1862

De motu corporum super superficiebus mobilibus

Leonhard Euler

IV.

De motu corporum super superficiebus mobilibus.

1. **Lemma 1.** (Fig. 126) Interea, dum corpus motu uniformi cum celeritate debita altitudini c percurrit spatium AB, idem corpus ex quiete a vi acceleratrice g, protrahetur motu uniformiter accelerato per spatium $ab = g \cdot \frac{AB^2}{4c}$.

Demonstratio. Si more solito tempora exprimantur per spatia, quae motu aequabili percurruntur, divisa per celeritates, celeritates autem indicentur per radices quadratas ex altitudinibus, ipsis celeritatibus debitis, erit corporis, spatium AB motu aequabili percurrentis, celeritas $= \sqrt{c}$, et tempus, quo hoc spatium absolvitur, $= \frac{AB}{\sqrt{c}}$. At si corpus, quod ante in a quieverat, protrahatur a vi acceleratrice $= g$ per spatium ab, habebit in b celeritatem debitam altitudini $g.ab$, ipsa celeritas erit $= \sqrt{g.ab}$. Hac vero celeritate corpus aequabiliter motum eodem tempore absolvere valet spatium duplum ab. Quare eodem tempore, quo corpus motum aequabiliter celeritate $\sqrt{c}$ percurrit spatium AB, spatium $2ab$ pariter uniformi motu absolvetur a celeritate $\sqrt{g.ab}$. Quoniam vero spatia aequalibus temporibus motu uniformi percursa sunt ut celeritates, erit $AB : 2ab = \sqrt{c} : \sqrt{g.ab}$, ideoque $2ab\sqrt{c} = AB\sqrt{g.ab}$ et $4ab^2 c = AB^2 g.ab$, unde fit $ab = \frac{g.AB^2}{4c}$. Q. E. D.

2. **Coroll. 1.** Hinc itaque definiri poterit vis acceleratrix g, qua corpus protrahatur per spatium ab eodem tempore, quo aliud corpus, motu uniformi latum, cum celeritate debita altitudini c, percurrit spatium datum AB: erit nempe $g = \frac{4c.ab}{AB^2}$, seu erit AB^2 ad $4c.ab$ ut vis gravitatis acceleratrix 1 ad vim acceleratricem quaesitam g.

3. **Coroll 2.** Si igitur spatium AB fuerit infinite parvum, seu differentiale primi gradus, ob $ab = \frac{g.AB^2}{4c}$, erit spatium ab infinities minus, seu differentiale secundi gradus; siquidem altitudo celeritati debita c fuerit finita, atque g ad 1 habuerit rationem finitam.

4. **Lemma 2.** (Fig. 127) Si corpus in A habeat celeritatem altitudini c debitam, qua dato tempore aequabiliter motum, percurreret spatium AB; simul vero secundum directionem AB sollicitetur a vi acceleratrice g, eodem tempore ab A ultra B in b progredietur, ut sit $Bb = \frac{g.AB^2}{4c}$.

Demonstratio. Eodem tempore, quo corpus uniformiter motum celeritate debita altitudini conficit spatium AB, aliud corpus ex quiete a vi acceleratrice g perduceretur per spatium $=\frac{g.AB^2}{4c}$. Quodsi ergo ab eadem vi acceleratrice sollicitetur illud corpus in directione AB, quod in A jam habet celeritatem debitam altitudini c, praeter spatium AB eodem tempore percurret spatium $Bb=\frac{g.AB^2}{4c}$. Motu igitur tam jam insito, celeritate nempe debita altitudini c, quam vi acceleratrice corpus progredietur per spatium

$$Ab=AB+\frac{g.AB^2}{4c}$$

eodem tempore, quo solo motu insito latum absolveret spatium AB. Q. E. D.

5. **Coroll. 1.** Celeritas igitur, quam corpus in b acquiret, erit aggregatum celeritatis insitae $\sqrt{c}$ et celeritatis, quam ex quiete per spatium Bb a vi acceleratrice g sollicitatum adipisceretur, quae est $=\sqrt{g.Bb}$. Erit ergo corporis ad b appellentis celeritas $=\sqrt{c}+\sqrt{g.Bb}$.

6. **Coroll. 2.** Quoniam est $Bb=\frac{g.AB^2}{4c}$, erit celeritas, quam corpus in b acquiret,

$$=\sqrt{c}+\frac{g.AB}{2\sqrt{c}}=\frac{2c+g.AB}{2\sqrt{c}}:$$

eo scilicet tempore, quo solo motu insito spatium AB conficeret, a vi g sollicitatum adipiscetur celeritatem $=\sqrt{c}+\frac{g.AB}{2\sqrt{c}}$; et tempus, quo, cum hanc celeritatem acquiret, tum in b progredietur, erit $=\frac{AB}{\sqrt{c}}$.

7. **Coroll. 3.** (Fig. 128) Si corpus, quod in A celeritatem altitudini c debitam habere ponitur, secundum directionem contrariam a vi acceleratrice g urgeretur, tum eo tempore, quo motu insito in B perveniret, tantum ad b usque pertinget, ita ut sit $Bb=\frac{g.AB^2}{4c}$, et in hoc puncto b habebit celeritatem $=\sqrt{c}-\frac{g.AB}{2\sqrt{c}}$.

8. **Coroll. 4.** (Fig. 127). Cum igitur initio in A fuisset celeritas corporis debita altitudini c, in b celeritas corporis debita erit altitudini

$$=c+g.AB+\frac{gg.AB^2}{4c}=c+g.AB+g.Bb=c+g.Ab$$

casu priori, posteriori vero, quo vis g motui est contraria, celeritas in b residua debebitur altitudini $c-g.Ab$.

9. **Coroll. 5.** Si igitur corpus, antequam ad A celeritate debita altitudini c appulerit, tempore t confecerit spatium $=s$, nunc tempusculo infinite parvo dt absolvet elementum spatii $Ab=ds$ et acquiret celeritatem debitam altitudini $c+dc$; erit autem ob $AB=dt\sqrt{c}$,

$$Bb=\frac{gdt^2}{4} \text{ et } ds=dt\sqrt{c}+\frac{gdt^2}{4} \text{ atque } dc=g.Ab=gdt\sqrt{c}+\frac{ggdt^2}{4}=gds.$$

10. **Lemma 3.** (Fig. 129.) Si corpus in A habeat celeritatem debitam altitudini c, qua dato tempore uniformiter motum, percurrere possit spatium AB; nunc autem continuo in directione Aa ad AB normali sollicitetur a vi acceleratrice g, corpus in arcu parabolico Ab progredietur, atque eodem tempore perveniet in punctum b existente recta Bb normali ad AB, et $Bb=\frac{g.AB^2}{4c}$.

Demonstratio. Tollatur cogitatione omnis motus corpori insitus, atque manifestum est corpus in A quiescens et vi acceleratrice g sollicitatum eodem illo tempore, quo uniformiter motum, cum celeritate debita altitudini c, spatium AB absolveret, perventurum esse in a, ita ut sit $Aa = \frac{g \cdot AB^2}{4c}$. Jam accedente motu insito, seu celeritate $\sqrt{c}$ secundum directionem ab, perducetur eodem tempore in b, ut sit $ab = AB$. Corpus ergo tam motu insito quam vi acceleratrice g sollicitatum eodem tempore perveniet in b, ut sit $Bb = Aa$ et normalis ad AB; et quia est

$$Aa = \frac{g \cdot AB^2}{4c} = \frac{g \cdot ab^2}{4c},$$

haec relatio puncti b ad a indicat corpus in arcu parabolico Ab motum iri. Q. E. D.

11. **Coroll. 1.** Si ponatur hujus parabolae Ab abscissa $Aa = x$, applicata $ab = y$, erit $x = \frac{gyy}{4c}$ et $yy = \frac{4c}{g}x$. Erit ergo A vertex parabolae, AB ejus tangens in vertice, et Aa axis. Insuper autem parameter hujus parabolae erit $= \frac{4c}{g}$, et radius osculi in vertice $A = \frac{2c}{g}$.

12. **Coroll. 2.** Celeritas, quam corpus in puncto b habebit, debita erit altitudini

$$c + g\,Aa = c + \frac{gg\,AB^2}{4c}.$$

Quemadmodum facilius colligetur ex iis, quae de motu projectorum in hypothesi gravitatis uniformis sunt demonstrata.

13. **Coroll. 3.** Si igitur spatium AB sit infinite parvum, seu tempusculum, quo corpus ex A in b pervenire ponitur, infinite parvum $= dt$, erit $AB = dt\sqrt{c}$, et si corpus, antequam ad A pervenerit, tempore t absolverit spatium s, nunc tempusculo dt progredietur per arcum circuli Ab, cujus radius erit $= \frac{2c}{g}$ et sinus $= AB = dt\sqrt{c}$; fiet ergo $Ab = ds = dt\sqrt{c}$ et

$$dc = \frac{gg\,AB^2}{4c} = \frac{gg\,dt^2}{4}, \quad \text{seu} \quad dc = \frac{gg\,ds^2}{4c}.$$

14. **Lemma 4.** (Fig. 130.) Si corpus in A habeat celeritatem debitam altitudini c, qua dato tempore uniformiter latum percurrat spatium AB; nunc autem in directione quacunque obliqua Aa sollicitetur a vi acceleratrice g, perveniet hoc corpus eodem tempore in locum b; ita ut ducta Bb ipsi Aa parallela, sit $Bb = \frac{g \cdot AB^2}{4c}$, intereaque movebitur in arcu parabolico Ab, cujus tangens est recta AB, et Aa diameter obliquangula, ordinatas tangenti AB parallelas bisecans.

Demonstratio. Si vis sollicitans g abesset, corpus tempore proposito utique perveniret in B; sin autem auferatur motus corpori insitus omnis, atque corpus in A quiescens a vi acceleratrice g secundum directionem Aa sollicitaretur, perveniret in a, ut esset $Aa = \frac{g \cdot AB^2}{4c}$. Hinc per motus compositionem patet, si compleatur parallelogrammum $ABba$, corpus utroque motu simul latum perventurum esse in punctum b, ex quo si ad B ducatur recta Bb, ea futura sit parallela directioni potentiae sollicitantis Aa atque $= Aa$. Cum vero sit $Aa = \frac{g \cdot AB^2}{4c} = \frac{g \cdot ab^2}{4c}$, manifestum est curvam Ab, in qua corpus movebitur ab A ad b, fore parabolam, cujus tangens sit AB, et Aa diameter obliquangula. Q. E. D.

15. **Coroll. 1.** Si hujus parabolae Ab ponatur abscissa $Aa = x$ et applicata $ab = y$, erit

$$x = \frac{gyy}{4c} \quad \text{et} \quad yy = \frac{4cx}{g};$$

hinc parameter erit $= \frac{4c}{g}$. Sit autem anguli BAa sinus $= n$, et cosinus $= m$; erit completo re angulo $Aman$, recta $Am = an = m.Aa$ et $An = am = n.Aa$; hincque ex natura parabolae curvae in A radius osculi $= \frac{2c}{ng}$.

16. **Coroll. 2.** Quo autem pateat quantam celeritatem corpus, cum in b pervenerit, sit h biturum, ad Aa productam ex b ducatur normalis bd, atque ex motu projectorum palam est, cel ritatem in b debitam fore altitudini $c + g.Ad$. At est $ab:ad = Aa:Am = 1:m$, unde $ad = m.$ et $Ad = Aa + m.ab$. Ex quo corporis in b celeritas debita erit altitudini

$$c + g.Aa + mg.ab = c + \frac{g^2 AB^2}{4c} + mg.AB = \frac{4cc + 4mgc.AB + gg.AB^2}{4c}.$$

17. **Coroll. 3.** Sit tempus, quo Ab percurritur, infinite parvum $= dt$, fiet curva Ab arc circuli, cujus radius $= \frac{2c}{ng}$, eritque ob Aa differentiale secundi gradus, $ds = Ab = ab = dt\sqrt{c}$ posita altitudine celeritati corporis in b debita $= c + dc$, fiet $dc = mgdt\sqrt{c} + \frac{ggdt^2}{4}$, et ob $dt^2 =$ erit $dc = mgdt\sqrt{c}$.

18. **Coroll. 4.** Si ergo vis sollicitans g resolvatur in tangentialem $Am = mg$ et normale $An = ng$, utraque vis seorsim effectum suum producet. Vis tangentialis nimirum mg celeritate corporis afficiet, eritque $dc = mgdt\sqrt{c} = mgds$, ob $ds = dt\sqrt{c}$; altera vero vis normalis in viae inflexione consumetur, reddetque Ab arcum circuli, cujus radius $= \frac{2c}{ng}$.

19. **Scholion.** Praemissis his lemmatis alias quidem notissimis, sed tamen hic ad usum pra sentem magis accommodatis, tractationem, quam suscepi, ipsam aggrediar. Institui autem hic in vestigare motum corporum super superficiebus utcunque mobilibus, pari modo, quo motus corpor super superficie quiescente determinari solet. Occurrunt itaque hic duo corpora, quorum mot assignari oportebit, primo scilicet superficies mobilis, ac deinde corpus ipsum, quod super ea m vetur. Hoc corpus quasi punctum hic considerabo, seu quasi tota ejus moles in unicum punct sit collecta, ita ut alium motum praeter progressivum recipere nequeat. Nisi enim haec hypoth praemissa fuerit, nullo modo corporum, magnitudine finita praeditorum, motus definiri pote et vicissim, si motus corporum in unico puncto collectorum fuerit definitus, non amplius diffic erit theoriam ad corpora finita extendere. Cum igitur hic motus puncti in superficie quacunq debeat examinari, primum ipsius superficiei figura, tum via a puncto super ea descripta, ac deni ipsius superficiei motus erit perpendendus. Si haec in latissima significatione pertractare velle opus foret summopere diffusum, neque tamen aeque arduum; quare conveniet quaestionem in arctiores limites restringere, ita tamen, ut inde modus perspici queat quaestionem in latissimo se acceptam solvendi. Superficiem igitur, super qua punctum ingreditur, statuam planam, ita ut via puncto confecta sit vel recta vel curva in plano sita, neque ideo duplici curvedine praedita.

quoniam punctum mobile perpetuo superficiei inhaerere pono, tanquam in tubo movebitur. Ex quo tota quaestio huc reducetur, ut determinetur motus puncti in tubo sive recto sive curvo, utcunque moto. Ac primo quidem hunc tubum, in quo corpus instar puncti consideratum moveatur, immobilem assumam, quo facilius hinc solutio ad tubum mobilem derivari queat.

20. **Problema 1.** (Fig. 131.) Invenire motum corporis P super superficie immobili AB, si corpus P a nullis viribus sollicitetur.

Solutio. Ponatur corpus in P habere celeritatem altitudini v debitam, qua celeritate nisi superficiei AB inhaerere cogeretur, moveri pergeret in directione tangentis $P\pi$, atque tempusculo dt absolveret spatium $P\pi = dt\sqrt{v}$. Impenetrabilitas autem superficiei impedit, quominus corpus P semitam Pp deserat, atque perinde in corpus aget, quasi id continuo a vi, cujus directio ad Pp sit normalis, sollicitaretur. Sit haec vis acceleratrix $= q$, qua corpus secundum $P\pi$ progressurum continuo normaliter ad Pp sollicitetur, haecque vis tanta esse debebit, ut tempusculo dt non spatium $P\pi$ sed arculum Pp, qui ipse sit particula viae praescriptae AB, absolvat. At per (13) vis acceleratrix q, cujus directio ad Pp vel $P\pi$ est normalis, corpus cogetur in arcu circuli progredi, cujus radius est $\frac{2v}{q}$, qui arcus, ut cum elemento curvae Pp congruat, necesse est ut $\frac{2v}{q}$ aequalis sit radio osculi curvae AB in P. Sit igitur radius osculi curvae in puncto $P = r$, eritque $\frac{2v}{q} = r$ et $q = \frac{2v}{r}$. Tum vero si celeritas in p debita ponatur altitudini $v + dv$, erit $dv = \frac{qq\,dt^2}{4}$, ideoque ob dt^2 differentiale secundi gradus erit $dv = 0$; atque corpus motu aequabili super superficie AB incedet. Q. E. I.

21. **Coroll. 1.** Quoniam igitur corpus super superficie AB motu aequabili incedit, si ponamus corporis initio in A celeritatem fuisse debitam altitudini c, hanc eandem celeritatem continuo conservabit, eritque in P altitudo celeritati debita $v = c$.

22. **Coroll. 2.** Si ponatur arcus $AP = s$, et ejus elementum $Pp = ds$, quod tempusculo dt celeritate $\sqrt{c}$ percurritur, erit $ds = dt\sqrt{c}$, hincque $dt = \frac{ds}{\sqrt{c}}$, ex quo fit tempus $t = \frac{s}{\sqrt{c}} = \frac{AP}{\sqrt{c}}$. Quare spatia percursa erunt temporibus proportionalia, omnino ut motus aequabilis postulat.

23. **Coroll. 3.** Quoniam vero ipsa curva ad corpus in superficie Pp continendum normaliter in corpus agit vi acceleratrice $q = \frac{2v}{r} = \frac{2c}{r}$, tanta vi corpus vicissim curvam in P secundum directionem normalem PQ premet, haecque pressio aequalis erit vi motrici in corpore P ex vi acceleratrice q ortae. Quare si massa corporis P ponatur $= A$, erit pressio, quam superficies a corpore in directione PQ sustinet, $= Aq = \frac{2Ac}{r}$, ubi A simul denotat pondus, quod corpus P esset habiturum, si esset grave.

24. **Coroll. 4.** Quamvis ergo corpus P ponatur gravitatis expers, tamen dum in superficie AB incedit, pressionem exerit normalem PQ, quae erit ad pondus corporis P, quod esset habiturum, si gravitate gauderet, uti se habet altitudo celeritati debita c ad semissem radii osculi curvae in P.

25. **Problema 2.** (Fig. 132.) Invenire motum corporis P super superficie immobili AB, si corpus P interea a viribus quibuscunque sollicitetur.

Solutio. Habeat corpus P cum in P venerit, celeritatem debitam altitudini v, qua ergo si sibi esset relictum, secundum tangentem $P\pi$ progrederetur, atque tempusculo dt conficeret spatium

$P\pi = dt\sqrt{v}$. Cum autem corpus in P a vi quacunque sollicitetur, revocetur haec vis ad binas, alteram normalem PN, alteram tangentialem PT. Sit vis acceleratrix normalis $= N$, et vis acceleratrix tangentialis $= T$; atque haec posterior tantum celeritatem corporis afficiet, idque ultra π in T perducet, existente $T\pi = \frac{T.P\pi^2}{4v}$: ipsam autem celeritatem ita augebit, ut si post tempusculum dt celeritas corporis debita sit altitudini $v + dv$, futurum sit $dv = Tdt\sqrt{v}$. Vis autem normalis N corpus eo magis a via praescripta Pp abducet, si quidem fuerit affirmativa, uti figura repraesentat. Quamobrem ut corpus in semita Pp retineatur, necesse est ut a multo majori vi continuo normaliter versus Pp urgeatur. Ponamus ergo corpus a superficie in directione normali PQ urgeri vi acceleratrice $PQ = q$; ideoque cum vis normalis N sit contraria, corpus actu ad Pp normaliter reducetur vi acceleratrice $q - N$. Hac autem vi ex T in p perducetur, ut sit $Tp = \frac{(q-N)P\pi^2}{4v}$. Sit curvae radius osculi in $P = r$, erit $r = \frac{PT^2}{2Tp} = \frac{P\pi^2}{2Tp}$, eo quod PT a $P\pi$ tantum differentiali secundi gradus discrepat. Fit ergo $r = \frac{2v}{q-N}$, et ob $qr - Nr = 2v$ habebitur vis acceleratrix corpus ad superficiem apprimens $q = N + \frac{2v}{r}$. Q. E. I.

26. **Coroll. 1.** Si ponatur spatium $AP = s$: erit ejus elementum $Pp = ds$, quod cum tempusculo dt celeritate $\sqrt{v}$ percurratur, erit $ds = dt\sqrt{v}$, ideoque $dv = Tds$ et $v = \int Tds$. In singulis ergo punctis definiri poterit celeritas corporis P per formulam integralem.

27. **Coroll. 2.** Si corporis P massa ponatur $= A$, quae simul exprimat pondus, quod corpus P esset habiturum si esset grave, erit vis motrix, qua corpus ad superficiem apprimetur $= (N + \frac{2v}{r})A$. Primo scilicet apprimitur vi normali NA, ac praeterea vi centrifuga $\frac{2Av}{r}$.

28. **Scholion.** Ex motu corporis super superficie immobili statim colligetur motus corporis super superficie uniformiter in directum mota, erit namque motus relativus corporis respectu superficiei idem plane, qui est absolutus super superficie quiescente. Si enim in casu modo tractato tam superficiei AB quam corpori P imprimatur motus idem secundum directionem quamcunque, ipsa superficies uniformiter in directum progredietur, corpus autem P perinde super ea moveri perget ac si superficies mansisset immobilis. Hic enim pressioni corporis P in superficiem nullum tribuo effectum, quo motus ejus uniformis in directum turbari posset, id quod revera eveniet, si vel massa corporis P statuatur infinite parva, vel superficiei inertia infinite magna. Hanc ob rem quaestionem, qua motus corporis super superficie uniformiter in directum progrediente definiatur, praetermitto, cum ejus solutio in praecedentibus problematis jam contineatur. Superficiei itaque tribuam statim motum indirectum quidem, at utcunque inaequabilem; super qua, cujusmodi futurus sit motus corporis sive a nullis viribus, sive a viribus quibuscunque sollicitati, in duobus sequentibus problematis investigabo.

29. **Problema 3.** (Fig. 133.) Progrediatur superficies ABC motu quocunque difformi super recta EF tanquam basi, determinare motum corporis P a nullis potentiis sollicitati super hac superficie incedentis.

Solutio. Cum superficies venerit in situm AB, ubi ejus celeritas debita sit altitudini u, versetur corpus in P, habeatque celeritatem relativam respectu superficiei debitam altitudini v. Hoc igitur instanti corpori P actu duplex inerit motus, alter secundum directionem tangentis PR cum celeritate $\sqrt{v}$, et alter secundum directionem PS, ipsi EF parallelam, cum celeritate superficiei $\sqrt{u}$. Si igitur capiatur $PR = dt\sqrt{v}$ et $PS = dt\sqrt{u}$, tempusculo dt corpus P sibi relictum perveniret in punctum π completo parallelogrammo $PR\pi S$. Eodem autem tempusculo superficies celeritate sua $\sqrt{u}$ conficeret pariter spatium PS, nisi interea acceleraretur. Capiat vero altitudo, celeritati superficiei in AB versantis debita u, tempusculo dt, incrementum du, atque ob hanc accelerationem tempusculo dt ultra S in s progredietur, existente

$$Ss = \frac{PS.du}{4u} = \frac{dt\,du}{4\sqrt{u}} \quad \text{ob} \quad PS = dt\sqrt{u},$$

et hanc ob rem superficies elapso tempusculo dt in situ ab versabitur, qui si transiret per punctum π, corpus P etiam in superficie ibidem reperiretur. Cum autem π extra viam ab reperiatur, ex π in ab normalis ducatur πp, ad quam definiendam ad s ducatur tangens sr aequalis ipsi $PR = dt\sqrt{v}$; atque ex r ad curvam ducatur normalis rq; erit posito curvae in P vel s radio osculi $= r$, hoc perpendiculum $rq = \frac{sr^2}{2r}$. Sit anguli $PR\pi$, quem tangens curvae cum recta EF constituit, sinus $= m$, et cosinus $= n$, posito sinu toto $= 1$, erit

$$\pi r = Ss = \frac{dt\,du}{4\sqrt{u}} \quad \text{et} \quad qr - p\pi = \pi r.m,$$

ideoque
$$p\pi = qr - \frac{m\,dt\,du}{4\sqrt{u}} = \frac{v\,dt^2}{2r} - \frac{m\,dt\,du}{4\sqrt{u}} \quad \text{et} \quad pq = n.\pi r = \frac{n\,dt\,du}{4\sqrt{u}}.$$

Erit itaque p punctum, in quo corpus P elapso tempusculo dt reperietur. Quodsi reperiretur in puncto q, propter $sq = sr = PR$, corpus P interea elementum sq motu uniformi descripsisse esset censendum; nunc autem tempusculo dt ex P vel s in p pertingere nequit sine acceleratione. Ponatur ergo corporis in p pervenientis celeritas, qua in superficie progreditur, debita altitudini $v + dv$, erit

$$dv = \frac{4v.pq}{PR} = \frac{4v.n\,dt\,du}{4PR.\sqrt{u}} = \frac{n\,du\sqrt{v}}{\sqrt{u}}; \quad \text{ideoque} \quad \frac{dv}{\sqrt{v}} = \frac{n\,du}{\sqrt{u}}.$$

Tanta autem vi corpus ad superficiem apprimetur, qua eodem tempusculo dt spatiolum πp conficitur; unde haec vis erit $= \frac{4v.p\pi}{PR^2} = \frac{4p\pi}{dt^2} = \frac{2v}{r} - \frac{m\,du}{dt\sqrt{u}}$. Quocirca si corporis P ponatur massa $= A$, erit pressio, quam superficies a corpore P in directione $p\pi$ sustinet $= A\left(\frac{2v}{r} - \frac{m\,du}{dt\sqrt{u}}\right)$. Q. E. I.

30. **Coroll. 1.** Si ergo superficies AB secundum directionem rectae EF uniformiter progrediatur, ita ut sit $du = 0$, tum corpus P super ea motu uniformi incederet, foretque pressio, quam superficies a corpore sustinet, $= \frac{2Av}{r}$, prorsus ac si superficies quiesceret.

31. **Coroll. 2.** Cum sit $\frac{dv}{\sqrt{v}} = \frac{n\,du}{\sqrt{u}}$, erit corporis in superficie a P ad Q progredientis incrementum celeritatis $\frac{dv}{\sqrt{v}}$ ad superficiei interea a B ad b procedentis incrementum celeritatis $\frac{du}{\sqrt{u}}$, uti se habet cosinus anguli $PR\pi$ seu anguli APS ad sinum totum.

32. **Coroll. 3.** Pressio autem corporis in superficiem, quae si superficies vel quiesceret vel uniformiter in directum promoveretur, foret $= \frac{2Av}{r}$, nunc diminuetur parte $\frac{mA\,du}{dt\sqrt{u}}$. Quia vero est $dt\sqrt{u} = PS$ et $Ss = \frac{dt\,du}{4\sqrt{u}}$, diminuetur pressio $\frac{2Av}{r}$ parte $mA \cdot \frac{4u.Ss}{PS^2}$.

33. **Coroll. 4.** Quoniam motus superficiei AB ita acceleratur, ut tempusculo dt praeter spatium PS, quod motu uniformi cum celeritate $\sqrt{u}$ percurreret, conficit spatiolum Ss, haec acceleratio proficiscitur a vi acceleratrice $= \frac{4u.Ss}{PS^2}$. Si vis acceleratrix superficiei ponatur $= S$, erit $S = \frac{4u.Ss}{PS^2}$; ideoque pressio corporis in superficiem erit $= \frac{2Av}{r} - mAS$.

34. **Coroll. 5.** Ad accelerationem dv in corpore P tempusculo dt producendum requiritur vis acceleratrix P, ut sit $dv = P.PR = Pdt\sqrt{v}$, ideoque $\frac{dv}{\sqrt{v}} = Pdt$. At si vis acceleratrix superficiei sit S, erit $\frac{du}{\sqrt{u}} = Sdt$. Quare cum sit $\frac{dv}{\sqrt{v}} = \frac{ndu}{\sqrt{u}}$, erit $P = nS$. Corpus P ergo perinde super superficie incedet, ac si sollicitaretur a vi tangentiali $= nS$.

35. **Coroll. 6.** Quia porro pressio corporis in superficiem est $= \frac{2Av}{r} - mAS$, perinde in superficie incedit, ac si praeter vim tangentialem mS sollicitaretur a vi normali nS in directione P. ~~Simili modo ergo corpus super superficie mota movebitur, quo super quiescente moveretur, si sollicitaretur~~ vi acceleratrice S in directione PV, parallela directioni FE.

36. **Coroll. 7.** Si igitur superficies AB secundum directionem EF sollicitetur vi acceleratrice S, corpus P a nulla vi sollicitatum super ea perinde movebitur, ac si superficies quiesceret, et corpus P sollicitaretur vi acceleratrice S in directione contraria PV.

37. **Scholion.** Hinc problema propositum facilius hoc modo solvi potuisset. Si superficies AB uniformiter progrederetur in directum, tum motus corporis P super ea idem prorsus erit ac si quiesceret; hincque motus corporis relativus idem foret, ac si corpus a nulla vi sollicitaretur. Deinde pariter manifestum est, quia superficies secundum directionem EF a vi S acceleratur, si corpus P eadem vi acceleratrice sollicitaretur secundum eandem directionem, tum adhuc eundem futurum esse motum corporis, ac si superficies quiesceret. Quare cum sola superficies urgeatur a vi acceleratrice S in directione EF, corpus P super ea perinde movebitur, ac si sollicitaretur in directione contraria PV ab aequali vi acceleratrice S, ipsa autem superficies quiesceret. Reducitur ergo hic casus ad problema 2. ex quo cum resultet ex vi hac S vis tangentialis $T = nS$ et normalis $N = -mS$, ob anguli $VPT = PR\pi$ sinum $= m$ et cosinum $= n$, prodibit acceleratio corporis $dv = nSdt\sqrt{v} = nSds$ posito elemento spatii $PQ = ds$; et pressio in superficiem erit $= A(\frac{2v}{r} - mS)$, plane ut solutio inventa habet. Per hanc autem considerationem problema sequens facilius et succinctius resolvetur.

38. **Problema 4.** (Fig. 134.) Si superficies ABC secundum directionem rectae EF progrediatur sollicitata vi acceleratrice S, invenire motum corporis P super ea incedentis et sollicitati a viribus quibuscunque.

Solutio. Si superficies promoveretur uniformiter in directum, seu si a nulla vi sollicitaretur, tum corpus P super ea perinde incessurum esset, ac si superficies quiesceret: Acceleratio autem superficiei tantum immutabit motum corporis, similiterque motus corporis erit comparatus, ac si corpus praeter vires actu ipsum sollicitantes urgeretur a vi acceleratrice S in directione contraria PV. Corpus igitur super hac superficie promota perinde movebitur, ac si superficies quiesceret, et corpus praeter vires id actu sollicitantes incitaretur vi S in directione PV. Quare si anguli VPT dicatur sinus $= m$ et cosinus $= n$, ab hac vi orietur vis normalis $PN = mS$ et tangentialis $PT = nS$. Vires autem, quibus corpus P actu sollicitatur, aequivaleant vi normali $Pn = N$ et vi tangentiali $Pt = T$. Omnino ergo corpus P super superficie quiescente sollicitari censendum est a vi tangentiali $= T + nS$ et a vi normali $= N - mS$. Quodsi igitur corporis in P celeritas ponatur debita altitudini v, qua tempusculo dt conficiat spatiolum ds, sitque corporis P massa $= A$ et radius osculi in P ponatur $= r$; fiet $dv = (T + nS)\,ds$, et superficies a corpore premetur secundum directionem normalis Pn vi $= A\left(\frac{2v}{r} + N - mS\right)$. Q. E. I.

39. **Scholion.** In his quaestionibus hactenus posuimus superficiem a pressione corporis omnino non affici, neque ejus motum perturbari, sed eo motu perfecte progredi, quem ipsi potentiae sollicitantes immediate imprimant. Qui casus locum habet, si massa corporis P sit quasi infinite parva respectu massae superficiei. Quodsi vero massa corporis finitam habeat rationem ad massam superficiei, tum utique pressio corporis in superficie effectum exeret, ejus motum vel accelerando vel retardando, hincque nova variatio in ipso corporis motu resultabit. Ad hunc ergo effectum determinandum, sequens problema praemitti oportebit.

40. **Problema 5.** (Fig. 135.) Sit superficies ABC mobilis super basi BC, atque extra lineam AQB existat corpus P, quaeritur vis motrix superficiem et corpus in directione PQ ad AB normali sollicitans, quae superficiem et corpus dato tempore congreget in puncto p.

Solutio. Sit massa corporis P ejusve inertia $= A$, et massa superficiei $ABC = M$, tempus autem, quo inter se coire debeant, sit $= dt$. Ponatur vis motrix ad hoc requisita $= P$, quae eadem vis instar elastri PQ sese contrahentis et perpetuo ad superficiem normalis tempusculo dt corpus P transferat in p, et superficiem in situm apb. Erit ergo vis acceleratrix corpus P in directione Pp sollicitans $= \frac{P}{A}$, et vis superficiem in directione Qp sollicitans $= \frac{P}{M}$. Tempusculo ergo dt corpus P transferetur per spatiolum $Pp = \frac{P}{A}\cdot\frac{dt^2}{4}$ (§ 9). Quia autem superficies alium motum nisi in directione BC recipere nequit, pars tantum vis $\frac{P}{M}$ ad eam movendam impendetur, cujus directio ipsi BC est parallela. Sit ergo anguli, quem tangens curvae in Q cum recta BC constituit, sinus $= m$, cosinus $= n$; erit ducta Qq parallela ipsi BC anguli PQq sinus $= n$ et cosinus $= m$. Hinc ex vi $\frac{P}{M}$ in directione QP urgente resultat vis secundum directionem $Qq = \frac{mP}{M}$, qua ergo superficies tempusculo dt promovebitur per spatiolum $Qq = Bb = \frac{mP}{M}\cdot\frac{dt^2}{4}$. Cum igitur PQ sit normalis ad pq, erit

$$Qp = \frac{mmP}{M}\cdot\frac{dt^2}{4}, \quad \text{ideoque} \quad PQ = \frac{Pdt^2}{4}\left(\frac{1}{A} + \frac{mm}{M}\right);$$

quod spatium PQ quia est datum, reperitur $P = \frac{4AM.PQ}{dt^2(M + Amm)}$. Q. E. I.

41. **Coroll. 1.** Haec igitur congregatio superficiei mobilis et corporis P tempore dt perficitur, superficies secundum directionem BC sollicitari concipiatur a vi acceleratrice

$$= \frac{mP}{M} = \frac{4mA.PQ}{(M + mmA)\,dt^2}.$$

42. **Coroll. 2.** Corpus autem P, quod ante conjunctionem referebatur ad punctum superficiei Q per normalem PQ, ad quod punctum etiam a vi P esset reductum, si superficies immobilis extitisset, nunc non in q sed in p cum superficie coit, ita ut propter hanc conjunctionem spatiolum confecisse sit censendum; quod spatiolum est $pq = \frac{mnA.PQ}{M+mmA}$.

43. **Coroll. 3.** Si ergo ad locum corporis P ad superficiem relatum respiciamus, durante congregatione hoc corpus censendum est percurrisse spatium pq, ideoque corpus P censendum erit sollicitari secundum directionem tangentis vi acceleratrice $= \frac{4pq}{dt^2} = \frac{4mnA.PQ}{(M+mmA)\,dt^2}$. Secundum directionem normalem autem PQ corpus P sollicitatur vi acceleratrice $= \frac{P}{A} = \frac{4M.PQ}{dt^2(M+mmA)}$.

44. **Problema 6.** (Fig. 136.) Sit superficies ABC liberrime mobilis super basi EF, cujus massa sit $= M$, quae autem ipsa a nullis viribus sollicitetur: Super ea vero moveatur corpus P, cujus massa sit $= A$, a viribus quibuscunque sollicitatum, unde non solum in ipso corpore P, sed etiam in superficie motus generetur: determinare ad quodvis tempus motum cum corporis P tum etiam superficiei AB.

Solutio. Pervenerit post tempus quodcunque t superficies in situm AB, ubi habeat motum secundum BC progrediendi cum celeritate debita altitudini u. Corpus vero hoc tempore versetur in P, ubi sit ejus celeritas relativa secundum directionem tangentis PQ debita altitudini v. Praeterea autem habet motum cum superficie communem secundum directionem Pp celeritate $= \sqrt{u}$, quibus duobus motibus conjunctim verus corporis motus constituitur. Sollicitetur autem corpus in P duabus viribus acceleratricibus, altera tangentiali $= T$, altera normali $= N$. His positis investigemus cujusmodi motum corpus P tempusculo dt sequi debeat, si esset liberum et a superficie sejunctum. Primum igitur ob motum relativum in directione PQ et vim tangentialem perveniet tempusculo dt in Q, ut sit $PQ = dt\sqrt{v} + \frac{T.dt^2}{4}$. Hinc vero ob motum secundum Pp, perducetur in q, ut sit Qq parallela ipsi Pp, et $= dt\sqrt{u}$. Denique ob vim normalem ex q in r traducetur, existente $qr = \frac{Ndt^2}{4}$ et normali ad PQ; existetque adeo corpus P post tempusculum dt in puncto r, si a superficie esset solutum. Quoniam vero superficies a nullis viribus sollicitatur, motu insito perveniet in situm apb, ut sit $Bb = Pp = dt\sqrt{u}$, eritque recta pq tangens curvae in hoc situ. Versabitur ergo corpus in r extra curvam apb, in qua tamen revera ponitur inclusum. Cum igitur tubus apb in se corpus contineat firmitate sua per vim normalem, quam a corpore sustinet, per similem vim normalem corpus ex r tempusculo dt in curvam reduci debet. Sit anguli PQq, quem tangens curvae in P cum basi EF constituit, sinus $= m$, cosinus $= n$, et curvae in P radius osculi $= r$, erit $q\pi = \frac{pq^2}{2r} = \frac{PQ^2}{2r}$, ideoque distantia corporis a curva $r\pi = \frac{Ndt^2}{4} + \frac{PQ^2}{2r} = \frac{Ndt^2}{4} + \frac{v\,dt^2}{2r}$. Quamobrem per praecedentem propositionem restitutione corporis in curvam primum superficies AB secundum directionem BC sollicitabitur vi acceleratrice, quae erit $= \frac{4mA}{(M+mmA)} \cdot \frac{r\pi}{dt^2} = \frac{mA}{M+mmA}\left(N + \frac{2v}{r}\right)$. Deinde ipsum corpus secundum curvae tangentem PQ praeter vim tangentialem T sollicitabitur vi acceleratrice $= \frac{mnA}{M+mmA}\left(N + \frac{2v}{r}\right)$. Denique vero corpus in P superficiem premet normaliter vi, quae est productum ex ejus massa A in vim acceleratricem, quae requiritur ad corpus ex r in curvam reducendum.

quae est $=\frac{M}{M+mmA}(N+\frac{2v}{r})$; unde erit pressio, quam superficies in P a corpore sustinet, $=\frac{AM}{M+mmA}(N+\frac{2v}{r})$. Hanc ob rem motus corporis relativus super superficie perinde erit comparatus, quasi superficies quiesceret, atque corpus in P acceleraretur a vi acceleratrice $=T+\frac{mnA}{M+mmA}(N+\frac{2v}{r})$ hinc si spatiolum, quod corpus tempusculo dt super superficie describit, ponatur $=ds$, erit

$$dv = Tds + \frac{mnAds}{M+mmA}(N+\frac{2v}{r});$$

et pressio, quam corpus in curvam exerit, erit $=\frac{AM}{M+mmA}(N+\frac{2v}{r})$. Sicque determinatus est motus corporis in superficie; quod autem ad motum ipsius superficiei attinet, is accelerabitur vi acceleratrice $=\frac{mA}{M+mmA}(N+\frac{2v}{r})$; quare si superficies tempusculo dt per spatiolum $Bb=d\sigma$ progredi ponatur, erit $du=\frac{mAd\sigma}{M+mmA}(N+\frac{2v}{r})$, et quia spatia ds et $d\sigma$ eodem tempusculo dt confici ponuntur, erit $\frac{ds}{\sqrt{v}}=\frac{d\sigma}{\sqrt{u}}=dt$. Ex data ergo curva APB et viribus N et T, corpus sollicitantibus, per quatuor istas aequationes inventas quatuor incognitae v, u, s et σ ad datum quodvis tempus t poterunt assignari. Q. E. I.

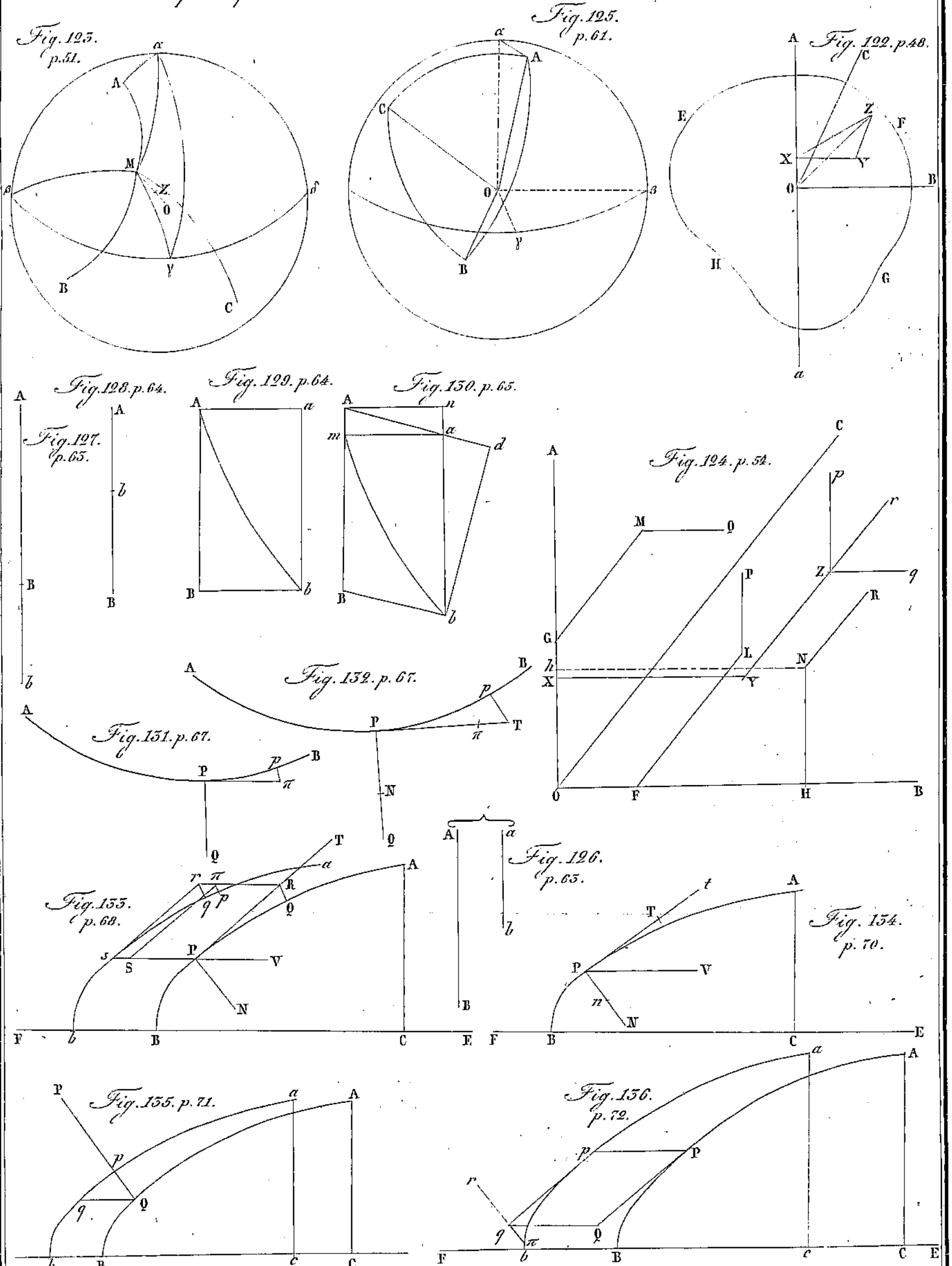
Fig. 123. p. 51.
Fig. 125. p. 61.
Fig. 122. p. 48.
Fig. 128. p. 64.
Fig. 127. p. 63.
Fig. 129. p. 64.
Fig. 130. p. 65.
Fig. 124. p. 54.
Fig. 132. p. 67.
Fig. 131. p. 67.
Fig. 126. p. 63.
Fig. 133. p. 68.
Fig. 134. p. 70.
Fig. 135. p. 71.
Fig. 136. p. 72.