma}\right).$$

33. Hierbei ist aber wohl zu merken, dass die Zeit t nicht mehr so klein sein wird, als im ersten Fall; denn da der Pfahl wirklich hinabgetrieben wird, so muss auch der Hammer folgen, und dazu wird schon eine merkliche Zeit erfordert, die hier durch t ausgedrückt wird. Also kommt die Hauptsach darauf an, dass der Werth von t erstlich durch y ausgedrückt werde, und hernach für y derjenige Werth gesetzt werde, welchen die oben angeführte Gleichung geben wird. Uebrigens ist hier noch zu merken, dass Q ein ungeheuer grosses Gewicht andeutet, gegen welches P verschwinden kann.

34. Vor allen Dingen muss demnach diese Formel integrirt werden:

$$t=-\int\frac{dy}{2\sqrt{gY}},\quad\text{wo}\quad Y=a+2\eta\cdot\frac{\alpha^2}{\gamma}-\zeta\cdot\frac{\alpha^2}{y}-\eta\cdot\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\cdot y=\frac{ay+2\eta\frac{\alpha^2}{\gamma}y-\zeta\alpha^2-\eta\cdot\frac{\alpha^2}{\gamma^2}y^2}{y}$$

$$=\frac{-\eta\cdot\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\cdot y^2+\left(a+2\eta\cdot\frac{\alpha^2}{\gamma}\right)y-\zeta\alpha^2}{y}$$

welche, wenn man Kürze halber setzt

$$k=\sqrt{\left(a^2+\frac{4\eta a\alpha^2}{\gamma}-\frac{4\mu\eta\alpha^4}{\gamma^2}\right)},$$

sich folgendergestalt in factores resolvirt

$$Y=\frac{1}{y}\left(\frac{\eta\alpha^2}{\gamma^2}y-\frac{\left(a+\frac{2\eta\alpha^2}{\gamma}\right)}{2}+\frac{1}{2}k\right)\cdot\frac{\gamma^2}{\eta\alpha^2}\left(-\frac{\eta\alpha^2}{\gamma^2}y+\frac{\left(a+\frac{2\eta\alpha^2}{\gamma}\right)}{2}+\frac{1}{2}k\right),$$

welcher Werth im ersten Zeitpunkt wird

$$Y = \frac{\gamma}{\eta\alpha^2}\left(\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}a\right)\left(\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}a\right),$$

woraus man sieht, dass

$$\frac{\eta\alpha^2}{\gamma^2}y + \frac{1}{2}k > \frac{1}{2}a + \frac{\eta\alpha^2}{\gamma},$$

hingegen aber $$\frac{\eta\alpha^2}{\gamma^2}y < \frac{1}{2}a + \frac{\eta\alpha^2}{\gamma} + \frac{1}{2}k.$$

Unsere Integration wird also auf eine solche Formel ankommen: Wenn man Kürze halber setzt $Y = \frac{(p+y)(q-y)}{ry}$, so bekommt man

$$2t\sqrt{g} = \frac{dy\sqrt{ry}}{\sqrt{(p+y)(q-y)}},$$

welches sich aber nicht anders, als durch Näherungen thun lässt, weil diese Formel weder durch Cirkelbögen noch Logarithmos integrirt werden kann.

35. Zu allem Glück aber fügt es sich hier, dass in dem zweiten factore die pars constans $\frac{1}{2}a + \frac{\eta\alpha^2}{\gamma} + \frac{1}{2}k$ ungleichweit grösser ist, als der erste Theil $\frac{\eta\alpha^2}{\gamma^2}y$, und daher dieser ausgelassen werden kann, also, dass man in der letzten Formel anstatt $q - y$ nur q allein schreiben könnte; da dann die Formel keine Schwierigkeit haben würde. Jedoch ist zu bedenken, dass, da γ gegen α sehr klein, und also $\frac{\alpha^2}{\gamma^2}$ eine ungeheure Zahl sein wird, dieser Theil auch nicht gegen den andern verschwinden möchte; insonderheit da es sehr wahrscheinlich ist, dass, sobald der Pfahl zu rücken angefangen, der Werth von y, so anfangs $= \gamma$ gewesen, hernach nicht mehr kleiner, sondern vielmehr grösser werde, und daher um so viel weniger der erste Theil des zweiten factoris weggelassen werden kann. Auch ist zu merken, dass die pars constans im zweiten factore weit grösser als im ersten, aus welchem Umstand sich vielleicht ein Hülfsmittel ergeben möchte.

Anmerkungen.

ad §§ 25 et 26.

Weil Q sehr gross, und also γ sehr klein gegen α sein wird, so haben wir $Q = A\frac{\alpha^2}{\gamma^2}$. Da nun A und α von der Beschaffenheit des Holzes abhangen, und folglich gegeben sind, so muss aus diesem Umstand γ bestimmt werden; woraus man bekommt $\gamma = \alpha\sqrt{\frac{A}{Q}}$. Daher denn sein wird

$$\sqrt{\frac{A}{Q}} > \frac{\mu\alpha}{a} > \frac{A\alpha}{Pa}, \quad \text{folglich } Q < \frac{P^2a^2}{A\alpha^2},$$

woraus man erkennt, dass, wenn der Widerstand grösser wäre, als die gefundene Quantität, die Arbeit des Rammens fruchtlos sein würde.

ad § 27.

Es wird dienlich sein diese Geschwindigkeit durch einen besondern Buchstaben auszudrücken. Es sei demnach die ursprüngliche Höhe derselben $= h$; also, dass hier $\frac{dx^2}{4g\,dt^2} = h$; daher man bekommt $h = a - \frac{\mu a^2}{\gamma} = a - \frac{\alpha\sqrt{AQ}}{P}$, woraus wir weiter sehen, dass, wenn eine Wirkung erfolgen soll, sein müsse $Pa > \alpha\sqrt{AQ}$, oder die vis viva des Hammers muss grösser sein, als $\alpha\sqrt{AQ}$, wobei ferner zu merken, dass je grösser h ist, desto grösser die Wirkung sein werde. In dem ersten Zeitpunkt nun wird sein $\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{gh}$, und weil bis dahin $x + y = \alpha$, so wird auch sein,

$$\frac{dy}{dt} = -2\sqrt{gh}.$$

ad § 29.

Diese Gleichung kann noch auf eine andere Art integrirt werden, so, dass kein t ins Integral kommt; denn man multiplicire dieselbe mit $(P+M)\,dx + M\,dy$, und integrire, so kommt

$$\frac{((P+M)\,dx + M\,dy)^2}{4g\,dt^2} = (P-Q)(P+M)\,x + (P-Q)\,My + \text{Const.}$$

Nun setze man für den Anfang $\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{gh}$ und $\frac{dy}{dt} = -2\sqrt{gh}$ und $y = \gamma$, $x = \beta$, so wird

$$P^2 h = (P-Q)(P+M)\,\beta + (P-Q)\,M\gamma + \text{Const.}$$

also

$$\text{Const.} = P^2 h - (P-Q)(P+M)\,\beta - (P-Q)\,M\gamma,$$

folglich

$$\frac{((P+M)\,dx + M\,dy)^2}{4g\,dt^2} = (P-Q)(P+M)(x-\beta) + (P-Q)\,M(y-\gamma) + P^2 h.$$

Weil nun bei dem völligen Ende des Stosses sein muss $\frac{dx+dy}{dt} = 0$, oder $dx = -dy$, so erhalten wir für dieses Ende diese Gleichung

$$\frac{P^2\,dy^2}{4g\,dt^2} = (P-Q)(P+M)(x-\beta) + (P-Q)\,M(y-\gamma) + P^2 h = P^2 Y,$$

woraus der ganze Raum, durch welchen der Balken fortgetrieben worden, bestimmt werden muss, wozu aber noch diese Gleichung zu Hülfe genommen werden muss, welche aus dem gedoppelten Werthe von dt entspringt:

$$-\frac{dy}{2\sqrt{gY}} = dt = \frac{(P+M)\,dx + M\,dy}{2\sqrt{g}\,((P-Q)(P+M)(x-\beta) + (P-Q)\,M(y-\gamma) + P^2 h)},$$

deren Integral ist

$$C - \int\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{2\sqrt{((P-Q)(P+M)(x-\beta) + (P-Q)\,M(y-\gamma) + P^2 h)}}{P-Q},$$

aus welcher y durch x bestimmt werden kann, welcher Werth sodann in der ersten Aequation für y geschrieben, uns den Werth von x offenbaren wird, woraus dann auch y erkannt wird, und da wird $x + y - \alpha$ die Grösse der Einrammung anzeigen.

Hiebei aber ist insonderheit zu merken, dass, weil y und α keinen Messerrücken breit betragen können, diese Tiefe nur allein durch x angezeigt wird, und da ferner auch β und γ gegen dieses x als nichts angesehn werden können, so wird obige Aequation diese Form annehmen:

$$(P-Q)(P+M)\,x + P^2 h = P^2 Y.$$

Weil nun hier Y den Werth von $\frac{dy^2}{4g\,dt^2}$, oder das Quadrat der letzten Geschwindigkeit des Kissens anzeigt, so kann man diese Geschwindigkeit als $= 0$ betrachten; daher sich folglich x unmittelbar also bestimmen lässt

$$x = \frac{P^2 h}{(Q-P)(P+M)},$$

wodurch die Tiefe der Einrammung genau genug bestimmt wird: Setzt man nun hier für h den oben gefundenen Werth, so erhält man

$$x = \frac{P^2\left(a - \frac{\alpha\sqrt{\Delta Q}}{P}\right)}{(Q-P)(P+M)} = \frac{P(Pa - \alpha\sqrt{\Delta Q})}{(Q-P)(P+M)},$$

wovon alle Elemente als bekannt angesehn werden: als nämlich P, das Gewicht des Hammers; a, die Höhe, aus welcher derselbe gefallen; M, die Masse des Pfahls; Q, der Widerstand des Pfahls, und endlich schliesst Δ die Dicke des Pfahls und Δ nebst α die Beschaffenheit des Holzes in sich; welche letztere Stücke blos allein aus einigen Erfahrungen zu bestimmen sind.

Nur ist noch zu merken, dass in dem Buchstaben M nicht allein die Masse des Pfahls, sondern auch des Erdreichs, welches der Pfahl vor sich herstösst, begriffen werden muss. Diese Formel scheint auch mit allen Umständen, welche bei dem Einrammen wahrgenommen werden, ziemlich genau übereinzustimmen; daher kein Zweifel, dass diese Formel nicht auf alle Fälle mit Nutzen sollte können angewendet werden.

Man kann zum Ueberfluss auch noch die Zeit, in welcher diese Wirkung hervorgebracht wird, leicht bestimmen, indem dieselbe sein wird

$$t = \frac{\sqrt{(P^2 h - (Q-P)(P+M)x)}}{(Q-P)\sqrt{g}},$$

oder, wenn man für x seinen Werth setzt, $t = 0$; woraus erhellet, dass es in sehr kurzer Zeit geschieht und nur durch die kleinen Quantitäten β und γ bestimmt wird.

Zusatz.

Man lasse den Hammer successive immer höher herunterfallen, um diejenige Höhe a zu finden, wo die Wirkung anfängt, daraus man sogleich bekommt $\alpha\sqrt{\Delta Q} = Pa$. Hernach darf man nur den Hammer noch höher aufziehen und die Tiefe der Einrammung x ausmessen, so wird sich daraus der Nenner $(Q-P)(P+M)$ bestimmen lassen.

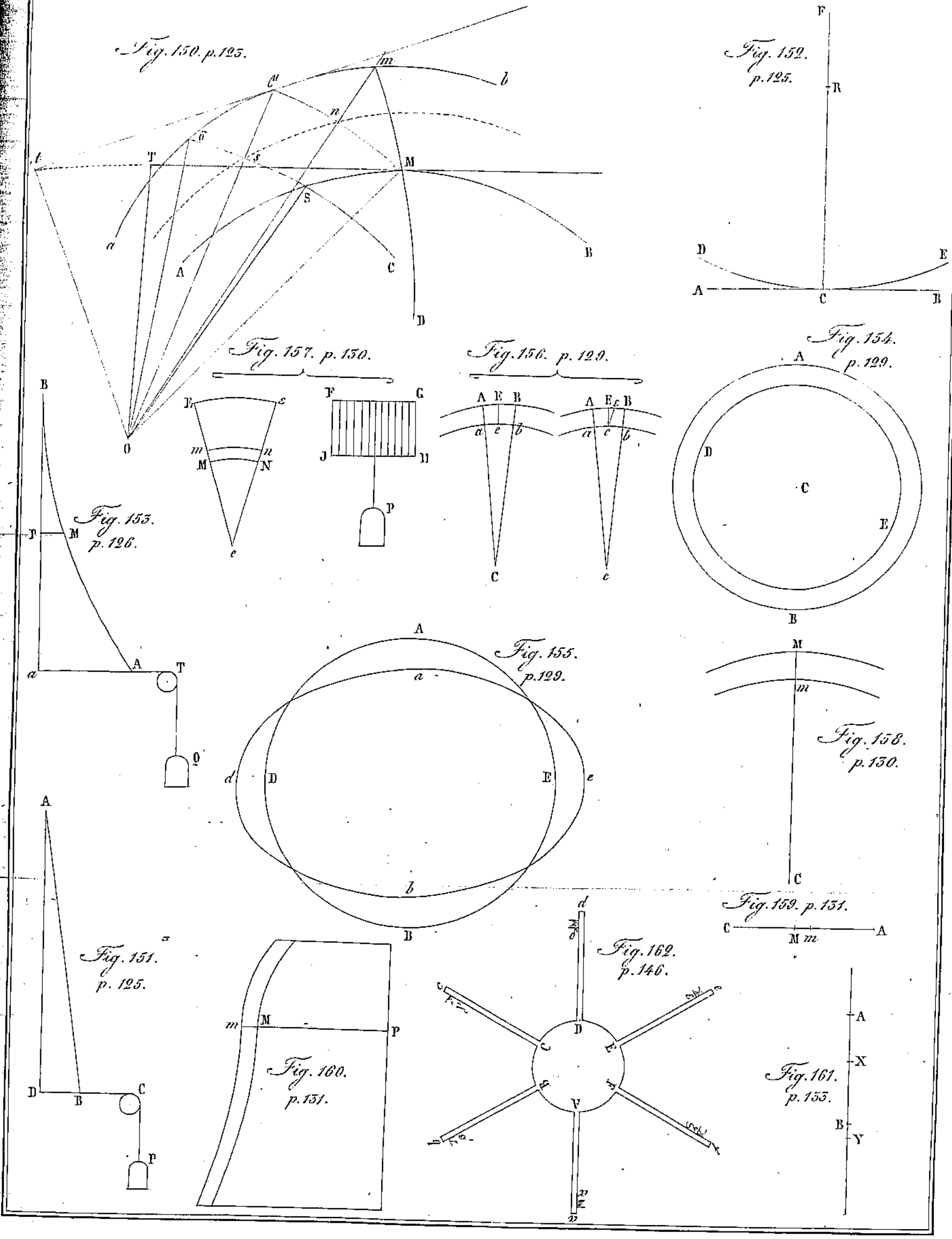
Fig. 150. p. 125.
Fig. 152. p. 125.
Fig. 157. p. 130.
Fig. 156. p. 129.
Fig. 154. p. 129.
Fig. 153. p. 126.
Fig. 155. p. 129.
Fig. 158. p. 130.
Fig. 159. p. 131.
Fig. 151. p. 125.
Fig. 160. p. 131.
Fig. 162. p. 146.
Fig. 161. p. 133.