



1862

# Vera vires existimandi ratio

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

## Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Vera vires existimandi ratio" (1862). *Euler Archive - All Works*. 824.  
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/824>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact [mgibney@pacific.edu](mailto:mgibney@pacific.edu).

II.

**Vera vires existimandi ratio.**

§ I. Jam dudum magna est disceptatio inter Mathematicos, acutissimo dum viveret Leibnitio adherentes et Cartesianos, cum hi vim corporis moti massae in celeritatem ductae proportionalem velint, illi vero istam corporum vim facto ex massa et celeritatis quadrato proportionari evincere conentur. Eorum, qui Leibnitium sequuntur, praecipue in demonstranda sua sententia operam suam impenderunt, Clariss. Joh. Bernoullius et Sgravezande, qui non solum sententiam suam rationibus sed et experimentis egregie confirmarunt.

§ II. Utut autem clare isti viri illustrissimi veritatem dogmatis sui ob oculos Cartesianorum posuerint, nihilominus semper hi in sua sententia pertinaciter perstant, et sese Leibnitio opponunt. Quos inter magnam adhibuit diligentiam ad Leibnitii sententiam refutandam professor quidam Hollandus Maclaurin nomine, in schediasmate egregio illo si diis placet, quo sententiam suam super communicationem motus corporum perfecte durorum exponit, qui non solum existimationem virium ex quadrato celeritatis refutare conatur, verum praeterea asseverat esse contradictorii quid, dicere

vires corporum esse in duplicata ratione celeritatis, idque tali paralogismo, cujus vel tyronum in geometria pudeat.

§ III. Huc autem redit ejus egregium ratiocinium: Sint duo corpora massa aequalia *A* et *B*, alterum *A* celeritate ut 8; alterum *B* ut 10; latum. Dicit ille, esse contradictionem quandam dicere, vim corporis *A* esse ad vim corporis *B* ut 64 ad 100, idque sic probat: Sit velocitas corporis *B* primum quoque ut 8; erunt vires corporum *A* et *B* 64 et 64; jam autem celeritas corporis *B* duobus gradibus augetur, ut nunc sit ut 10. Dicit, nescio quo fundamento, ejus vim juxta Leibnitium augeri 4 gradibus, et hinc vim corporis *A* fore ad vim corporis *B* ut 64 ad  $64 + 4 = 68$ , juxta ipsum Leibnitium, qui tamen quoque defendit esse hanc rationem ut 64 ad 100; unde concludit sententiam leibnitianam eo deducere, ut calculo rite subducto reperiat  $64:68 = 64:100$ , sed  $68 \neq 100$ ; quod cum sit absurdum, inferi Leibnitii sententiam contradictionem involvere.

§ IV. Hoc ratiocinium quam legitimum et justum sit, nemo sane est qui vel tantillum Geometriam libaverit, cui non statim innotescat. Quis enim non videt bonum virum duplex rectangulum

addere oblitum fuisse? dum concludit vim ipsius  $A$  esse ad  $B$  ut  $64$  ad  $64 + 4$ , seu  $68$ , cum concludendum fuisset ut  $64$  ad  $64 + 4 + 2.2.8$ , seu ut  $64$  ad  $100$ . Si ita, uti decet, ratiocinatum fuisset, nullam contradictionem reperisset.

§ V. Praeterea istud quoque Maclaurini ratiocinium hoc laborat vitio, quod nimium probe hoc enim modo et juxta ipsum contradictionem involverent pleraque in geometria certissima dogmata. Scilicet non amplius essent circuli et figurae similes in ratione duplicata diametrorum et laterum homologorum, sed essent in eorum ratione simplici, imo juxta Maclaurini principia contradictorium esset dicere  $4$  esse quadratum ipsius  $2$ .

§ VI. Nolo autem diutius huic refutationi immorari, sed rem ipsam aggrediar, meamque de virium existimatione sententiam, quantum possum, luculenter exponam.\*) Quod ut fiat, probe notandum est ante omnia impressionem motus cujusvis in corpus non fieri in instanti, sed pedetentim. Scilicet vim mortuam  $A$  (Fig. 116) in corpus  $B$  sese exerentem eique motum imprimentem per aliquantum spatium  $Ba$  corpus  $B$  concomitari et vim suam replicare, quantillum dein illud spatium sit. Si manus corpus moveo, oportet ut manu corpus aliquantisper concomiter, et ut manus cum corpore moveatur quam subito quoque manum a corpore removeam. In ipso enim contactus initio corpus concipit motus partem infinitesimam, pergente autem manu protrudere, verus motus et celeritas considerabilis in corpore generari potest.

§ VII. Ut hoc accuratius prosequar, pono (Fig. 117) manum corpus  $A$  vi aequabili per spatium  $AB$  comitari et protrudere, seu si  $AB$  valde exiguum fuerit, nihil interest etsi vis manus aliquantulum immutetur, patet, erecta ex quolibet puncto  $P$  recta perpendiculari  $PM$  proportionali celeritati corporis in  $P$ , curvam in qua extat punctum  $M$  fore parabolam, et celeritatem corporis ultra esse ut applicatam  $BC$  in puncto  $B$ , usque ad quod vis protrudens corpus  $A$  concomitatur.

§ VIII. Sit jam (Fig. 118) aliud corpus  $a$  aequale corpori  $A$ , et protrudatur ab alia vi, quae habeat ad vim, qua corpus  $A$  propellitur, ut  $v$  ad  $V$ , et quae corpus  $a$  usque ad  $b$  prosequatur, et curva  $amc$ , cujus applicatae  $pm$  corporis  $a$  in loco  $p$  celeritatem exponunt, quoque parabola, et hae duae parabolae invicem conferri quoque possint, oportet, ut parametri parabolarum  $AMC$ ,  $amc$  habeant inter se, ut vires propulsantes  $V$  et  $v$ . Hoc facto existimatio virium ex datis celeritatibus seu aestimatio subsequentis celeritatis ex data vi corpus propellente, et spatio, per quod corpus  $a$  protruditur, in promptu erit. Hic primum de aestimatione posteriore, agam.

§ IX. Existentibus ergo viribus corpora  $A$  et  $a$  protrudentibus,  $V$  et  $v$ , quibus proportionalia sunt parametri parabolarum  $AMC$ ,  $amc$ . Erunt celeritates effectae in corporibus  $A$  et  $a$  ut  $BC$  ad  $bc$ , i. e. ut  $\sqrt{V \cdot AB}$  ad  $\sqrt{v \cdot ab}$ ; id est, celeritates sunt in ratione subduplicata composita virium impellentium et spatiorum, per quae vires corpora concomitantur; si scilicet corpora fuerint aequalia; minus, modo descriptae rationi adjungi debet ratio inversa simplex massarum. Ex his jam de celeritatibus corporum datas vires sequentibus sic infero.

§ X. Sint spatia  $AB$ ,  $ab$ , per quae vires corpora prosequuntur, aequalia, erunt celeritates  $\sqrt{V}$  ad  $\sqrt{v}$ , unde Leibnitiani suum dogma deducere possunt. Sic, cum corpora impulsa tanta

\*) Hic ad marginem manu auctoris adscriptum: NB. Pono hic corpus suum motum accipere a vi mortua.

habeant vim, qua fuerunt impulsa, erunt et corporum vires ut  $V$  ad  $v$ . Quia autem sunt celeritates in subduplicata virium ratione, sequitur vires esse in duplicata celeritatum ratione, si corpora fuerint aequalia; sin vero inaequalia, erunt vires in composita ratione ex duplicata celeritatum et simplici massarum; quousque vero hoc ratiocinium valeat, ex ipso calculo facile patet, nempe eousque saltem si spatia  $AB$  et  $ab$  aequentur.

§ XI. Ut hanc materiam exemplo illustrem, protrudat (Fig. 119) homo  $H$ , pedibus in  $F$  manentibus immotis, corpus  $A$  ex totis suis viribus, donec ipse humi procidat. Si dein idem corpus, vel aliud huic aequale, quatuor homines eodem modo protrudant, acquirat hoc corpus saltem celeritatem duplam ejus, quam unus tantum homo effecit. Si alteri corpori novem homines vires suas imprimant eodem quoque modo, ut ille primus, acquirat hoc corpus velocitatem triplam saltem illius, et hoc modo argumenta pro Leibnitii sententia depromuntur ex nostra generali analogia.

§ XII. Quin etiam pro Cartesianorum sententia argumenta nostra analogia impertit. Etenim prosequantur vires  $V$  et  $v$  corpora  $A$  et  $a$  per aequalia tempora, erunt  $AB$  ad  $ab$  ut  $V$  ad  $v$ ; ergo celeritates productae in corporibus erunt ut  $\sqrt{VV}$  ad  $\sqrt{vv}$  i. e. ut  $V$  ad  $v$ , seu celeritates sunt ut vires; unde pro Cartesianis inferri potest, vires corporum esse in simplici celeritatum ratione; et hinc sequitur, si duo homines tamdiu in corpus  $B$  suas vires exercent, quamdiu unus homo suam vim in corpus  $A$ , corpus  $B$  duplo majorem acquiraturum celeritatem quam  $A$ .

§ XIII. Ex hisce ut quaedam consectaria deducam, sit (Fig. 120) tabula  $\alpha\beta\gamma\delta$ , super qua sint valvulae  $cdfe$  plures, plane inter se aequales et similes, circa axes  $cd$  mobiles et proprio pondere incumbentes in  $ef$  super tabula. Sit jam corpus  $A$  tali gradu celeritatis  $c$  praeditum, qua exacte valvulam  $cefd$  elevare, ut sibi subter illam via pateat, possit, et huic elevationi totam suam vim impendat; sequitur ex nostra theoria, si corpus  $A$  habeat celeritatem hujus duplam, nempe  $2c$ , tum posse illud 4 hujusmodi valvulas aperire; si celeritas ejus fuerit  $3c$ , 9 valvulas, et ita porro, fore scilicet numerum valvularum apertarum ut celeritatis quadratum. Quem effectum ipsi Cartesiani negare utique non poterunt, si saltem considerent corpus  $A$  celerius latum valvulam citius aperire, et ad hoc non tantum temporis requiri et non tantum de sua vi amittere, ac si tardius incessisset. An hoc experientiae sit conforme, facile periculum fieri potest, et quo motus corporis non a resistantia retardetur, tabula quantum sufficit, inclinari potest.

§ XIV. Et hinc Leibnitii asseclae, qui vim corporis ex ejus effectibus metiuntur, secure deducere possunt vires corporum esse in duplicata velocitatum ratione. Contra quam sequelam nescio quid Cartesiani movere possint.

§ XV. Sin autem valvulae istae, quod quidem contra omnem esset rationem, ita comparatae essent, ut datum tempus requiratur ad unam aperiendam, sive corpus celerius sive tardius moveatur, tum Cartesianorum sententia locum haberet; corpus enim duplo celerius motum, duplo plures valvulas aperire posset; unde illi sententiam suam confirmare possent. Verum haec valvularum hypothesis impossibilis est et inutilis.

§ XVI. Impellatur corpus  $A$  (Fig. 116) vi aliqua  $V$ , quae illud comitetur usque in  $B$ . Qui jam dicunt corporis  $A$  vim tum fore in ratione composita ex vi impellente  $V$  et ex spatio  $AB$ , per quod protruditur corpus, ex Leibnitii parte stant; tum enim corporis  $A$  vis est ut  $V \cdot AB$ , celeritas vero

ut  $\frac{\sqrt{V \cdot AB}}{A}$ ; unde cum sit  $V \cdot AB$  ut celeritatis quadratum, erit corporis  $A$  vis ut quadratum celeritatis ductum in corporis massam.

§ XVII. Qui vero volunt vim corporis  $A$  fore ut factum ex vi impellente  $V$  et tempore, quae vis  $V$  corpus  $A$  per spatium  $AB$  comitatur, ex Cartesii stabunt parte. Siquidem tempus istud esse ut  $\frac{\sqrt{V \cdot AB}}{V}$ , et hinc vis juxta eos ut  $\frac{V\sqrt{V \cdot AB}}{V}$ , id est ut  $\sqrt{V \cdot AB}$ ; celeritas vero est ut  $\frac{\sqrt{V \cdot AB}}{A}$  adeoque vis corporis  $A$  esset ut factum ex massa in celeritatem. Verum haec vires aestimandi ratione omni caret fundamento et omni rationi repugnat, eodem fere modo, quo § XV valvularum ibi descriptarum suppositio impossibilis fuit ostensa.

§ XVIII. Ex hisce principiis, ex ipsa rerum natura petitis, satis clare et evidenter Leibnitii vires aestimandi ratio evinci et demonstrari potest hocce sillogismo, cujus major propositio haec est

*Vis corporum aestimanda est ex eorum effectu;*

quae propositio tam clara est ac instar axiomatis, et qui hanc negaret, nescio quid per vim intellexeret. Omnes rationales homines unanimiter fatebuntur, eum qui duos homines simul prosternere valeat, duplo esse fortiorem eo, qui unum tantum prosternere potest, scilicet si homines prosternendi plane aequales fuerint et aequali rigore sese humi stabiliverint. Minorem propositionem ita formo:

*Sed corporum motorum effectus sunt in ratione composita ex simplici massarum et duplicata celeritatum.*

Hujus propositionis veritas jam satis in antecedentibus in apricum posita est. In § XIII ostensum corpus duplo celerius latum, quadruplo plures valvulas aperire valere. In § XI monstravimus, quatuor homines corpori nonnisi duplam celeritatem posse imprimere ejus, quam unus tantum homini corpori eidem imprimere valuit; unde ergo sequitur, si corpus tantam habeat celeritatem, ut possit hominem unum prosternere, idem corpus dupla celeritate 4 homines, tripla, 9 homines prostraturum quae utique clare satis et evidentissime veritatem propositionis minoris evincunt ac demonstrant. Ex his nunc praemissis necessario conclusio vel a Cartesiano in favorem Leibnitii deduci debet hoc modo

*Ergo vires corporum sunt in ratione composita ex simplici massarum et duplicata celeritatum*

§ XIX. Hinc ergo patet veritas ejus, quod § XVI saltem per hypothesein posuimus. Nempe vim corporis  $A$  esse ut factum ex vi impellente et spatio  $AB$ , per quod a vi protruditur, seu ut tempus comitatus in computum ducatur, vim corporis esse in ratione composita ex duplicata vis impellentis et duplicata temporis comitatus. Tempus enim hoc est ut  $\frac{\sqrt{V \cdot AB}}{V}$ , denotante  $V$  vim impellentem. Sit tempus illud  $t$ , erit  $t = \frac{\sqrt{V \cdot AB}}{V}$ , ergo  $AB = t \cdot V$ , adeoque cum sit vis corporis ut  $V \cdot AB$ , erit ea quoque ut  $VVt$ .

§ XX. Hinc ergo patet ratio ejus, quod experientia edoctum est, quod nempe corpori undecim v. gr. gradibus celeritatis moto, insuper unum celeritatis gradum ad imprimendum multo major requiratur vis, quam ad unum celeritatis gradum corpori quiescenti imprimendum. Hujus experientiae ratio ex dictis facile patet; sit enim vis corporis uno celeritatis gradu moti  $V$ , requiretur vis  $V$  eidem corpori quiescenti celeritatis gradum unum imprimendum, et ut celeritate ut 11 incedat requiritur vis ut 121; ut 12 celeritatis gradibus feratur, opus est vi exposita per 144; requiritur ergo vis ut 230 ad id, ut corpus 11 celeritatis gradibus motum, celeritatis gradus 12 acquirat cum tamen vis saltem  $V$  efficere possit, ut corpus ante quiescens uno celeritatis gradu moveatur.

