1862

De motu corporum circa punctum fixum mobilium

Leonhard Euler

III.

De motu corporum circa punctum fixum mobilium.

1. Ardua omnino est quaestio in Mechanica de motu corporum, nisi vel solo motu progressivo ferantur, vel circa axem fixum revolvantur: haec enim duo motus genera fere sola ab auctoribus, qui theoriam Mechanicae excoluerunt, sunt pertractata. Quando autem corpus ita agitatur, ut ejus motus neque ad progressionem simplicem, neque ad gyrationem circa quempiam axem fixum revocari possit, regulae communes, quarum ope hi motus calculo subjici solent, nullum amplius praestant usum, talisque motus determinatio altius ex primis Mechanicae principiis repeti debet, quorum autem applicatio, ob summam motuum, qui in diversis corporis particulis inesse potest, differentiam, maxime difficilis redditur.

2. Ante Celeb. Dalembertum quidem nemo, quantum constet, hujusmodi motus evolutionem suscepit, isque adeo primus hoc argumentum attigisse est censendus in excellenti opere, quod de nutatione axis terrae conscripsit, in quo subtilissimam hujus generis quaestionem tam feliciter enodavit, ut ab eo istius profundissimae partis Mechanicae enucleatio potissimum sit expectanda. Cum enim terra, in aethere libere fluctuans et a viribus solis ac lunae sollicitata, non ita circa axem suum gyretur, ut is sibi perpetuo parallelus maneat, verus terrae motus per eas regulas, quae pro simplicioribus motus speciebus sunt erutae, minime expediri potest. Unde vir acutissimus multo sublimiores regulas in subsidium vocare est coactus, quae ita sunt comparatae, ut earum beneficio alii quicunque hujus generis motus, utcunque fuerint complicati, eodem successu definiri posse videantur.

3. Insignes hi profectus me etiam excitaverunt, ut vires meas in eadem quaestione tentarem, atque laboris mei specimen edidi in Comm. Academiae Regiae Berol. Tomo V. Quoniam autem in hac investigatione corpus terrae non solum tanquam rotundum, sed etiam a figura sphaerica minime aberrans spectari potest, hae circumstantiae in analysin ejusmodi determinationes ad calculum contrahendum inducunt, quae nullum locum essent habiturae, si terra figuram magis irregularem haberet. Ex quo methodus illa, qua pro motu terrae sum usus, parum utilitatis afferre poterit ad motum cujuscunque corporis in genere determinandum, atque nihilominus regulae adhuc generales desiderabantur, quibus corporum quorumcunque motus ad calculum redigi possent, et quae non ad certum corporum genus essent adstrictae.

*

4. Exposui ergo in Comm. Acad. Berol. Tomo VI novam regulam mechanicam, quae ad omn generis motus, quorum corpus est capax, accommodari potest: praeterquam autem quod haec regu admodum prolixis calculi formulis est contenta, ea etiam ejusmodi elementa, quae a corporis figu pendent, requirit, ut ea pro quovis corporis situ peculiari calculo investigari debeant. Retuli enim constanter situm corporis ad spatium absolutum, in quo sumtis pro lubitu ternis axibus fixis, ad quodv temporis punctum, non solum corporis momenta inertiae respectu istorum axium colligi oportet, s etiam alias quantitates, quae ob corporis figuram in calculum ingrediuntur. Quoties igitur situs co poris respectu horum ternorum axium mutatur, quod quidem singulis momentis fieri potest, valor illarum quantitatum semper de novo per computum erui debent, quo pacto motus determinatio pl rumque molestissima redditur, atque adeo saepe ne suscipi quidem potest: propterea quod, si fueri vires a situ corporis pendentes, ipse situs inter quantitates incognitas est referendus.

5. Quo igitur huic tanto incommodo occurrerem, idem negotium nuper alia via confeci, et motu ex ejusmodi elementis definivi, quorum determinatio non a situ corporis respectu ternorum illoru axium in spatio absoluto sumtorum penderet, sed a tribus axibus in ipso corpore assumtis, et cu ipso mobilibus. Quoniam enim respectu istorum axium corpus perpetuo eundem situm conserva elementa illa semel determinasse sufficit, sicque labor calculi continuo de novo instituendi evitatu Hinc etiam regulae ad motum definiendum, quas ibi tradidi, multo facilius ad usum transferri, atq ad motus corporum a viribus quibuscunque sollicitatorum investigandos satis expedite accommodari po sunt. Id solum incommodum etiamnunc restat, quod saepenumero ad calculos fere inextricabil deducamur: verum, etsi in hoc non tam Mechanicae quam Analyseos defectus cernitur, tamen si ist regulas frequenti usu nobis magis familiares reddemus, dubium est nullum, quin calculus, per plu tentamina tandem tractabilior efficiatur. Quod idem de aliis difficilioribus investigationibus experient luculenter testatur, quae nonnisi post plurimos conatus demum ad faciliorum usum sunt traductae.

6. Quae autem tum temporis de hoc argumento conscripsi, brevitati consulens fere nimis su cincte proposui, neque cuncta momenta, quibus haec investigatio innititur, satis luculenter explica Tum vero etiam hoc negotium per formulas valde prolixas et taediosas ad finem perduxi, quae cu tandem aliquanto simpliciores extiterint, nullum est dubium, quin eaedem per viam magis planam facilem obtineri queant. Quoniam igitur tam ardui operis tractatio repetita semper nobis novu lumen largiri solet, ac tam insueta objecta, quae cum hac investigatione sunt connexa, nonnisi fr quenti et assiduo usu nobis familiaria redduntur, hoc quidem idem argumentum denuo aggredia operamque dabo, ut id tam perspicue, quam quidem ob rei difficultatem fieri poterit, expona Quoniam vero ante ad motus tantum eos, qui circa centrum gravitatis fiunt, indagationem institu nunc rem aliquanto generalius sum complexurus, motusque, qui circa quodcunque punctum fixu evenire possunt, ad examen revocabo.

7. Omne corpus ita moveri potest, ut duo quaevis ejus puncta in quiete permaneant, ac tu simul omnia puncta, quae inter haec duo in directum jacent, quiescunt, quo casu corpus circa ha lineam rectam in gyrum agi dicitur, hicque motus ratione celeritatis in infinitum variare potest. S autem praeter ea duo puncta tertium quodpiam punctum, non inter ea situm, seu cum iis non directum jacens, in quiete retineatur, tum evidens est nullum plane motum in corpus cadere poss

Unde si tria puncta non in directum sita in quiete retineantur, corpus nullius plane motus erit capax, sed totum immotum manebit.

8. Cum igitur tribus punctis in quiete retinendis omnis mobilitas corporis tollatur, intelligimus tres dari in quovis corpore mobilitatis gradus. Primus scilicet et infimus mobilitatis gradus est, cum duo puncta quieta servantur, quo casu corpus circa lineam rectam per duo illa puncta transeuntem gyrabitur, unde illa linea recta axis gyrationis vocatur. Ratione directionis ergo duplex tantum motus locum habere potest, prouti gyratio vel in hanc, vel in contrariam plagam fit; ratione celeritatis autem infinita varietas in corporis motum cadit; quovis tamen momento ex motu unius puncti simul totius corporis motus innotescit, dum celeritas ubique rationem distantiae ab axe gyrationis sequitur.

9. Secundus porro mobilitatis gradus existit, cum non duo corporis puncta, sed unicum tantum in quiete fixum retinetur, sicque corpori multo major movendi libertas relinquitur. Jam enim non solum circa rectam quamcunque per istud punctum transeuntem, sed gyratio successive circa alias atque alias hujusmodi rectas fieri potest, ita tamen ut perpetuo punctum illud, quod centrum motus merito vocatur, immotum maneat. Hoc ergo casu infinities major motus multiplicitas in corpus cadit, quam praecedente.

10. Tertius denique ac summus mobilitatis gradus corpori erit tribuendus, quando ne punctum quidem corporis immotum retinetur, atque adeo corporis mobilitas nullo plane modo restringitur, quo casu corpus liberrime mobile dicitur. Cujusmodi motus investigatio, etiamsi ob summam mutabilitatem difficillima videatur, tamen ad gradum secundum facile revocatur, propterea quod quovis momento ejusmodi motum spatio absoluto inesse concipere licet, quo unum corporis punctum ad quietem redigatur. Quin etiam compertum est, omnem hujus generis motum resolvi posse in motum centri gravitatis, et motum, quo ipsum corpus circa centrum gravitatis, quasi in quiete maneret, agitatur.

11. Cum igitur motus primi generis pro omnibus corporibus rigidis, qualia hic contemplamur, jam ita sit investigatus, ut nihil amplius desiderari queat, atque motus tertii generis ad secundum feliciter sit perductus: omnis quaestio, quae adhuc in theoria motus corporum solidorum seu rigidorum enodanda restat, versatur in motu secundi generis, quo corpora circa punctum quasi centrum fixum mobilia statuantur. Hujusmodi motus cernitur, quando corpus cuspidi fixae impositum utcunque agitatur, ita tamen, ut semper idem corporis punctum cuspidi incumbat, quemadmodum acus magneticae tali cuspidi imponi solent. Quod si loco acus, orbis, seu discus, vel corpus alius cujuscunque figurae cuspidi imponatur, habebitur in hoc motus genere casus patens, qui ad summam universalitatem evehetur, quando insuper vires quascunque, quibus tale corpus urgeatur, introducemus.

12. Mirabilem usum hujusmodi motus Celeb. Bouguerus in eximio Tractatu de navigatione commemorat, ab artifice quodam Anglo inventum, quo contendit certae figurae corpus, operculo pyxidis simile, ita cuspidi imponi posse, ut eo in gyrum acto superficies suprema in planitiem efformata perpetuo ad horizontem se componat, talemque motum in navigatione commendat, quippe cujus beneficio verum planum horizontale obtineri queat, agitatione navis non obstante. Manifestum autem est motus determinationem talis corporis ad genus secundum pertinere, atque eo esse diffici-

liorem, cum ipsa cuspis, cui corpus impingit, agitationi subjecta assumatur: quae theoria cum nondum satis sit exposita, aeque est difficile istud phaenomenum explicare, atque conditiones necessarias assignare, sub quibus id sit successurum: ex quo intelligi potest, quanta adjumenta, in praxi mechanica universa, ex accurata hujusmodi motuum pertractatione, merito expectari queant.

13. Cum autem motus secundi generis in se complectatur motus primi generis, evidens est illud commode applicari non posse, nisi prius hoc diligenter fuerit exploratum. In quo etiamsi nulla amplius insit difficultas, idque jam in variis scriptis mechanicis uberrime sit expositum, tamen quatenus ei genus secundum innititur, ejus pertractatio de novo suscipienda atque ita instruenda videtur, ut ab eo via ad hoc alterum praeparetur, et connexio quae inter ambo intercedit, luculentius demonstretur. Quam ob causam ab indagatione motuum primi generis exordiar, quos equidem ex primis Mechanicae principiis ita sum derivaturus, ut pari ratione investigatio motuum secundi generis suscipi queat.

14. In omni autem motu, utcunque fuerit complicatus, sive corporum rigidorum, sive flexibilium, sive etiam fluidorum investigando, cum variae methodi in usum vocari soleant, equidem longa experientia edoctus sequentem methodum non solum commodissimam, sed etiam ita comparatam deprehendi, ut ad omnia motus genera aeque pateat, ac semper certo cum successu adhiberi possit. Primo scilicet generatim in corpore motum quemcunque inesse concipio, qui quidem generalissime omnes plane motus, quorum corpus est capax, in se complectatur. Secundo, pro singulis corporis particulis vires ad hunc motum prosequendum requisitas investigo, quae nimirum eatenus sunt necessariae, quatenus quaelibet particula vel non uniformiter, vel non in directum fertur. Tertio, has vires requisitas ad motum fictum prosequendum comparo cum viribus, a quibus corpus actu sollicitatur, easque his aequivalentes facio; quod quo facilius praestari possit, alteras vires in contrarias converto, quae proinde cum alteris in aequilibrio consistere debebunt. Cum igitur vires requisitae contrarie vel negative sumtae, vires actu sollicitantes destruere, seu cum iis aequilibrium constituere debeant, theoria aequilibrii suppeditabit aequationes, quibus motus fictus et generaliter assumtus ad motum realem perducitur, unde verus corporis motus definietur.

15. Quodsi corpus non libere est mobile, sed ejus motus limitatur, veluti si circa axem vel centrum fixum movetur, vel fluidum per canales manat, tum plerumque haec ipsa motus obstacula vim quandam sustinent, cujus determinatio per vulgares methodos saepenumero admodum fit difficilis et lubrica. Hujus autem methodi ope, quam hic adumbravi, et haec determinatio redditur planissima. Denotet enim R has vires, quas fulcrum aliave corporis obstacula sustinent; tum vero vires corpus actu sollicitantes designentur littera P, vires vero ad motum prosequendum requisitae, littera Q. Jam quoniam fulcrum pari vi in corpus reagit, ipsum corpus inde vi $= -R$ sollicitari censendum est, ita ut nunc universae vires in corpus agentes sint $= P - R$. Motus ergo ita comparatus erit, ut vires ad ejus conservationem requisitae Q his viribus $P - R$ perfecte aequivaleant, haecque adeo aequalitas subsistat $Q = P - R$, ex qua actio seu pressio corporis in fulcrum erit $R = P - Q$, seu haec pressio aequalis erit viribus corpus actu sollicitantibus, demtis viribus ad motus conservationem requisitis.

16. En ergo regulam facillimam, cujus ope quovis casu pressio corporis in fulcrum definiri potest, eaque tam late patet, ut non solum ad omnia motuum non liberorum genera extendatur, sed etiam ad omnia corporum genera, sive sint solida, sive fluida, eodem successu accommodari possit. Reducitur ergo non solum haec de pressione corporum in fulcra seu sustentacula difficillima quaestio, sed etiam ipsa motus omnium corporum determinatio ad puram quaestionem staticam, propterea quod vel aequilibrium inter vires, vel aequivalentia virium exquiritur. Pro motu scilicet ipso definiendo aequilibrium adesse debet inter vires actu sollicitantes P, et inter vires ad motum requisitas negative sumtas, hoc est inter vires P et $-Q$, quod quidem aequilibrium ex immobilitate fulcri deducitur: tum vero cogitatione remota fulcri immobilitate, differentia illarum virium $P-Q$ praebet vim a fulcro sustentam.

17. Apparet ergo fulcrum eatenus tantum premi, quatenus vires actu sollicitantes superant vires ad motum requisitas, ita ut si nullis opus sit viribus ad motum prosequendum, fulcrum omnes vires sollicitantes sustineat. Contra vero fulcrum nullas plane vires sustinebit, quando vires actu sollicitantes viribus requisitis omnino fuerint aequales, quo casu motus corporis perinde se habebit, ac si esset perfecte liberum, neque ejus motus ullo modo limitatus. Si enim axis vel fulcrum nullam vim sustinet, motus idem omnino erit, ac si axis vel fulcrum prorsus tolleretur, quo pacto corpus in perfectam libertatem se movendi vindicatur.

18. Principium autem mechanicum, ex quo vires ad quemvis motum prosequendum requisitae expeditissime definiri possunt, ita se habet: Considerato (Fig. 121) corporis elemento quocunque, cujus massa sit dM, motus ejus ita sit comparatus, ut elapso tempore $=t$, id elementum pervenerit in Z, cujus loci situs per ternas coordinatas, in datis directionibus fixis assumtas $AX=x$, $XY=y$ et $YZ=z$ definiatur, ita ut hae quantitates x, y, z tanquam functiones temporis spectari possint, quarum differentialibus dx, dy et dz, ad elementum temporis dt relatis, verus particulae Z motus continetur. Sumto jam differentiali temporis dt constante, ad motum elementi $Z=dM$ prosequendum tribus opus est viribus motricibus, secundum directiones, illis coordinatis parallelas AX, XY et YZ, sollicitantibus, quae sint Zp, Zq et Zr, eruntque hae vires:

I. Vis secundum Zp ipsi AX parallele urgens $=\frac{2dMddx}{dt^2}$,

II. Vis secundum Zq ipsi XY parallele urgens $=\frac{2dMddy}{dt^2}$,

III. Vis secundum Zr ipsi YZ parallele urgens $=\frac{2dMddz}{dt^2}$.

Directiones autem harum ternarum virium ita sunt concipiendae, uti in figura repraesentantur, ita ut tendant ad singulas coordinatas x, y et z augendas, siquidem vires prodeant affirmativae; sin autem sint negativae, directiones in contrarium sunt mutandae.

19. Quod ad binarium attinet, quo hae formulae sunt affectae, is a mensura determinata, qua tempus cum reliquis quantitatibus in comparationem ducitur, pendet, quae si alia statueretur, quicunque alius numerus aeque adhiberi posset. Utor autem hic ea ratione, secundum quam tempus, quo grave ex altitudine quacunque a libere delabitur, per $2\sqrt{a}$ exprimi solet, ita ut si a denotet altitudinem lapsus uno minuto secundo facti, expressio temporis quaecunque t per $2\sqrt{a}$ divisa in minuta secunda convertatur; hoc ergo modo tempus t cum magnitudinibus x, y, z comparabitur.

20. Porro exponenda est relatio inter vires motrices et massas, quae cum aeque per se no determinetur, sed a mensura arbitraria pendeat, equidem semper cujusque corporis massam per pon dus, quod idem corpus in superficie terrae esset habiturum, exprimere soleo, quandoquidem mass ponderibus proportionales deprehenduntur, per pondera vero etiam quaevis vires motrices utpo quantitates homogeneae exprimi possunt. Hac ergo ratione recepta, primum massae et vires motric ad homogeneitatem reducuntur, tum vero etiam quadrata temporum et lineae.

21. Temporum autem ratio deducta est ex notione velocitatis, quae in motu uniformi per spa tium ad tempus applicatum indicari solet, velocitas autem ipsa per radicem quadratam altitudinis, e qua grave labendo parem celeritatem acquirit: unde tam velocitatum quam temporum mensura ab soluta obtinetur, quae ita est comparata, ut quadrata tam temporum quam celeritatum pro linei sint reputandae.

22. Hoc igitur principio, cui omnium motuum judicium ita innititur, ut omnia principia me chanica, quaecunque vulgo proferri solent, in eo contineantur, exposito, methodoque, qua ad omni generis motus investigandos, uti convenit, indicata, ad institutum exequendum pergo, ac primo qui dem motum gyratorium corporum solidorum circa axem quemcunque fixum examini subjiciam. Si igitur (Fig. 122) corpus quodcunque $EFGH$, quod circa axem fixum Aa gyretur, quocum unum quasi corpus continuum constituere putetur, sive axis per ipsum transeat, sive extrinsecus cum e firmiter sit connexus, ita ut singulae corporis particulae tam inter se quam respectu hujus axis per petuo eundem situm conservent.

23. Hoc corpus primo consideretur in quiete, et quo singulorum ejus elementorum situs faciliu in computum duci queat, praeter axem gyrationis Aa statuantur in corpore insuper duo axes OB e OC, cum inter se tum ad Aa normales, qui se mutuo in puncto O decussent, et corpori firmiter in haereant. Situs horum duorum axium assumtorum, aeque ac punctum O, ab arbitrio nostro pende perindeque est quomodocunque constituantur. Respectu horum ternorum axium ergo quaevis parti cula corporis certum situm tenebit, qui commodissime per ternas coordinatas his axibus parallelas definietur. Scilicet a particula corporis quacunque Z demittatur in planum AOB perpendiculum Z quod axi OC erit parallelum; tum ex Y axi OB parallela agatur YX, axi OA in X occurrens; atqu situs particulae Z, respectu ternorum axium, per has ternas coordinatas $OX = x$, $XY = y$ et $YZ =$ determinabitur.

24. Pro eadem ergo corporis particula Z hae ternae coordinatae perpetuo eandem quantitatem retinebunt, etiamsi corpus utcunque moveatur, propterea quod hos axes quasi corpori infixos cum eoque simul motos assumimus. In statu enim motus hi ipsi axes cum corpore moventur, sed ipso rum respectu quaelibet corporis particula perpetuo eundem situm retinet, per coordinatas x, y et determinatum; scilicet si corpus circa axem AOa gyretur, hic quidem axis OA quiescit, sed amb reliqui OB et OC circa eum aequaliter convertentur. Sin autem motus ad genus secundum pertinea ita ut corpus circa punctum fixum O agitetur, tum fieri potest, ut omnes tres axes in continu motu versentur, nihilo vero minus eorum respectu quaelibet corporis particula constanter eunde situm conservet.

25. Motus autem corporis, sive ad genus primum, sive secundum referatur, dummodo punctum O quiescat, distinctissime cognoscetur si ad quodvis tempus situm ternorum axium respectu spatii absoluti assignare noverimus. Tum enim simul cujuslibet corporis particulae verum situm respectu spatii absoluti definire poterimus, quem si ad quodvis temporis instans colligamus, ex mutatione situs momentanea ipsum motum cujusque particulae facile concludemus; spatiolum enim a quavis particula descriptum ad elementum temporis applicatum praebebit ejus celeritatem, et duo motus ejusdem particulae duobus tempusculis successivis inter se collati ostendent cum celeritatis tum directionis mutationem, quibus rebus plane omnia, quae de motu corporis universo quaeri possunt, continentur. Hocque ergo modo perfectam motus cognitionem impetrabimus.

26. Dum autem corpus ad spatium absolutum referimus, in eo quoque tres axes assumi conveniet, quorum respectu situs corporis quovis momento definiri debet. Hi igitur tres axes spatii absoluti probe sunt distinguendi a tribus illis axibus, quos corpori infixos concipimus: illi enim revera sunt immobiles, hi vero cum corpore simul moventur, atque ex situ horum axium respectu illorum quovis momento tam situs corporis quam ejus motus cognoscitur. Quare dum corpus utcunque movetur, ita ut punctum O immotum maneat, ejus motus perfecte describetur, si ad quodvis tempus situm axium corpori infixorum respectu axium spatii absoluti assignare poterimus.

27. Quo igitur cujuslibet elementi corporis Z verum motum ad quodvis tempus definire queamus, primum ejus situm respectu axium ternorum ipsi corpori infixorum indagare debemus, qui quidem situs, uti vidimus, commodissime per ternas coordinatas his axibus parallelas determinatur; et quamdiu idem corporis elementum spectatur, hae ternae coordinatae nullam mutationem subeunt, utcunque corpus moveatur. Unde si hae coordinatae per x, y et z designentur, eae pro quantitatibus constantibus erunt habendae, quamdiu scilicet idem corporis elementum spectatur, propterea quod ejus situs respectu horum axium, qui corpori infixi simulque cum eo mobiles statuuntur, nulli mutationi est obnoxius.

28. Deinde vero ejusdem elementi situm quoque respectu ternorum axium absolutorum explorari oportet, quod pariter per alias ternas coordinatas his axibus parallelas commodissime praestabitur. Jam vero hae coordinatae etiam pro eodem corporis elemento labente tempore pro variabilibus sunt habendae, atque ex hac ipsa variatione ejus verus motus aptissime dijudicatur, siquidem ejus situs respectu horum axium continuo immutatur. Quodsi ergo hae coordinatae per litteras X, Y, Z designentur, hae successu temporis mutationem perpeti censendae sunt, dum praecedentes x, y, z pro constantibus haberi debent.

29. Quoniam ergo cujusque elementi motus ex coordinatis mobilibus X, Y, Z peti debet, in id imprimis est incumbendum, ut has coordinatas ex coordinatis fixis x, y, z derivemus, quem in finem ad quodvis tempus situm axium corporis, respectu axium spatii absoluti, explorari convenit. Principalis igitur quaestio tum huc redibit, ut cognito situ axium corporis respectu axium spatii absoluti, pro quocunque corporis elemento ternae coordinatae mobiles seu variabiles X, Y, Z ex coordinatis immobilibus et fixis x, y, z definiantur: quod igitur quemadmodum commodissime fieri possit, diligentius dispiciamus. Haec autem disquisitio tam ad motus secundi generis quam primi generis aeque patebit, quia unum saltem corporis punctum O tanquam fixum assumimus.

30. Ante omnia autem observari conveniet, si ternae coordinatae axibus OA, OB et OC inter se normalibus parallelae fuerint $OX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, atque distantia elementi Z a centro O ponatur $OZ = v$, ut sit $vv = xx + yy + zz$, tum $\frac{x}{v} = \frac{OX}{OZ}$ exprimere cosinum anguli AOZ, parique modo esse $\frac{y}{v} = \cos BOZ$ et $\frac{z}{v} = \cos COZ$. Hinc ergo ex angulis, quibus recta OZ ad ternos axes OA, OB et OC inclinatur, coordinatae his axibus parallelae ita exprimuntur, ut sit

coordinata axi OA parallela $x = v\cos AOZ$
« « OB « $y = v\cos BOZ$
« « OC « $z = v\cos COZ$.

31. Si autem situs ejusdem elementi ad alios ternos axes quoscunque inter se normales et in eodem puncto O decussantes referatur, per coordinatas X, Y, Z, quae his tribus axibus sint parallelae, hae coordinatae ad illas x, y, z semper ita erunt comparatae, ut sit

$$X = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}z, \quad Y = \mathfrak{D}x + \mathfrak{E}y + \mathfrak{F}z, \quad Z = \mathfrak{G}x + \mathfrak{H}y + \mathfrak{I}z,$$

ubi $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{I}$ sunt quantitates a situ posteriorum axium respectu priorum pendentes, uti ex elementis geometriae constat, ubi de permutatione coordinatarum respectu aliorum axium agitur.

32. Ex iisdem autem elementis constat hos coëfficientes ita a se invicem pendere, ut semper sit

$$XX + YY + ZZ = xx + yy + zz = vv.$$

Ex quo substituendis pro X, Y, Z valoribus exhibitis necesse est sit:

$$\mathfrak{AA} + \mathfrak{DD} + \mathfrak{GG} = 1, \quad \mathfrak{BB} + \mathfrak{EE} + \mathfrak{HH} = 1, \quad \mathfrak{CC} + \mathfrak{FF} + \mathfrak{II} = 1,$$
$$\mathfrak{AB} + \mathfrak{DE} + \mathfrak{GH} = 0, \quad \mathfrak{AC} + \mathfrak{DF} + \mathfrak{GI} = 0, \quad \mathfrak{BC} + \mathfrak{EF} + \mathfrak{HI} = 0,$$

quarum aequationum ope sex harum quantitatum per reliquas tres definiri possunt.

33. Hinc autem vicissim obtinetur determinatio coordinatarum x, y, z per alteras X, Y et Z, hoc modo

$$x = \mathfrak{A}X + \mathfrak{D}Y + \mathfrak{G}Z, \quad y = \mathfrak{B}X + \mathfrak{E}Y + \mathfrak{H}Z, \quad z = \mathfrak{C}X + \mathfrak{F}Y + \mathfrak{I}Z,$$

unde porro sequentes horum coëfficientium relationes colliguntur, quae quidem jam in superioribus contentae esse debent:

$$\mathfrak{AA} + \mathfrak{BB} + \mathfrak{CC} = 1, \quad \mathfrak{DD} + \mathfrak{EE} + \mathfrak{FF} = 1, \quad \mathfrak{GG} + \mathfrak{HH} + \mathfrak{II} = 1,$$
$$\mathfrak{AD} + \mathfrak{BE} + \mathfrak{CF} = 0, \quad \mathfrak{AG} + \mathfrak{BH} + \mathfrak{CI} = 0, \quad \mathfrak{DG} + \mathfrak{EH} + \mathfrak{FI} = 0.$$

34. His autem omnibus conditionibus per tres angulos satisfieri potest. Assumtis enim tribus angulis p, q, r, novem hi coëfficientes ita definiri possunt, ut sit:

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{A} = \cos p, & \mathfrak{B} = \sin p \cos q, & \mathfrak{C} = \sin p \sin q, \\
\mathfrak{D} = \sin p \cos r, & \mathfrak{E} = -\sin q \sin r - \cos p \cos q \cos r, & \mathfrak{F} = +\cos q \sin r - \cos p \sin q \cos r, \\
\mathfrak{G} = \sin p \sin r, & \mathfrak{H} = +\sin q \cos r - \cos p \cos q \sin r, & \mathfrak{I} = -\cos q \cos r - \cos p \sin q \sin r,
\end{array}$$

cujusmodi autem anguli per has litteras p, q, r quovis casu exprimantur, mox videbimus.

35. Repraesentet jam (Fig. 123) sphaera $O\alpha\beta\gamma$ spatium absolutum, respectu cujus situs corporis quovis momento definiri debeat: commodissimum autem est spatium absolutum instar sphaerae considerare, quo praecepta trigonometriae sphaericae in usum vocari possent. Existente ergo O centro hujus sphaerae, sint $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ terni axes spatii absoluti, immobiles et inter se normales, eruntque arcus $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$ in superficie sphaerae quadrantes, eorumque adeo cosinus $= 0$ et sinus $= 1$, posito radio sphaerae $= 1$. Corporis autem, cujus motus investigatur, centrumque in centro sphaerae O immobile haeret, terni axes OA, OB et OC transeant per superficiei sphaericae puncta A, B, C, praesenti quidem temporis instanti, ita ut arcus in figura non expressi AB, AC et BC sint pariter quadrantes.

36. Pro corporis elemento quocunque Z, cujus a centro O distantia est $OZ = v$, sint ternae coordinatae axibus in corpore infixis et cum corpore mobilibus OA, OB, OC parallelae x, y et z; ejusdem vero elementi ternae coordinatae axibus spatii absoluti et immobilibus $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ parallelae sint X, Y et Z. Unde si recta OZ superficiem sphaericam in M trajiciat, indeque tam ad puncta A, B, C, quam α, β, γ arcus circulorum maximorum ducantur, erit ut vidimus:

$$\cos MA = \frac{x}{v}, \quad \cos MB = \frac{y}{v}, \quad \cos MC = \frac{z}{v},$$

$$\cos M\alpha = \frac{X}{v}, \quad \cos M\beta = \frac{Y}{v}, \quad \cos M\gamma = \frac{Z}{v}.$$

Pendeant autem hae posteriores coordinatae ita a prioribus, ut sit

$$X = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}z, \quad Y = \mathfrak{D}x + \mathfrak{E}y + \mathfrak{F}z, \quad Z = \mathfrak{G}x + \mathfrak{H}y + \mathfrak{J}z.$$

37. Substitutis autem pro x, y, z et X, Y, Z superioribus valoribus habebimus

$$\cos M\alpha = \mathfrak{A}\cos MA + \mathfrak{B}\cos MB + \mathfrak{C}\cos MC,$$

$$\cos M\beta = \mathfrak{D}\cos MA + \mathfrak{E}\cos MB + \mathfrak{F}\cos MC,$$

$$\cos M\gamma = \mathfrak{G}\cos MA + \mathfrak{H}\cos MB + \mathfrak{J}\cos MC;$$

unde facile valores coefficientium per quantitates ad figuram pertinentes exhibere poterimus. Cum enim hae formulae debeant subsistere, ubicunque punctum M assumatur, ponamus punctum M sumi successive in ipsis punctis A, B, C.

38. Puncto M autem primo in A sumto, ut sit $MA = 0$, arcus MB et MC abibunt in quadrantes, eritque $\cos MB = 0$ et $\cos MC = 0$, unde nostrae aequationes praebebunt

$$\cos A\alpha = \mathfrak{A}, \quad \cos A\beta = \mathfrak{D}, \quad \cos A\gamma = \mathfrak{G}.$$

Deinde sumatur M in B, ut fiat $MB = 0$ et $\cos MB = 1$, item $\cos MA = 0$ et $\cos MC = 0$, atque prodibit

$$\cos B\alpha = \mathfrak{B}, \quad \cos B\beta = \mathfrak{E}, \quad \cos B\gamma = \mathfrak{H}.$$

Denique sumto M in C, ut fiat $MC = 0$, $\cos MC = 1$ et $\cos MA = 0$, $\cos MB = 0$, orietur

$$\cos C\alpha = \mathfrak{C}, \quad \cos C\beta = \mathfrak{F}, \quad \cos C\gamma = \mathfrak{J}.$$

39. Patet ergo litteras $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{J}$ exprimere cosinus arcuum, quibus puncta mobilia A, B, C a fixis α, β, γ distant, seu denotare cosinus angulorum, quibus axes cor-

*

poris OA, OB, OC, ad axes spatii absoluti $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ inclinantur. Erit ergo $\cos A\alpha = \cos p$, seu angulus p aequalis est arcui $A\alpha$: tum vero ob $\cos A\beta = \mathfrak{D} = \sin p \cos r$, patet r designare angulum $A\alpha\beta$. Denique ob $\cos B\alpha = \mathfrak{B} = \sin p \cos q$, patet q denotare angulum αAB; manifestum autem est si dentur primo angulus $\beta\alpha A = r$, secundo arcus $\alpha A = p$, et tertio angulus $\alpha AB = q$, tum positionem omnium trium punctorum A, B, C in spatio absoluto determinari.

40. En ergo insigne theorema trigonometricum, quo idem punctum M duplici modo ad terna sphaerae puncta quadrante a se invicem distantia refertur

$$\cos M\alpha = \cos A\alpha \cos MA + \cos B\alpha \cos MB + \cos C\alpha \cos MC,$$
$$\cos M\beta = \cos A\beta \cos MA + \cos B\beta \cos MB + \cos C\beta \cos MC,$$
$$\cos M\gamma = \cos A\gamma \cos MA + \cos B\gamma \cos MB + \cos C\gamma \cos MC,$$

cujus demonstratio more geometrico absolvenda non parum sagacitatis requirere videtur.

41. His igitur subsidiis cum ex analysi tum trigonometria sphaerica comparatis, ipsa problemata mechanica aggrediamur, siquidem etiam principia, ex quibus eorum solutio peti debet, sufficienter sunt exposita. Quae subsidia cum ad motus genus tam primum quam secundum pateant, a genere primo nostras investigationes incipiamus, quo corpus circa axem fixum gyrari assumitur. Quodsi ergo OA fuerit iste axis fixus, quia is in spatio quoque absoluto situm suum constanter retinet, cum axe $O\alpha$ confundi poterit, ita ut sit $A\alpha = 0$, ideoque αB et αC arcus 90 graduum.

De motu rotatorio corporis rigidi circa axem fixum.

42. Sumto OA pro axe fixo, circa quem corpus utcunque gyretur, congruat is cum axe $O\alpha$ spatii absoluti, et ad tempus quodcunque t bini reliqui corporis axes habeant in spatio absoluto situm OB et OC, et puncta B et C erunt in circulo maximo $\beta\gamma\delta$, cujus polus est α. Positis jam x, y, z coordinatis elementi corporis Z axibus OA, OB, OC parallelis, et X, Y, Z coordinatis ejusdem elementi axibus immobilibus parallelis, si adhibeamus supra inductam relationem in has duplices coordinatas, habebimus $A\alpha = 0$ et $\alpha B = \alpha C = 90^0$.

43. Hinc ergo coëfficientes assumti $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. ita definientur, ut sit: $\cos A\alpha = \mathfrak{A} = 1$, $\cos B\alpha = \mathfrak{B} = 0$, $\cos C\alpha = \mathfrak{C} = 0$, $\cos A\beta = \mathfrak{D} = 0$ et $\cos A\gamma = \mathfrak{G} = 0$. Ac si ponatur $B\beta = s$, erit $\cos B\beta = \mathfrak{E} = \cos s$, $\cos B\gamma = \mathfrak{H} = \sin s$, $\cos C\beta = \mathfrak{F} = -\sin s$ et $\cos C\gamma = \mathfrak{I} = \cos s$. Quibus valoribus introductis habebimus $X = x$, $Y = y \cos s - z \sin s$, $Z = y \sin s + z \cos s$, ubi $s = B\beta$ denotat angulum $\beta\alpha B$, quem corpus jam tempore t circa axem $O\alpha$ vel OA motu angulari confecit; spectari ergo debet s tanquam functio temporis t, dum coordinatae x, y, z ratione temporis sunt quantitates constantes.

44. Quoniam nunc situs elementi Z respectu spatii absoluti per ternas coordinatas X, Y, Z exprimitur, quae cum tempore variantur, dum alterae x, y, z constantes manent, si massa elementi Z per dM indicetur, et differentiale temporis dt constans assumatur, ad motum hujus elementi producendum requiruntur tres vires motrices secundum directiones axium $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ sollicitantes, quae sunt

$$\text{vis secund. } O\alpha = \frac{2dMddX}{dt^2}, \quad \text{vis secund. } O\beta = \frac{2dMddY}{dt^2}, \quad \text{vis secund. } O\gamma = \frac{2dMddZ}{dt^2},$$

quarum virium directiones, his axibus parallelae, in ipso puncto Z applicatae sunt concipiendae.

45. Innotescunt ergo vires ad elementum corporis Z sollicitandum requisitae secundum axes spatii absoluti agentes, quae per notam virium compositionem vel ad duas, vel etiam ad unicam revocari possunt. Expediet autem eas reducere ad ternas alias, quae secundum axes corpori infixos OA, OB, OC agant, ut calculus harum virium, etiam sine respectu ad motum habito, expediri possit, propterea quod elementum Z ad hos axes constanti et immutabili ratione refertur.

46. Cum autem sit $X = x$ et x constans, vis prima secundum $O\alpha$ evanescit, et reliquae duae secundum $O\beta$ et $O\gamma$ facile reducuntur ad directiones OB et OC. Resolvitur enim vis secundum $O\beta$ in has duas

$$\text{vis sec. } OB = \text{vi sec. } O\beta \cos B\beta = \text{vi sec. } O\beta \cos s,$$
$$\text{vis sec. } OC = \text{vi sec. } O\beta \cos C\beta = -\text{vi sec. } O\beta \sin s$$

similique modo vis secundum $O\gamma$ in has duas

$$\text{vis sec. } OB = \text{vi sec. } O\gamma \cos B\gamma = \text{vi sec. } O\gamma \sin s,$$
$$\text{vis sec. } OC = \text{vi sec. } O\gamma \cos C\gamma = \text{vi sec. } O\gamma \cos s.$$

47. Hinc ergo pro motu particulae Z requiruntur duae sequentes vires

$$\text{altera sec. } OB = \frac{2dM}{dt^2}(ddY\cos s + ddZ\sin s), \quad \text{altera sec. } OC = \frac{2dM}{dt^2}(-ddY\sin s + ddZ\cos s).$$

Cum autem hic variabilitas temporis spectetur, sola quantitas s erit variabilis, eritque ergo

$$dY = -yds\sin s - zds\cos s, \quad ddY = -ydds\sin s - zdds\cos s - yds^2\cos s + zds^2\sin s,$$
$$dZ = yds\cos s - zds\sin s, \quad ddZ = +ydds\cos s - zdds\sin s - yds^2\sin s - zds^2\cos s,$$

quibus valoribus substitutis binae istae vires prodibunt:

$$\text{vis sec. } OB = \frac{2dM}{dt^2}(-zdds - yds^2), \quad \text{vis sec. } OC = \frac{2dM}{dt^2}(ydds - zds^2).$$

48. Quoniam corpus est mobile circa axem OA (Fig. 122) momenta harum virium respectu ejus sunt spectanda. At vis secundum OC seu YZ agens praebet momentum ad corpus in plagam BC circa OA convertendum $=$ vi sec. $OC.y$; vis autem secundum OB seu XY dat momentum ad motum in plagam oppositam CB accelerandum $=$ vi sec. $OB.z$, unde utrinque nascitur momentum in plagam BC tendens $= \frac{2dM}{dt^2}(yy + zz)dds = \frac{2dds}{dt^2}(yy + zz)dM$. Tantum scilicet momentum requiritur pro elemento corporis $Z = dM$ ad motum, quo corpus ferri assumimus, producendum.

49. Cum igitur ob singula corporis elementa talia momenta requirantur, haec omnia momenta in unam summam colligantur, quae quidem praesenti corporis instanti locum habeant. Jam ergo tempus constans statuendum, ideoque terminus $\frac{2dds}{dt^2}$ a solo tempore pendens, et variabilitas omnis in situm elementi Z erit transferenda, ita ut nunc coordinatae y et z variabiles reddantur: ex quo summae omnium momentorum, seu momentum totale in plagam BC tendens erit $= \frac{2dds}{dt^2}\int(y^2 + z^2)\,dM$. Conservatio nimirum motus, quem in corpore inesse ponimus, hoc virium momentum requirit.

50. Denotat autem s angulum, quem corpus tempore t jam motu suo circa axem OA absolvit, unde $\frac{ds}{dt}$ exprimit ipsam celeritatem angularem in plagam BC directam, et $\frac{2dds}{dt^2}$ accelerationem hujus motus in eandem plagam, quippe quae ex differentiali celeritatis angularis ad elementum temporis applicato aestimatur. Unde videmus eatenus tantum virium momento ad hujus motus conservationem opus esse, quatenus motus angularis mutationem subit. Si enim esset uniformis, seu $\frac{dds}{dt^2}=0$, nulla vi opus esset; pro eodem autem corpore momentum virium ipsi accelerationi est proportionale.

51. Quantum autem virium momentum quaevis acceleratio pro quolibet corpore requirat, ex formula $\int(yy+zz)\,dM$ judicari debet. Denotat autem $yy+zz$ quadratum lineae XZ, hoc est quadratum distantiae elementi Z ab axe gyrationis OA: singula igitur corporis elementa in quadrata distantiarum suarum ab axe OA multiplicari, haecque cuncta producta in unam summam colligi debent, quae summa si ponatur $=Mff$, quam voco momentum inertiae corporis respectu axis OA, erit momentum virium ad accelerationem $\frac{2dds}{dt^2}$ producendam requisitum $=Mff\cdot\frac{2dds}{dt^2}$.

52. Hinc igitur vicissim, si corpus a viribus quibuscunque sollicitetur, definire poterimus, quantum ab iis motus corporis afficiatur. Quaerantur enim ex viribus illis momenta respectu axis OA, quae in unam summam collecta praebeant momentum in plagam BC tendens $=P$, et cum esse debeat $Mff\cdot\frac{2dds}{dt^2}=P$, habebitur hinc

$$\frac{2dds}{dt}=\frac{Pdt}{Mff},\quad \frac{2ds}{dt}=\frac{\int Pdt}{Mff}\quad \text{et}\quad 2s=\frac{\int dt\int Pdt}{Mff},$$

unde si ad quodvis tempus t virium sollicitantium momentum P constet, ad quodvis tempus quoque non solum acceleratio, sed etiam ipsa celeritas angularis definiri poterit.

53. Cum ergo hoc modo motus gyratorius cujuscunque corporis circa axem fixum perfecte determinetur, quaecunque fuerint vires sollicitantes, investigemus etiam vires, quas ipse axis partim ob vires sollicitantes, partim ob motum corporis sustinet. Ac supra quidem vidimus axem sustinere primum vires, quibus corpus actu sollicitatur, deinde vero insuper vires, quae sint aequales et oppositae viribus ad motum conservandum requisitis. Cum igitur per se sit manifestum, quantam vim axis sustineat a viribus corpus actu sollicitantibus, indagandae tantum restant eae vires, quae ex viribus ad motum requisitis in axem redundant. Ob motum ergo particulae Z (Fig. 124) considerandae sunt duae vires Zq et Zr, axibus OB et OC parallelae et inventis oppositae, quae propterea erunt

$$\text{vis } Zq=\frac{2dM}{dt^2}(zdds+yds^2)\quad \text{et}\quad \text{vis } Zr=\frac{2dM}{dt^2}(-ydds+zds^2)$$

vim enim Zp, quae est axi OA parallela, hoc casu in nihilum abire invenimus.

54. Omnes ergo has vires in summam colligere debemus, et quia vis Zq in planum AOC est normalis, dabitur vis quaedam MQ in hoc planum itidem normalis et axi OB parallela, quae omnibus viribus Zq aequivaleat. Deinde quia vis Zr in planum AOB est normalis, vis iis omnibus aequivalens, quae sit NR, pariter in hoc planum erit normalis, seu axi OC parallela, sicque omnes illae vires infinite parvae ad has duas vires finitas MQ et NR reducentur, quarum actionem propterea axis sentiet praeter vires, quibus corpus actu sollicitatur, ita ut, si corpus a nullis viribus sollicitaretur, axis has tantum duas vires MQ et NR esset sustenturus.

55. Ex doctrina autem compositionis virium constat, vim MQ aequalem esse summae omnium virium Zq, ita ut sit

$$\text{vis } MQ = \frac{2dds}{dt^2}\int z dM + \frac{2ds^2}{dt^2}\int y dM.$$

Deinde pari modo vis NR aequalis est summae omnium virium Zr, sicque erit

$$\text{vis } NR = -\frac{2dds}{dt^2}\int y dM + \frac{2ds^2}{dt^2}\int z dM;$$

ad has ergo vires inveniendas singula corporis elementa per binas coordinatas y et z multiplicari et integralia per totum corpus extendi debent, ut obtineantur valores totales formularum $\int y dM$ et $\int z dM$.

56. Quantitate harum virium inventa, earum loca applicationis M et N in planis AOC et AOB investigari debent, quem in finem ex M in OA et ex N in OB ducantur normales MG et NH, ita ut quaeri oporteat intervallum $OG.GM$ et $OH.HN$. Constat autem esse

$$\text{vis } MQ.OG = \int \text{vir. } Zq.x \quad \text{et} \quad \text{vis } MQ.GM = \int \text{vir. } Zq.z,$$
$$\text{vis } NR.OH = \int \text{vir. } Zr.y \quad \text{et} \quad \text{vis } NR.HN = \int \text{vir. } Zr.x,$$

unde elicitur

$$OG = \frac{\frac{2dds}{dt^2}\int xz dM + \frac{2ds^2}{dt^2}\int xy dM}{\text{vis } MQ}, \qquad GM = \frac{\frac{2dds}{dt^2}\int zz dM + \frac{2ds^2}{dt^2}\int yz dM}{\text{vis } MQ},$$

$$OH = \frac{-\frac{2dds}{dt^2}\int yy dM + \frac{2ds^2}{dt^2}\int yz dM}{\text{vis } NR}, \qquad HN = \frac{-\frac{2dds}{dt^2}\int xy dM + \frac{2ds^2}{dt^2}\int xz dM}{\text{vis } NR} = Oh.$$

57. Quo igitur hinc facilius definiri possit, quales vires axis gyrationis sustineat, corpus, quasi esset in quiete, consideretur, cui praeter vires actu sollicitantes hae duae vires MQ et NR essent applicatae. Cum enim omnium harum virium momenta respectu axis OA se destruant, ex earum conjunctione vires nascentur, quarum media directio per ipsum axem OA transit, ita ut vis aequivalens immediate in axem agat; unde patebit quanta vi opus sit ad axem in situ suo retinendum, ne inclinetur. Cum autem ex viribus actu sollicitantibus nascatur respectu axis OA momentum P, vidimus esse $P = \frac{2dds}{dt^2}\int (yy + zz)\, dM$; hinc eo expeditius compositio omnium virium in axem agentium instituetur.

58. Aequivalet autem vis MQ vi sibi aequali in axis puncto G applicata, una cum vi evanescente rectae GM in infinitum productae applicata, cujus tamen momentum sit finitum respectu axis OA, et aequali momento vis MQ. Simili modo vis NR aequivalet vi sibi aequali, axi in puncto h, ducta Nh ipsi BO parallela, applicata, et insuper vi infinite parvae, rectae hN in distantia infinita applicatae. Quare cum harum virium infinite parvarum actiones a viribus actu sollicitantibus destruantur, ob vires ad motus conservationem requisitas axis sollicitabitur in punctis G et h viribus MQ et NR ante inventis. Similique modo vires actu corpus sollicitantes in directionibus sibi parallelis axi immediate sunt applicandae, ut obtineantur vires, quas axis inde sustinet.

De motu corporis rigidi circa centrum fixum.

59. Motum circa axem fixum ideo hic accuratius definire visum est, ut pari modo calculus pro motu circa punctum fixum suscipi possit. Sumtis ergo in spatio absoluto tribus axibus immobilibus (Fig. 123) $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, existente O illo puncto fixo, circa quod corpus a viribus quibuscunque sollicitatum movetur, pervenerit corpus elapso tempore t in eum statum, ut jam axes ipsi infixi in spatio absoluto situm teneant OA, OB, OC. Quem situm si ad quodvis tempus assignare potuerimus, motum corporis perfecte habebimus cognitum; sumimus autem utrosque hos ternos axes inter se normales.

60. Pro situ porro axium mobilium OA, OB, OC respectu immobilium definiendo, statuamus ut supra: $\cos A\alpha = \mathfrak{A}$, $\cos B\alpha = \mathfrak{B}$, $\cos C\alpha = \mathfrak{C}$, $\cos A\beta = \mathfrak{D}$, $\cos B\beta = \mathfrak{E}$, $\cos C\beta = \mathfrak{F}$, $\cos A\gamma = \mathfrak{G}$, $\cos B\gamma = \mathfrak{H}$, $\cos C\gamma = \mathfrak{J}$, eruntque hae quantitates $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. functiones solius temporis t, quae ut vidimus, ita a se invicem pendent, ut sit

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{B} + \mathfrak{C}\mathfrak{C} = 1, \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{D}\mathfrak{D} + \mathfrak{G}\mathfrak{G} = 1,$$
$$\mathfrak{D}\mathfrak{D} + \mathfrak{E}\mathfrak{E} + \mathfrak{F}\mathfrak{F} = 1, \qquad \mathfrak{B}\mathfrak{B} + \mathfrak{E}\mathfrak{E} + \mathfrak{H}\mathfrak{H} = 1,$$
$$\mathfrak{G}\mathfrak{G} + \mathfrak{H}\mathfrak{H} + \mathfrak{J}\mathfrak{J} = 1, \qquad \mathfrak{C}\mathfrak{C} + \mathfrak{F}\mathfrak{F} + \mathfrak{J}\mathfrak{J} = 1,$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{D} + \mathfrak{B}\mathfrak{E} + \mathfrak{C}\mathfrak{F} = 0, \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{D}\mathfrak{E} + \mathfrak{G}\mathfrak{H} = 0,$$
$$\mathfrak{A}\mathfrak{G} + \mathfrak{B}\mathfrak{H} + \mathfrak{C}\mathfrak{J} = 0, \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{D}\mathfrak{F} + \mathfrak{G}\mathfrak{J} = 0,$$
$$\mathfrak{D}\mathfrak{G} + \mathfrak{E}\mathfrak{H} + \mathfrak{F}\mathfrak{J} = 0, \qquad \mathfrak{B}\mathfrak{C} + \mathfrak{E}\mathfrak{F} + \mathfrak{H}\mathfrak{J} = 0.$$

61. Si jam coordinatae cujusvis elementi $Z = dM$, axibus corpori infixis OA, OB, OC parallelae sint x, y, z, quae ratione temporis sunt constantes; atque ejusdem elementi coordinatae axibus immobilibus $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ parallelae ponantur X, Y, Z, jam invenimus esse

$$X = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}z, \quad Y = \mathfrak{D}x + \mathfrak{E}y + \mathfrak{F}z, \quad Z = \mathfrak{G}x + \mathfrak{H}y + \mathfrak{J}z.$$

62 His positis quaeramus vires ad motum particulae Z requisitas, quae ex his coordinatis X, Y, Z, ita reperientur ut sint

$$\text{vis sec. } O\alpha = \frac{2dMddX}{dt^2} = \frac{2dM}{dt^2}(xdd\mathfrak{A} + ydd\mathfrak{B} + zdd\mathfrak{C}),$$

$$\text{vis sec. } O\beta = \frac{2dMddY}{dt^2} = \frac{2dM}{dt^2}(xdd\mathfrak{D} + ydd\mathfrak{E} + zdd\mathfrak{F}),$$

$$\text{vis sec. } O\gamma = \frac{2dMddZ}{dt^2} = \frac{2dM}{dt^2}(xdd\mathfrak{G} + ydd\mathfrak{H} + zdd\mathfrak{J}),$$

quia nempe hic de motu ejusdem elementi Z est quaestio, coordinatae x, y, z pro constantibus functiones vero temporis tantum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. pro variabilibus sunt habendae.

63. Praestabit autem has vires ad alias directiones reducere, qui ipsis axibus corpori infixis sint parallelae, quae reductio facile instituetur hanc regulam observando. Si vis quaepiam V secundum directionem OM ageret, ea resolveretur in has vires

$$\text{vim sec. } OA = V\cos MA, \quad \text{vim sec. } OB = V\cos MB, \quad \text{vim sec. } OC = V\cos MC$$

hinc vis	praebet per resolutionem: vim sec. OA	vim sec. OB	vim sec. OC
sec. $O\alpha$	$\frac{2dMddX}{dt^2}\cos A\alpha$	$\frac{2dMddX}{dt^2}\cos B\alpha$	$\frac{2dMddX}{dt^2}\cos C\alpha$
sec. $O\beta$	$\frac{2dMddY}{dt^2}\cos A\beta$	$\frac{2dMddY}{dt^2}\cos B\beta$	$\frac{2dMddY}{dt^2}\cos C\beta$
sec. $O\gamma$	$\frac{2dMddZ}{dt^2}\cos A\gamma$	$\frac{2dMddZ}{dt^2}\cos B\gamma$	$\frac{2dMddZ}{dt^2}\cos C\gamma$.

64. His viribus colligendis orientur pro elemento in $Z = dM$

$$\text{I. Vis sec. } OA = \frac{2dM}{dt^2}\begin{Bmatrix} + x\mathfrak{A}dd\mathfrak{A} + y\mathfrak{A}dd\mathfrak{B} + z\mathfrak{A}dd\mathfrak{C} \\ + x\mathfrak{D}dd\mathfrak{D} + y\mathfrak{D}dd\mathfrak{E} + z\mathfrak{D}dd\mathfrak{F} \\ + x\mathfrak{G}dd\mathfrak{G} + y\mathfrak{G}dd\mathfrak{H} + z\mathfrak{G}dd\mathfrak{I} \end{Bmatrix} = \text{vi } Zp$$

$$\text{II. Vis sec. } OB = \frac{2dM}{dt^2}\begin{Bmatrix} + x\mathfrak{B}dd\mathfrak{A} + y\mathfrak{B}dd\mathfrak{B} + z\mathfrak{B}dd\mathfrak{C} \\ + x\mathfrak{E}dd\mathfrak{D} + y\mathfrak{E}dd\mathfrak{E} + z\mathfrak{E}dd\mathfrak{F} \\ + x\mathfrak{H}dd\mathfrak{G} + y\mathfrak{H}dd\mathfrak{H} + z\mathfrak{H}dd\mathfrak{I} \end{Bmatrix} = \text{vi } Zq$$

$$\text{III. Vis sec. } OC = \frac{2dM}{dt^2}\begin{Bmatrix} + x\mathfrak{C}dd\mathfrak{A} + y\mathfrak{C}dd\mathfrak{B} + z\mathfrak{C}dd\mathfrak{C} \\ + x\mathfrak{F}dd\mathfrak{D} + y\mathfrak{F}dd\mathfrak{E} + z\mathfrak{F}dd\mathfrak{F} \\ + x\mathfrak{I}dd\mathfrak{G} + y\mathfrak{I}dd\mathfrak{H} + z\mathfrak{I}dd\mathfrak{I} \end{Bmatrix} = \text{vi } Zr$$

ideoque ad motum elementi $Z = dM$ requiruntur hae tres vires Zp, Zq et Zr (Fig. 124).

65. Quia punctum corporis O fixum retinetur, ratione motus non tam ipsae hae vires, quam earum momenta respectu ternorum axium OA, OB et OC spectari debent.

Praebet autem vis Zp momenta circa $\begin{cases} OB = Zp.z & \text{in plagam } CA \\ OC = Zp.y & \text{« } BA \end{cases}$

vis Zq « « $\begin{cases} OC = Zq.x & \text{« } AB \\ OA = Zq.z & \text{« } CB \end{cases}$

vis Zr « « $\begin{cases} OA = Zr.y & \text{« } BC \\ OB = Zr.x & \text{« } AC \end{cases}$

66. Hinc ergo resultant ex motu particulae in $Z = dM$ pro tribus axibus OA, OB, OC sequentia tria momenta:

in plagam

$$\text{I. Mom. circa } OA = \frac{2dM}{dt^2}\begin{pmatrix} + xy\,(\mathfrak{C}dd\mathfrak{A} + \mathfrak{F}dd\mathfrak{D} + \mathfrak{I}dd\mathfrak{G}) \\ - xz\,(\mathfrak{B}dd\mathfrak{A} + \mathfrak{E}dd\mathfrak{D} + \mathfrak{H}dd\mathfrak{G}) \\ + yy\,(\mathfrak{C}dd\mathfrak{B} + \mathfrak{F}dd\mathfrak{E} + \mathfrak{I}dd\mathfrak{H}) \\ - zz\,(\mathfrak{B}dd\mathfrak{C} + \mathfrak{E}dd\mathfrak{F} + \mathfrak{H}dd\mathfrak{I}) \\ + yz\,(\mathfrak{C}dd\mathfrak{C} + \mathfrak{F}dd\mathfrak{F} + \mathfrak{I}dd\mathfrak{I}) \\ - yz\,(\mathfrak{B}dd\mathfrak{B} + \mathfrak{E}dd\mathfrak{E} + \mathfrak{H}dd\mathfrak{H}) \end{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots BC$$

in plaga

$$\text{II. Mom. circa } OB=\frac{2dM}{dt^2}\left\{\begin{aligned}&+yz\,(\mathfrak{A}dd\mathfrak{B}+\mathfrak{D}dd\mathfrak{E}+\mathfrak{G}dd\mathfrak{H})\\&-xy\,(\mathfrak{C}dd\mathfrak{B}+\mathfrak{F}dd\mathfrak{E}+\mathfrak{I}dd\mathfrak{H})\\&+zz\,(\mathfrak{A}dd\mathfrak{C}+\mathfrak{D}dd\mathfrak{F}+\mathfrak{G}dd\mathfrak{I})\\&-xx\,(\mathfrak{C}dd\mathfrak{A}+\mathfrak{F}dd\mathfrak{D}+\mathfrak{I}dd\mathfrak{G})\\&+xz\,(\mathfrak{A}dd\mathfrak{A}+\mathfrak{D}dd\mathfrak{D}+\mathfrak{G}dd\mathfrak{G})\\&-xz\,(\mathfrak{C}dd\mathfrak{C}+\mathfrak{F}dd\mathfrak{F}+\mathfrak{I}dd\mathfrak{I})\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ CA$$

$$\text{III. Mom. circa } OC=\frac{2dM}{dt^2}\left\{\begin{aligned}&+xz\,(\mathfrak{B}dd\mathfrak{C}+\mathfrak{E}dd\mathfrak{F}+\mathfrak{H}dd\mathfrak{I})\\&-yz\,(\mathfrak{A}dd\mathfrak{C}+\mathfrak{D}dd\mathfrak{F}+\mathfrak{G}dd\mathfrak{I})\\&+xx\,(\mathfrak{B}dd\mathfrak{A}+\mathfrak{E}dd\mathfrak{D}+\mathfrak{H}dd\mathfrak{G})\\&-yy\,(\mathfrak{A}dd\mathfrak{B}+\mathfrak{D}dd\mathfrak{E}+\mathfrak{G}dd\mathfrak{H})\\&+xy\,(\mathfrak{B}dd\mathfrak{B}+\mathfrak{E}dd\mathfrak{E}+\mathfrak{H}dd\mathfrak{H})\\&-xy\,(\mathfrak{A}dd\mathfrak{A}+\mathfrak{D}dd\mathfrak{D}+\mathfrak{G}dd\mathfrak{G})\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ AB$$

67. Positio autem trium axium mobilium OA, OB, OC in spatio absoluto commodissime cog-scitur ex his tribus angulis

$$\beta\alpha A=r,\quad \alpha A=p\quad \text{et}\quad \alpha AB=q,$$

ex quibus fit, ut supra vidimus,

$$\begin{aligned}&\mathfrak{A}=\cos p, &&\mathfrak{B}=\sin p\cos q, &&\mathfrak{C}=\sin p\sin q,\\&\mathfrak{D}=\sin p\cos r, &&\mathfrak{E}=-\sin q\sin r-\cos p\cos q\cos r, &&\mathfrak{F}=+\cos q\sin r-\cos p\sin q\cos r,\\&\mathfrak{G}=\sin p\sin r, &&\mathfrak{H}=+\sin q\cos r-\cos p\cos q\sin r, &&\mathfrak{I}=-\cos q\cos r-\cos p\sin q\sin r.\end{aligned}$$

Ex his ergo tribus angulis non solum ratio novem quantitatum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. sed etiam earum dif-ferentialium definiri conveniet.

68. Erit autem differentialibus sumendis

$$\begin{aligned}&d\mathfrak{A}=-dp\sin p, &&d\mathfrak{B}=dp\cos p\cos q-\mathfrak{C}dq, &&d\mathfrak{C}=dp\cos p\sin q+\mathfrak{B}dq,\\&d\mathfrak{D}=dp\cos p\cos r-\mathfrak{G}dr, &&d\mathfrak{E}=dp\sin p\cos q\cos r-\mathfrak{F}dq-\mathfrak{H}dr, &&d\mathfrak{F}=+dp\sin p\sin q\cos r+\mathfrak{E}dq-\mathfrak{I}\\&d\mathfrak{G}=dp\cos p\sin r+\mathfrak{D}dr, &&d\mathfrak{H}=dp\sin p\cos q\sin r-\mathfrak{I}dq+\mathfrak{E}dr, &&d\mathfrak{I}=+dp\sin p\sin q\sin r+\mathfrak{H}dq+\mathfrak{F}\end{aligned}$$

69. Hinc autem porro eliciuntur istae formulae

$$\begin{aligned}&\mathfrak{A}=\mathfrak{E}\mathfrak{I}-\mathfrak{F}\mathfrak{H}, &&\mathfrak{B}=\mathfrak{F}\mathfrak{G}-\mathfrak{D}\mathfrak{I}, &&\mathfrak{C}=\mathfrak{D}\mathfrak{H}-\mathfrak{E}\mathfrak{G},\\&\mathfrak{D}=\mathfrak{C}\mathfrak{H}-\mathfrak{B}\mathfrak{I}, &&\mathfrak{E}=\mathfrak{A}\mathfrak{I}-\mathfrak{C}\mathfrak{G}, &&\mathfrak{F}=\mathfrak{B}\mathfrak{G}-\mathfrak{A}\mathfrak{H},\\&\mathfrak{G}=\mathfrak{B}\mathfrak{F}-\mathfrak{C}\mathfrak{E}, &&\mathfrak{H}=\mathfrak{C}\mathfrak{D}-\mathfrak{A}\mathfrak{F}, &&\mathfrak{I}=\mathfrak{A}\mathfrak{E}-\mathfrak{B}\mathfrak{D},\end{aligned}$$

harumque ope sequentes:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}d\mathfrak{C}+\mathfrak{D}d\mathfrak{F}+\mathfrak{G}d\mathfrak{I}&=dp\sin q+dr\sin p\cos q,\\ \mathfrak{C}d\mathfrak{A}+\mathfrak{F}d\mathfrak{D}+\mathfrak{I}d\mathfrak{G}&=-dp\sin q-dr\sin p\cos q,\\ d\mathfrak{A}d\mathfrak{C}+d\mathfrak{D}d\mathfrak{F}+d\mathfrak{G}d\mathfrak{I}&=(dp\cos q-dr\sin p\sin q)(dr\cos p-dq),\\ \mathfrak{A}d\mathfrak{B}+\mathfrak{D}d\mathfrak{E}+\mathfrak{G}d\mathfrak{H}&=dp\cos q-dr\sin p\sin q,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}d\mathfrak{A} + \mathfrak{C}d\mathfrak{D} + \mathfrak{H}d\mathfrak{G} &= -dp\cos q + dr\sin p\sin q,\\
d\mathfrak{A}d\mathfrak{B} + d\mathfrak{D}d\mathfrak{C} + d\mathfrak{G}d\mathfrak{H} &= (dp\sin q + dr\sin p\cos q)(dq - dr\cos p),\\
\mathfrak{B}d\mathfrak{C} + \mathfrak{C}d\mathfrak{F} + \mathfrak{H}d\mathfrak{I} &= dq - dr\cos p,\\
\mathfrak{C}d\mathfrak{B} + \mathfrak{F}d\mathfrak{C} + \mathfrak{I}d\mathfrak{H} &= -dq + dr\cos p,\\
d\mathfrak{B}d\mathfrak{C} + d\mathfrak{C}d\mathfrak{F} + d\mathfrak{H}d\mathfrak{I} &= (dp\sin q + dr\sin p\cos q)(dp\cos q - dr\sin p\sin q).
\end{aligned}$$

70. Tum vero etiam habebitur

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}d\mathfrak{A} + \mathfrak{D}d\mathfrak{D} + \mathfrak{G}d\mathfrak{G} &= 0,\\
\mathfrak{B}d\mathfrak{B} + \mathfrak{C}d\mathfrak{C} + \mathfrak{H}d\mathfrak{H} &= 0,\\
\mathfrak{C}d\mathfrak{C} + \mathfrak{F}d\mathfrak{F} + \mathfrak{I}d\mathfrak{I} &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\mathfrak{A}^2 + d\mathfrak{D}^2 + d\mathfrak{G}^2 &= dp^2 + dr^2\sin^2 p = (dp\cos q - dr\sin p\sin q)^2 + (dp\sin q + dr\sin p\cos q)^2,\\
d\mathfrak{B}^2 + d\mathfrak{C}^2 + d\mathfrak{H}^2 &= (dp\cos q - dr\sin p\sin q)^2 + (dq - dr\cos p)^2,\\
d\mathfrak{C}^2 + d\mathfrak{F}^2 + d\mathfrak{I}^2 &= (dq\sin q + dr\sin p\cos q)^2 + (dq - dr\cos p)^2.
\end{aligned}$$

71. Cum igitur omnia ad has tres formulas

$$dp\cos q - dr\sin p\sin q, \quad dp\sin q + dr\sin p\cos q \quad \text{et} \quad dq - dr\cos p$$

sint reducta, ponamus ad abbreviandum

$$-dp\cos q + dr\sin p\sin q = Pdt, \quad +dp\sin q + dr\sin p\cos q = Qdt, \quad -dq + dr\cos p = Rdt,$$

eruntque nostrae formulae

$$\mathfrak{A}d\mathfrak{B} + \mathfrak{D}d\mathfrak{C} + \mathfrak{G}d\mathfrak{H} = -Pdt, \quad \mathfrak{A}d\mathfrak{C} + \mathfrak{D}d\mathfrak{F} + \mathfrak{G}d\mathfrak{I} = +Qdt, \quad \mathfrak{B}d\mathfrak{C} + \mathfrak{C}d\mathfrak{F} + \mathfrak{H}d\mathfrak{I} = -Rdt$$

$$\mathfrak{B}d\mathfrak{A} + \mathfrak{C}d\mathfrak{D} + \mathfrak{H}d\mathfrak{G} = +Pdt, \quad \mathfrak{C}d\mathfrak{A} + \mathfrak{F}d\mathfrak{D} + \mathfrak{I}d\mathfrak{G} = -Qdt, \quad \mathfrak{C}d\mathfrak{B} + \mathfrak{F}d\mathfrak{C} + \mathfrak{I}d\mathfrak{H} = +Rdt$$

$$d\mathfrak{A}d\mathfrak{B} + d\mathfrak{D}d\mathfrak{C} + d\mathfrak{G}d\mathfrak{H} = -QRdt^2, \quad d\mathfrak{A}d\mathfrak{C} + d\mathfrak{D}d\mathfrak{F} + d\mathfrak{G}d\mathfrak{I} = -PRdt^2, \quad d\mathfrak{B}d\mathfrak{C} + d\mathfrak{C}d\mathfrak{F} + d\mathfrak{H}d\mathfrak{I} = -PQdt^2$$

$$\begin{aligned}
d\mathfrak{A}^2 + d\mathfrak{D}^2 + d\mathfrak{G}^2 &= dt^2(P^2 + Q^2)\\
d\mathfrak{B}^2 + d\mathfrak{C}^2 + d\mathfrak{H}^2 &= dt^2(P^2 + R^2)\\
d\mathfrak{C}^2 + d\mathfrak{F}^2 + d\mathfrak{I}^2 &= dt^2(Q^2 + R^2).
\end{aligned}$$

72. Quod si jam hinc ad differentialia secunda descendamus, ob elementum temporis dt constans, reperiemus

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}dd\mathfrak{B} + \mathfrak{D}dd\mathfrak{C} + \mathfrak{G}dd\mathfrak{H} &= -dPdt + QRdt^2\\
\mathfrak{B}dd\mathfrak{A} + \mathfrak{C}dd\mathfrak{D} + \mathfrak{H}dd\mathfrak{G} &= +dPdt + QRdt^2\\
\mathfrak{C}dd\mathfrak{A} + \mathfrak{F}dd\mathfrak{D} + \mathfrak{I}dd\mathfrak{G} &= -dQdt + PRdt^2\\
\mathfrak{A}dd\mathfrak{C} + \mathfrak{D}dd\mathfrak{F} + \mathfrak{G}dd\mathfrak{I} &= +dQdt + PRdt^2\\
\mathfrak{B}dd\mathfrak{C} + \mathfrak{C}dd\mathfrak{F} + \mathfrak{H}dd\mathfrak{I} &= -dRdt + PQdt^2\\
\mathfrak{C}dd\mathfrak{B} + \mathfrak{F}dd\mathfrak{C} + \mathfrak{I}dd\mathfrak{H} &= +dRdt + PQdt^2\\
\mathfrak{A}dd\mathfrak{A} + \mathfrak{D}dd\mathfrak{D} + \mathfrak{G}dd\mathfrak{G} &= -dt^2(PP + QQ)\\
\mathfrak{B}dd\mathfrak{B} + \mathfrak{C}dd\mathfrak{C} + \mathfrak{H}dd\mathfrak{H} &= -dt^2(PP + RR)\\
\mathfrak{C}dd\mathfrak{C} + \mathfrak{F}dd\mathfrak{F} + \mathfrak{I}dd\mathfrak{I} &= -dt^2(QQ + RR).
\end{aligned}$$

*

73. Vires ergo ad conservationem motus particulae in $Z = dM$ circa axes corpori propri OA, OB, OC sequentia praebent momenta:

I. Momentum circa OA in plagam $BC =$

$$2dM\left\{\begin{aligned} &-xy\left(\frac{dQ}{dt}-PR\right)\\ &-xz\left(\frac{dP}{dt}+QR\right)\\ &+yy\left(\frac{dR}{dt}+PQ\right)\\ &+zz\left(\frac{dR}{dt}-PQ\right)\\ &+yz(PP-QQ)\end{aligned}\right.$$

II. Momentum circa OB in plagam $CA =$

$$2dM\left\{\begin{aligned} &-yz\left(\frac{dP}{dt}-QR\right)\\ &-yx\left(\frac{dR}{dt}+PQ\right)\\ &+zz\left(\frac{dQ}{dt}+PR\right)\\ &+xx\left(\frac{dQ}{dt}-PR\right)\\ &+xz(RR-PP)\end{aligned}\right.$$

III. Momentum circa OC in plagam $AB =$

$$2dM\left\{\begin{aligned} &-xz\left(\frac{dR}{dt}-PQ\right)\\ &-yz\left(\frac{dQ}{dt}+PR\right)\\ &+xx\left(\frac{dP}{dt}+QR\right)\\ &+yy\left(\frac{dP}{dt}-QR\right)\\ &+xy(QQ-RR)\end{aligned}\right.$$

74. Inventis his tribus momentis, quae ad motum particulae dM requiruntur, integralia har formularum nobis monstrabunt terna virium momenta, quae ad motum totius corporis requirunt praesenti temporis instante. Tempore autem manente, quantitates P, Q, R pro constantibus s habendae, quia ab angulis p, q, r pendent, indeque tantum cum tempore mutantur. Situs igit elementi dM jam variabilis erit, ideoque ternae coordinatae x, y, z, haeque integrationes per tota corporis massam extendi debebunt.

75. Ponamus igitur pro toto corpore, cujus massa sit $= M$, haec integralia esse

$$\int(yy+zz)\,dM = Mff = \text{momento inertiae respectu axis } OA$$
$$\int(xx+zz)\,dM = Mgg = \text{« « « « } OB$$
$$\int(xx+yy)\,dM = Mhh = \text{« « « « } OC.$$

Tum vero sit

$$\int yz\,dM = Mll, \quad \int xz\,dM = Mmm, \quad \int xy\,dM = Mnn$$

atque hi valores ex cognita corporis figura definientur.

76. Cum igitur sit

$$\int(yy-zz)\,dM = M(hh-gg), \quad \int(zz-xx)\,dM = M(ff-hh), \quad \int(xx-yy)\,dM = M(gg-ff),$$

pro totius corporis motu conservando requiruntur sequentia terna virium momenta:

I. Mom. circa axem OA in plagam $BC =$

$$2M\left\{\begin{aligned} &+ff\cdot\frac{dR}{dt}+(hh-gg)PQ\\ &+ll(PP-QQ)\\ &-mm\cdot\frac{dP}{dt}-mmQR\\ &-nn\cdot\frac{dQ}{dt}+nnPR\end{aligned}\right.$$

II. Mom. circa axem OB in plagam $CA =$

$$2M\left\{\begin{aligned} &+gg\cdot\frac{dQ}{dt}+(ff-hh)PR\\ &+mm(RR-PP)\\ &-nn\cdot\frac{dR}{dt}-nnPQ\\ &-ll\cdot\frac{dP}{dt}+llQR\end{aligned}\right.$$

III. Mom. circa axem OC in plagam $AB =$

$$2M\left\{\begin{aligned} &+hh\cdot\frac{dP}{dt}+(gg-ff)Q\\ &+nn(QQ-RR)\\ &-ll\cdot\frac{dQ}{dt}-llPR\\ &-mm\cdot\frac{dR}{dt}+mmPQ.\end{aligned}\right.$$

Problema generale.

Corporis circa punctum fixum O mobilis et a viribus quibuscunque sollicitati definire motum.

Solutio. (Fig. 124.) Assumantur in corpore tres axes se mutuo in puncto fixo O normaliter secantes, qui sint OA, OB et OC, secundum quos cujusvis elementi Z corporis situs definiatur ternis coordinatis OX, XY et YZ illis axibus parallelis. Sit massa elementi corporis in Z siti $= dM$, ejusque ternae coordinatae $OX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$. Tum ex figura et indole corporis colligantur per integrationem pro toto corpore valores sequentium formularum, ubi M denotat massam totius corporis:

$$\int (yy + zz)\, dM = Mff, \qquad \int yz dM = Mll,$$
$$\int (xx + zz)\, dM = Mgg, \qquad \int xz dM = Mmm,$$
$$\int (xx + yy) dM = Mhh, \qquad \int xy dM = Mnn.$$

His valoribus inventis ponamus (Fig. 125) elapso tempore ternos axes corporis in spatio absoluto tenere situm OA, OB et OC, qui ita respectu poli fixi α et quasi meridiani fixi $\alpha\beta$ sit comparatus, ut sit

$$\beta\alpha A = r, \quad \alpha A = p \quad \text{et} \quad \alpha AB = q$$

nuncque considerentur vires, quibus corpus sollicitatur, indeque momenta respectu ternorum axium corporis colligantur. Sit igitur

Momentum	circa	axem	OA	in plagam	$BC = F$
«	«	«	OB	«	$CA = G$
«	«	«	OC	«	$AB = H$,

quae virium momenta plerumque ab angulis p, q, r seu situ corporis in spatio absoluto pendent, neque idcirco pro cognitis accipi possunt. Porro vero aliae tres quantitates P, Q, R in computum duci debent, quae ab istis angulis p, q, r ita pendent, ut sit

$$Pdt = dr \sin p \sin q - dp \cos q, \quad Qdt = dr \sin p \cos q + dp \sin q, \quad Rdt = dr \cos p - dq.$$

Denique vero inter virium sollicitantium momenta F, G, H et has quantitates sequentes intercedunt relationes

$$\frac{F}{2M} = \begin{cases} ff \cdot \frac{dR}{dt} + (hh - gg)\, PQ + ll\,(PP - QQ) \\ - mm \cdot \frac{dP}{dt} - mmQR - nn \cdot \frac{dQ}{dt} + nnPR \end{cases}$$

$$\frac{G}{2M} = \begin{cases} gg \cdot \frac{dQ}{dt} + (ff - hh)\, PR + mm\,(RR - PP) \\ - nn \cdot \frac{dR}{dt} - nnPQ - ll \cdot \frac{dP}{dt} + llQR \end{cases}$$

$$\frac{H}{2M} = \begin{cases} hh \cdot \frac{dP}{dt} + (gg - ff)\, QR + nn\,(QQ - RR) \\ - ll \cdot \frac{dQ}{dt} - llPR - mm \cdot \frac{dR}{dt} + mmPQ. \end{cases}$$

Quoniam igitur tam P, Q, R quam F, G, H per ternos angulos p, q, r dantur, ex his aequationibus ad quodvis tempus elapsum t definiri poterunt hi ipsi anguli p, q et r, unde ad hoc instans positio ternorum corporis axium OA, OB et OC innotescit, hincque etiam verus corporis motus cognoscitur. Q. E. I.

Coroll. 1. Circa has ternas postremas aequationes notari meretur, si prima per Rdt, secunda per Qdt et tertia per Pdt multiplicetur, summae integrale fore

$$\frac{1}{M}(\int FRdt + \int GQdt + \int HPdt) = ffRR + ggQQ + hhPP - 2llPQ - 2mmPR - 2nnQR,$$

quod integrale conservationem virium vivarum involvit.

Coroll. 2. Deinde ex iisdem tribus postremis aequationibus aliud integrale obtineri potest multiplicando

$$\begin{array}{ll} \text{primam} & \text{per } (ffR - nnQ - mmP)\,dt \\ \text{secundam} & \text{per } (ggQ - llP - nnR)\,dt \\ \text{tertiam} & \text{per } (hhP - mmR - llQ)\,dt \end{array}$$

tum enim aggregati integrale erit

$$\frac{1}{M}(ff\int FRdt + gg\int GQdt + hh\int HPdt) - \frac{1}{M}(nn\int(FQ + GR)dt + ll\int(GP + HQ)dt + mm\int(HR + FP)dt) =$$
$$(f^4 + n^4 + m^4)RR + (g^4 + l^4 + n^4)QQ + (h^4 + m^4 + l^4)PP + 2mmnn\,PQ + 2llnn\,PR + 2llmmQR$$
$$- 2l^2(g^2 + h^2)PQ - 2m^2(f^2 + h^2)PR - 2n^2(f^2 + g^2)QR$$

Coroll. 3. Quodsi ergo corpus a nullis viribus sollicitetur, habentur statim hae duae aequationes integrales

$$ffRR + ggQQ + hhPP - 2llPQ - 2mmPR - 2nnQR = C$$

et

$$(f^4 + n^4 + m^4)RR + (g^4 + l^4 + n^4)QQ + (h^4 + m^4 + l^4)PP$$
$$+ 2(m^2n^2 - l^2(g^2 + h^2))PQ + 2(l^2n^2 - m^2(f^2 + h^2))PR + 2(l^2m^2 - n^2(f^2 + g^2))QR = D,$$

quas constantes ex conditionibus motus definiri oportet.

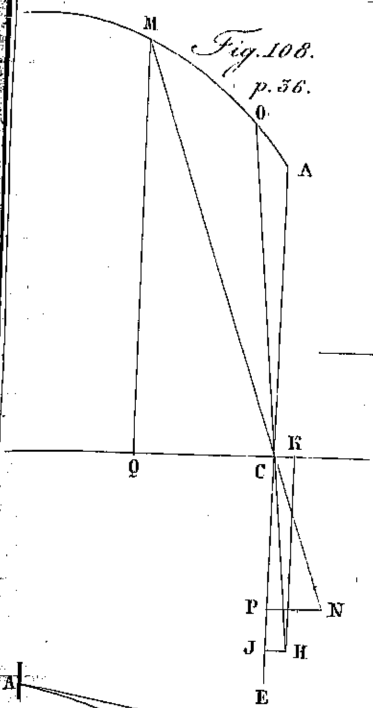

Fig. 108. p. 36.

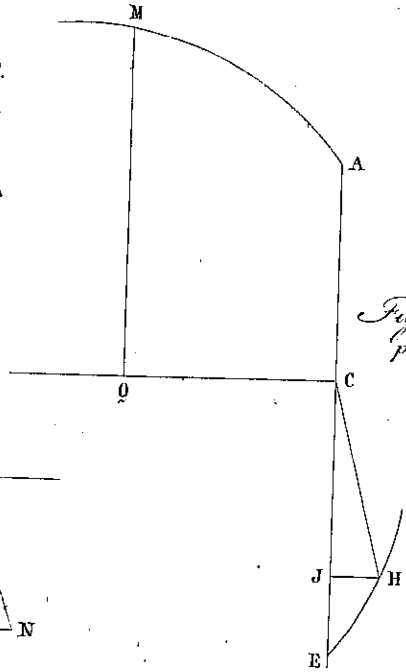

Fig. 109. p. 37.

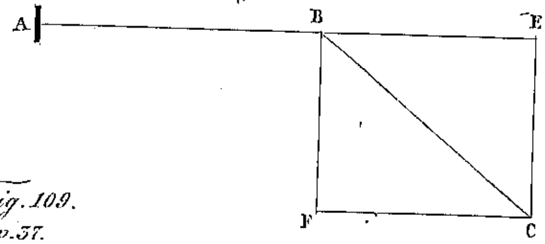

Fig. 110. p. 37.

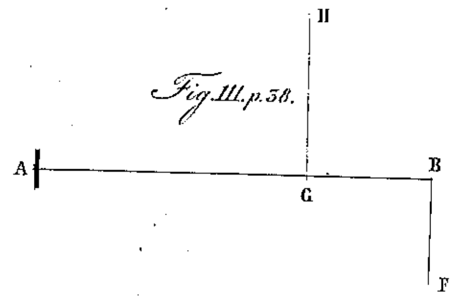

Fig. 111. p. 38.

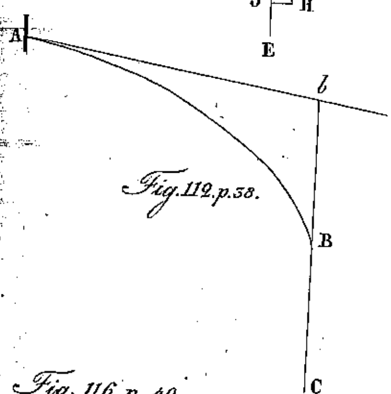

Fig. 112. p. 38.

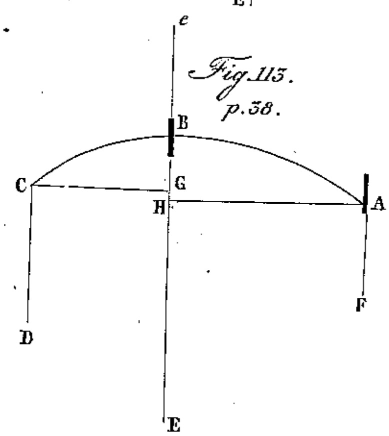

Fig. 113. p. 38.

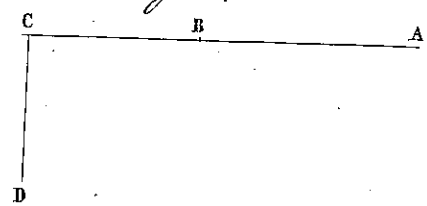

Fig. 114. p. 38.

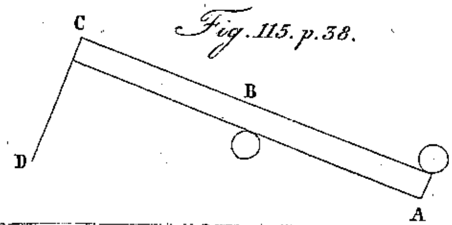

Fig. 115. p. 38.

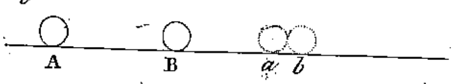

Fig. 116. p. 40.

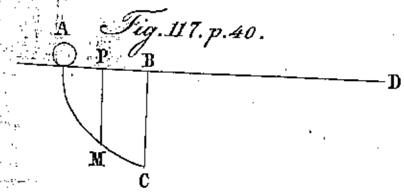

Fig. 117. p. 40.

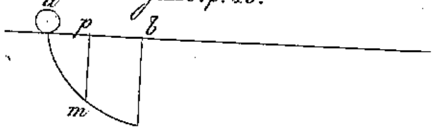

Fig. 118. p. 40.

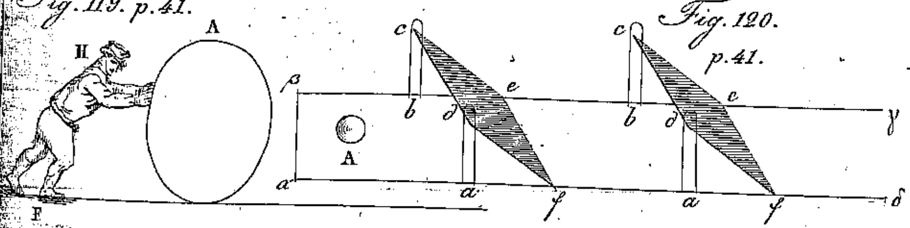

Fig. 119. p. 41.

Fig. 120. p. 41.

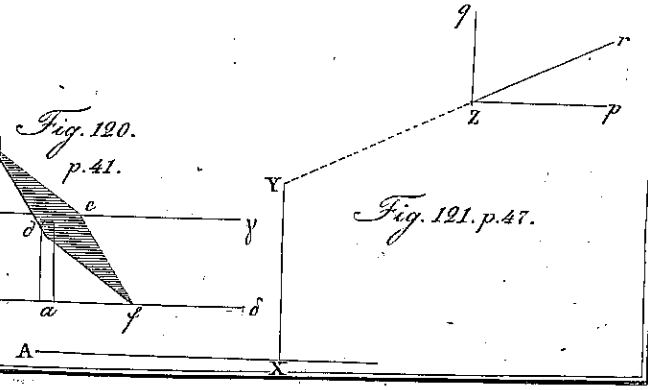

Fig. 121. p. 47.

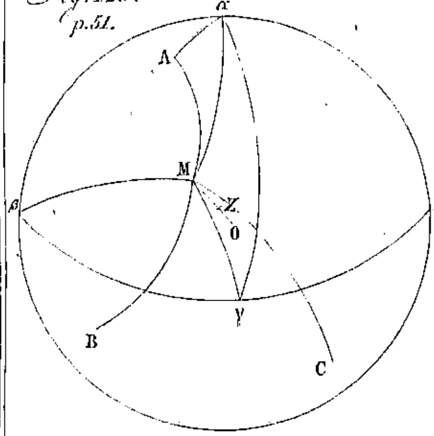

Fig. 123. p. 51.

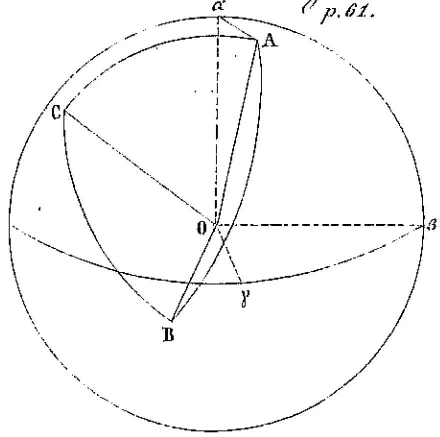

Fig. 125. p. 61.

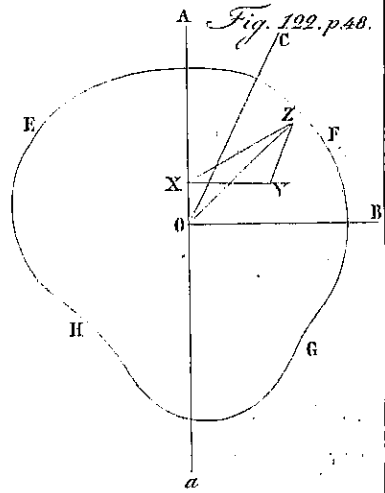

Fig. 122. p. 48.

Fig. 127. p. 63.

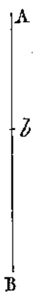

Fig. 128. p. 64.

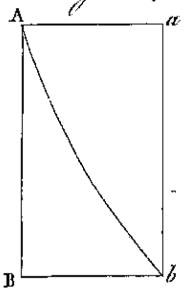

Fig. 129. p. 64.

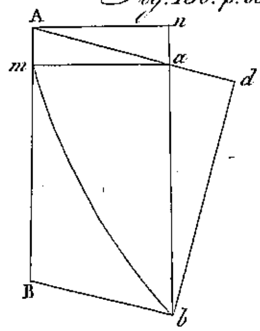

Fig. 130. p. 65.

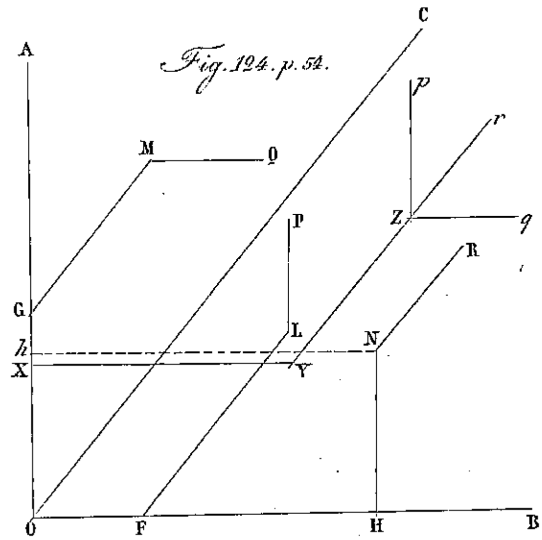

Fig. 124. p. 54.

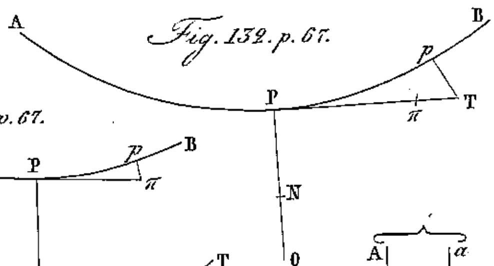

Fig. 132. p. 67.

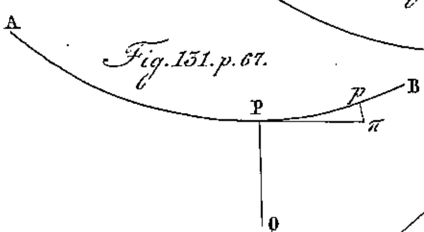

Fig. 131. p. 67.

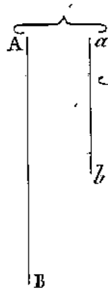

Fig. 126. p. 63.

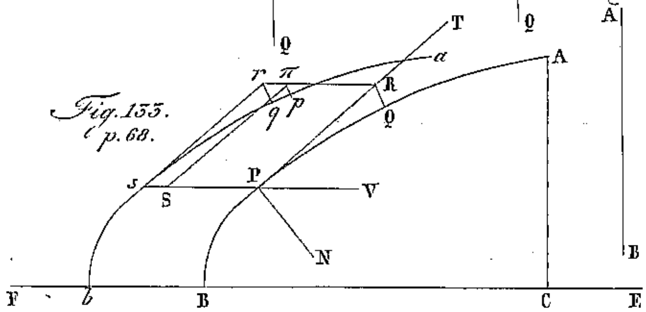

Fig. 133. p. 68.

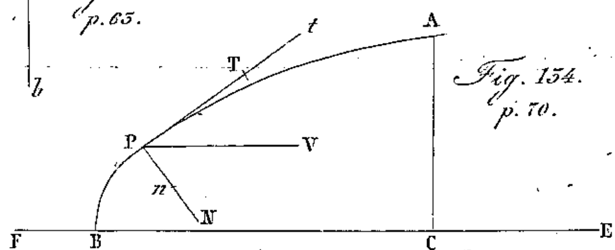

Fig. 134. p. 70.

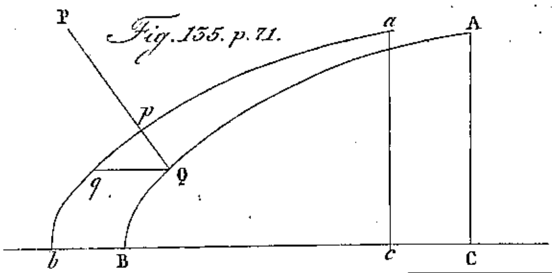

Fig. 135. p. 71.

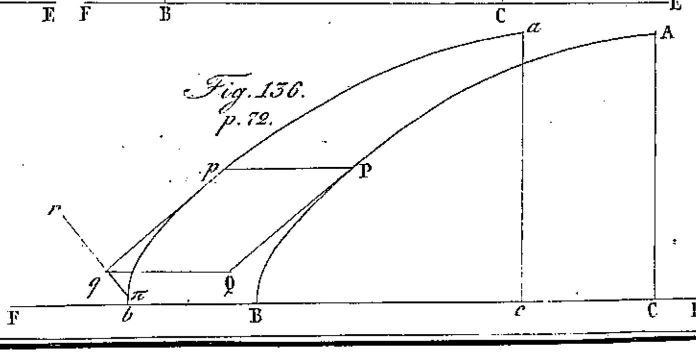

Fig. 136. p. 72.