1862

Statica

Leonhard Euler

I.

Statica.

---

1. **Definitio 1.** *Statica* est scientia aequilibrii potentiarum cuivis objecto applicatarum.

2. **Definitio 2.** *Potentia* est vis, quae cuivis objecto applicata, id movere conatur.

3. **Definitio 3.** *Directio potentiae* est linea, secundum quam potentia motum imprimere conatur.

4. **Definitio 4.** *Aequilibrium* est dispositio potentiarum objecto applicatarum, id in quiete servans.

5. **Coroll.** Cum quaevis potentia conetur objectum movere (2), in statu autem aequilibrii objectum quiescat (4), sequitur tum cujuslibet potentiae actionem a reliquis impediri.

6. **Theorema 1.** Vis gravitatis est potentia.

Demonstratio. Vis gravitatis causa est, quod omnia corpora gravia conentur descendere deorsum; ergo ea movere conatur; consequenter (2) vis gravitatis est potentia. Q. E. D.

7. **Coroll.** Cum vis gravitatis conetur deorsum movere gravia, ejus directio est linea verticalis (3).

8. **Definitio 5.** Vis, qua gravia deorsum descendere conantur, vocatur *pondus*.

9. **Problema 1.** Ope ponderis efficere, ut datum objectum conetur deorsum descendere.

Solutio. Fig. 1. Sit objectum datum A, alligetur ei filum, filoque corpus grave P. Cum grave P conetur deorsum descendere, filum tendet, eoque ipso etiam objectum A conatur abripere, quare hoc modo objectum A conabitur descendere. Q. E. F.

10. **Coroll. 1.** Objectum ergo A tanta vi conabitur descendere, quanta ipsum grave P.

11. **Coroll. 2.** Effici ergo potest, ut datum objectum data vi conetur descendere, ope gravis datam habentis vim.

12. **Problema 2.** Ope ponderis efficere, ut datum objectum secundum datam directionem incedere conetur.

Solutio. Fig. 2. Sit objectum A, dataque directio AB; in ea directione ubicunque firmetur clavus B, et filum ipsi A applicatum ducatur super B, eique tum alligetur pondus seu grave P.

*

Quia hoc grave conatur descendere, tendet filum PBA, eoque ipso conabitur objectum A secum abripere, idque in directione fili AB, id est, in directione data; quare objectum hoc modo conabitur secundum directionem AB incedere. Q. E. F.

13. **Coroll. 1.** Patet hinc etiam objectum A tanta vi conari in directione AB promoveri, quanta vi P tendit descendere.

14. **Coroll. 2.** Ergo effici potest, ut A secundum datam directionem data vi conetur moveri, applicando grave tanta vi deorsum tendens.

15. **Coroll. 3.** Potest igitur quaecunque potentia et quamcunque habens directionem ad pondus reduci, quia inveniri potest pondus faciens, ut objectum data vi in data directione incedere conetur (14).

16. **Scholion 1.** Haec de ponderibus ideo adjeci, ut in posterum quae de potentiis invenientur et demonstrabuntur etiam ad corpora gravia, quae nihil aliud sunt nisi objecta, quibus potentiae deorsum tendentes sunt applicatae, referri queant, et quaevis potentiae cum ponderibus possint comparari.

17. **Scholion 2.** Monendum etiam est, in sequentibus omnia corpora tanquam gravitatis expertia considerari, quae nullâ applicatâ potentiâ nullibi se movere conarentur; ideoque vim gravitatis in potentiis habeo, qua superveniente corpora demum conantur deorsum descendere.

18. **Divisio generalis.** Dividitur Statica optime quoad diversitatem objectorum, quibus potentiae applicatae intelliguntur. Quare in *prima* sectione de potentiis puncto applicatis disseretur, quae tractatio instar fundamenti est sequentium. In *secunda* de aequilibrio potentiarum objectis rigidis applicatarum. In *tertia* de potentiis, flexibilibus objectis applicatis. In *quarta* objecta considerabuntur, ex pluribus partibus certo modo junctis composita. Tandem in *quinta* de potentiis plurimis corporibus a se invicem liberis et dissolutis agere constitui, ubi agetur de Hydrostatica.

Sectio prima.

De aequilibrio potentiarum puncto applicatarum.

Annotatio manu Cel. Auctoris margini adscripta: Dividenda est haec Sectio in duas partes, quarum prima considerat punctum liberum, quod aeque libere in omnes partes moveri potest, altera vero punctum non liberum, quod ob obstacula in unam vel plures plagas moveri nequit. Id quod evenit, si firmo obstaculo inclinet ut lineae vel rectae vel curvae.

19. **Axioma 1.** Fig. 3. Si puncto A duae potentiae aequales et quarum directiones directe sunt oppositae AB, AC, applicatae fuerint, punctum A in neutram plagam verget, et proin habebitur aequilibrium.

20. **Scholion.** Veritas hujus axiomatis constat ex principio sufficientis rationis; nulla est enim ratio, quare potius in hanc vel illam plagam tenderet. Sin autem altera alterâ major fuerit tum amplius aequilibrium existere nequit, quia non deest ratio, quare in unam plagam potius quam in aliam tendat.

21. **Coroll.** Quando ergo duabus potentiis directe contrarie puncto applicatis, id in aequilibrio consistit, concludendum est; eas potentias esse inter se aequales.

22. **Problema 3.** Datae potentiae puncto applicatae aequale invenire pondus.

Solutio. Fig. 4. Sit puncto A applicata potentia in directione AB; producatur BA ultra A, in eaque alicubi firmetur clavus C; filum puncto A alligatum super C traducatur, eique dein alia atque alia pondera appendantur, donec aequilibrium obtineatur. Erit tum pondus P aequale potentiae, punctum A secundum AB trahenti. Trahitur enim A versus AC vi, quae aequalis est ponderi P (14). Et quia est aequilibrium, haec vis ipsi AB aequatur (21). Q. E. F.

23. **Coroll.** Hoc ergo modo omnes potentiae ad pondera reduci possunt, cum inveniri possint pondera cuilibet datae potentiae aequivalentia.

24. **Definitio 6.** *Potentia a aequalis* dicitur duabus aliis, b et c, simul sumtis, si hisce b et c, puncto A (Fig. 5) secundum directiones AB, AC, inter se parallelas et coincidentes applicatis, illa a, directe contrarie applicata juxta AD cum hisce in aequilibrio consistit.

25. **Coroll.** Hinc innotescit, quid sit potentia dupla, tripla etc. nempe si sit $c = b$, erit $a = 2b$; si $c = 2b$, erit $a = 3b$ etc.

26. **Hypothesis.** Potentiae in posterum designabuntur per lineas rectas in earum directione sumtas rationemque ipsarum potentiarum servantes, ut potentia dupla per lineam duplam, tripla per triplam exponetur; et generaliter, si dico (Fig. 6) puncto A duas potentias AB et AC esse applicatas, inde intelligi debet trahere eas secundum directiones AB et AC, et esse inter se ut lineas AB et AC.

27. **Scholion.** Possunt etiam potentiae hoc modo concipi, quemadmodum eas considerabo in demonstratione sequentis theorematis. Si (Fig. 7) puncto A applicata fuerit potentia AB, concipio ei normaliter junctam esse CD, quae cum basi EF cohaeret pluribus filis CE, DF contractibilibus; unde fiet, ut haec fila contrahere se quaerentia lineam CD ad EF trahere conentur, et hoc ipso punctum A in linea AB promovere contendant. Cum dein supponam, singula fila aequali vi sese contrahendi valere, potentiae diversae erunt inter se ut numeri filorum; ita ut potentiam duplam duplus filorum numerus exhibeat, triplam triplus, etc.

28. **Axioma 2.** Omnis potentia tantum agit quantum potest.

29. **Theorema 2.** Fig. 8. Si puncto A tres potentiae AB, AC, AD fuerint applicatae, obtinueritque aequilibrium, erit quaevis potentia AC ut sinus anguli BAD a reliquis comprehensi.

Demonstratio. Considerentur potentiae, ut § 27 monitum est, erunt potentiae AB, AC, AD inter se ut numeri filorum (Fig. 9) BE, CF, DG. Cum omnis potentia tantum agat, quantum potest (28), omnia haec fila se tantum contrahent, quantum possunt, antequam acquiescant, aequilibriumque efficiant. Quare in statu aequilibrii omnium filorum summa erit contractio, seu summa longitudinum omnium filorum erit minima. Unde status aequilibrii per methodum maximorum et minimorum determinari poterit. Ea sic se habet, ut totius status situs proximus concipiatur, quo ea quantitas, quae maxima vel minima esse debet, invariata deprehendetur. Transferatur igitur A in a, ita ut sit $AB = aB$, et hoc modo longitudo filorum BE non immutatur. Ducantur Ca et Da et perpendicula Ag et ah. Patet fila CF elongata esse elemento ag, verum fila DG decurtata elemento Ah. Sit numerus filorum $CF = m$, filorum $DG = n$. Omnium ergo filorum longitudo crevit elemento $m.ag$ et decrevit elemento $n.Ah$. Quare ex proprietate minimi, cum in utroque situ A et a eadem esse debeat filorum longitudo, erit $m.ag = n.Ah$, unde $m:n = Ah:ag$. Est autem $Ah:ag = \sin Aah : \sin aAg$; sed $\sin Aah = \sin BaD$ seu $\sin BAD$, quia $Aah + BaD$ aequatur duobus rectis, ob Dag et BaA rectos. Simili modo est $\sin aAg = \sin BAC$. Ergo $m:n = \sin BAD : \sin BAC$. Est vero $m:n = AC:AD$ (27); ergo $AC:AD = \sin BAD : \sin BAC$. Simili ratiocinio evincitur esse $AB:AC = \sin CAD : \sin BAD$, ut ergo quaevis potentia sit ut sinus anguli a reliquis duabus potentiis formati. Q. E. D.

30. **Coroll. 1.** Ergo substituendo loco potentiarum pondera P, Q et R (Fig. 10) requiritur ad aequilibrium obtinendum, ut sit

$$P:Q = \sin DAC : \sin BAD$$
$$\text{et} \quad P:R = \sin CAD : \sin BAC.$$

31. **Coroll. 2.** Habito ergo aequilibrio, cognoscetur inde ratio potentiarum seu ponderum ex sinibus angulorum.

32. **Problema 4.** Fig. 11. Puncto A duabus potentiis AB, AC applicatis, applicare tertiam AD, cum illis in aequilibrio consistentem.

Solutio. Ex potentiis datis AB, AC compleatur parallelogrammum $ABEC$, in quo per A ducatur diagonalis AE, in qua ultra A prolongata accipiatur $AD = AE$; dico hanc AD exhibere tertiam potentiam quaesitam. Est enim $AD\,(= AE) : AB = \sin ABE : \sin AEB$. Sed ob figuram $ABEC$ parallelogrammum, est $\sin ABE = \sin BAC$ et $\sin AEB = \sin EAC = \sin CAD$. Consequenter erit $AD : AB = \sin BAC : \sin CAD$, ergo hae tres potentiae in aequilibrio consistunt (29). Q. E. I.

33. **Coroll. 1.** Si ducatur in parallelogrammo $ABEC$ altera diagonalis BC, haec et altera AE se mutuo bisecabunt in F. Quamobrem AD est dupla ipsius AF; unde haec fluit problematis constructio: Fig. 12. Datae duae potentiae AB, AC jungantur recta BC; haec bisecetur in F, ducaturque AF, et in hac ultra A producta sumatur $AD = 2AF$. Exprimet AD tertiam potentiam, cum datis AB et AC in aequilibrio constantem.

34. **Coroll. 2.** Si ergo Fig. 13 tres potentiae AB, AC, AD, puncto A applicatae, aequilibrium composuerint, junganturque BC, BD, CD, singula haec latera bifariam secabuntur in F, G et H a productis directionibus potentiarum DA, CA et BA.

35. **Theorema 3.** Fig. 14. Si fuerint puncto A quotcunque potentiae AB, AC, AD, AE, AF, AG in aequilibrio constantes applicatae, et earum quaevis AB in alteram partem in P producatur, ut sit $AP = AB$, exprimet haec AP potentiam reliquis AC, AD, AE, AF, AG aequivalentem, aequalem nimirum cum illis in punctum A effectum exerentem.

Demonstratio. Cum omnes potentiae aequilibrium servent, potentiae AC, AE, AF, AG impediunt ne potentia AB effectum suum obtineat; oportet ergo, ut eae omnes simul conentur punctum A, secundum plagam ipsi A oppositam, i. e. secundum AP, et vi ipsi AB aequali promovere (5). Sed idem praestat potentia AP, quae una cum AB puncto A applicata, etiam aequilibrium constituit (19). Quare potentia AP aequivalet omnibus, praeter AB nempe, AC, AD, AE, AF, AG simul agentibus. Q. E. D.

36. **Coroll. 1.** Potentiis ergo quotcunque puncto applicatis, ut definiatur potentia iis aequivalens, oportet determinari potentiam cum iis in aequilibrio constantem, huicque aequalem et contrariam applicari: erit haec potentia iis aequivalens.

37. **Coroll. 2.** Patet etiam, data potentia quotcunque datis aequivalente, inde inveniri facillime potentiam, insuper ad aequilibrium obtinendum applicandam, illi nimirum omnibus aequivalenti aequalem et oppositam applicando.

38. **Coroll. 3.** Fig. 15. Si ergo puncto A applicatae sint duae potentiae AC, AD, compleaturque parallelogrammum $ACPD$, diagonalis AP repraesentabit potentiam ambabus AC et AD aequivalentem; ejus enim aequalis et contraria AB cum illis in aequilibrio consistet (32).

Auct. script. in margine. Hic principium compositionis et resolutionis potentiarum inseratur.

39. **Coroll. 4.** Poterit ex § 33 eadem potentia aequivalens sine completione parallelogrammi inveniri, jungendo CD et ad ejus medietatem E ducendo AE: hujus duplum AB exhibebit potentiam aequivalentem (§ cit.).

40. **Definitio 7.** *Media directio* quotcunque potentiarum vocatur directio potentiae, iis potentiis omnibus aequivalentis.

41. **Coroll.** Duabus ergo potentiis AC et AD puncto A applicatis, media earum directio incidit in diagonalem AP parallelogrammi $ACPD$ (38).

42. **Axioma 3.** Loco quotcunque potentiarum puncto applicatarum, earum potentia aequivalens substitui potest.

43. **Problema 5.** Fig. 16. Puncto A quotcunque potentiis AC, AD, AE, AF applicatis, invenire potentiam iis omnibus aequivalentem.

Solutio. Duarum potentiarum AC et AD quaeratur aequivalens AG, jungendo puncta C et D recta CD, et per ejus medium L ducendo $AG = 2AL$ (38). Substituatur loco AC et AD haec AG (42), et eodem modo quaeratur potentia AH aequivalens potentiis AG et AE (38), aequivalebit haec tribus potentiis AC, AD et AE; quarum loco hac AH substituta (42), porro quaeratur potentia AP, potentiis AH et AF aequivalens (38), aequivalebit haec AP potentiis AC, AD, AE et AF. Q. E. I.

44. **Coroll.** Potentiis ergo quotcunque AC, AD, AE et AF puncto A applicatis, invenietur potentia AB insuper applicanda, ut aequilibrium obtineatur, accipiendo AB aequalem et oppositam potentiae AP, datis aequivalenti (39).

45. **Theorema 4.** Fig. 17. Puncto A tribus potentiis AC, AD et AE applicatis, si ducatur CD, eaque in L bifariam secetur, dein jungatur LE, in eaque accipiatur $LM = \frac{1}{3} LE$, ducaturque AM, hujus triplum AP exprimet potentiam datis AC, AD et AE aequivalentem.

Demonstratio. Producatur AL in G, ut sit $AG = 2AL$, erit potentia AG aequivalens potentiis AC et AD; ducatur GE: demonstrari oportet *primo* rectam AM productam in medio H secari, et *dein* esse AM tertiam partem duplae AH, seu esse

$$AM : MH = 2 : 1 \ (38).$$

Ex Geometria constat esse $\sin GAH : \sin EAH = GH.AE : EH.AG$ ex consideratione trianguli AGE; sed ex triangulo ALE erit $\sin GAH : \sin EAH = LM.AE : EM.AL$, unde haec eruitur analogia:

$$GH \,.\, AE : EH \,.\, AG = LM \,.\, AE : EM \,.\, AL$$

ergo ob $AL : AG = 1 : 2$ et $LM : ME = 1 : 2$, habebitur

$$GH : EH = LM : \tfrac{1}{2} EM = LM : LM, \text{ ergo } GH = EH, \quad \text{Q. E. Primum.}$$

Dein in triangulo AEG est $\sin AEL : \sin GEL = GE : AE$, ob $AL = LG$. Et in triangulo AEH est $\sin AEL : \sin GEL = AM \,.\, EH : MH \,.\, AE$; ergo erit $GE : AE = AM \,.\, EH : MH \,.\, AE$. Ergo ob $GE : HE = 2 : 1$ erit $2 : 1 = AM : MH$. Q. E. Alterum. Consequenter

$$AM : AH = 2 : 3 \text{ et } AM : AP = 1 : 3. \quad \text{Q. E. D.}$$

46. **Theorema 5.** Fig. 18. Si puncto A sint plures potentiae applicatae (quae in figura non sunt expressae) quarum numerus sit $n + 1$; potentiis autem n sit aequipollens AL, n vicibus sumta; si ducatur ex L ad residuam potentiam AE recta LE, eaque dividatur in M, ut sit $LM : EM = 1 : n$, erit AM pars $\frac{1}{n+1}$ potentiae, omnibus $n + 1$ aequivalentis.

Demonstratio. Producatur AL in G, ut sit $AL : AG = 1 : n$, erit AG potentia aequivalens omnibus praeter AE; jungatur GE: patet, ut AM sit media directio potentiarum AG et AE, oportere eam per medium H lineae GE transire (41), et ut sit $\frac{1}{n+1}$ potentiae aequivalentis omnibus $AM : 2AH = 1 : n + 1$ (38). In triangulo ALE est

$$\sin GAH : \sin EAH = LM \,.\, AE : EM \,.\, AL = AE : nAL.$$

Dein in triangulo EAG est $\sin GAH : \sin EAH = GH \,.\, AE : EH \,.\, AG$. Ergo

$$AE : n \,.\, AL = GH \,.\, AE : EH \,.\, AG;$$

ob $AG = n \,.\, AL$ erit $1 : 1 = GH : EH$, ergo $GH = EH$. Dein in triangulo AEG est

$$\sin AEL : \sin GEL = AL \,.\, GE : GL \,.\, AE = GE : (n-1) AE;$$

at in triangulo AEH est $\sin AEL : \sin GEL = AM \,.\, EH : HM \,.\, AE$. Ergo ex his duabus oritur hae proportio $GE : (n-1) AE = AM \,.\, EH : HM \,.\, AE$; ob $GE = 2EH$ erit $2 : n - 1 = AM : HM$. Ergo componendo $AM : AH = 2 : n + 1$, unde $AM : 2AH = 1 : n + 1$, sed $2AH$ seu AP exprimit potentiam omnibus aequivalentem (39). Q. E. D.

47. **Coroll.** Si ergo fuerit AL pars tertia potentiae aequivalentis tribus potentiis, erit AM pars quarta potentiae aequivalentis quatuor. Si fuerit AL pars quarta potentiae aequivalentis quatuor potentiis, erit AM pars quinta potentiae aequivalentis quinque, et ita porro.

48. **Problema 6.** Fig. 19. Puncto A quotcunque potentiis AB, AC, AD, AE, etc. applicatis, invenire potentiam AP iis aequivalentem, alio breviori modo.

Solutio. Juncta BC, bisecetur in H, ductaque HD secetur in J, ut sit $HJ = \frac{1}{3} HD$, erit AJ pars tertia potentiae aequivalentis tribus AB, AC et AD (45). Ducta JE secetur in K, ut sit $JK = \frac{1}{4} JE$, erit AK pars quarta potentiae aequivalentis quatuor AB, AC, AD et AE (47). Jungatur KF, eaque secetur in L, ut sit $KL = \frac{1}{5} KF$, erit AL pars quinta potentiae aequivalentis illis quatuor cum AF (47). Sumta $LM = \frac{1}{6} LG$, erit assumta $AP = 6AM$, AP aequivalens datis sex (47) etc. Q. E. I.

49. **Definitio 8.** *Centrum* plurium potentiarum puncto applicatarum voco punctum, cujus a puncto, cui potentiae applicantur, distantia, per numerum potentiarum multiplicata, exprimit potentiam omnibus potentiis applicatis aequivalentem.

50. **Coroll. 1.** Punctum ergo M, ex praecedente problemate determinatum, est centrum potentiarum sex: AB, AC, AD, AE, AF et AG, et quomodo pro quotcunque potentiis determinetur, ex eodem problemate constat.

51. **Coroll. 2.** Patet etiam ex problemate (48), punctum M, nonnisi ex extremitatibus B, C, D, E, F, G linearum, potentias exprimentium, determinari, quae si sint eaedem, centrum potentiarum idem erit, ubicunque situm sit punctum, cui potentiae applicantur.

52. **Scholion.** De hoc centro in sequentibus demonstrabitur, esse id centrum gravitatis punctorum potentias determinantium, nempe esse M centrum gravitatis punctorum B, C, D, E, F et G.

53. **Lemma 1.** Fig. 20. Si sint duo puncta C et D, ex iisque ad lineam quamcunque AB demittantur perpendicula CA, DB, linea autem CD ita secetur in F, ut sit $CF:DF = 1:n$, et ex F in AB perpendiculum FE demittatur, erit

$$(n+1)\,FE = n.\,AC + BD.$$

Demonstratio. Ducatur CG parallela ipsi AB, erit $DG:FH = CD:CF = n+1:1$, ergo $FH = \frac{DG}{n+1}$. Sed $DG = BD - AC$, ergo $FH = \frac{BD - AC}{n+1}$. Ergo

$$AC + FH = EF = \frac{BD + n.AC}{n+1}, \text{ consequenter } (n+1)\,EF = n.AC + BD, \text{ Q. E. D.}$$

54. **Theorema 6.** Fig. 21. Sint B, C, D, E extremitates rectarum, potentias puncto cuidam applicatas exprimentium, M centrum potentiarum. Assumta quacunque recta be, ad eamque ex punctis B, C, D, E, item ex centro M demittantur perpendicula Bb, Cc, Dd, Ee et Mm, erit Mm, in numerum punctorum B, C, etc. ducta, aequalis summae perpendiculorum Bb, Cc, Dd, Ee.

Demonstratio. Juncta BC bifariam secetur in F, ductoque perpendiculo Ff erit

$$2Ff = Bb + Cc \quad (53).$$

Juncta FD secetur in G, ut sit $FG:DG = 1:2$; demisso ex G perpendiculo Gg, erit

$$3Gg = 2Ff + Dd = Bb + Cc + Dd.$$

Porro juncta GE, eaque secta in M, ut sit $GM:EM = 1:3$, erit M centrum potentiarum in punctis B, C, D et E desinentium (48, 50); demittatur ex M perpendiculum Mm, erit

$$4Mm = 3Gg + Ee\ (53) = Bb + Cc + Dd + Ee.$$

Simili modo de quocunque potentiarum numero demonstratur Mm, in numerum potentiarum ductam, aequari summae omnium Bb, Cc, Dd etc. Q. E. D.

Nota in marg. Idem ex resolutione potentiarum potest demonstrari.

55. **Coroll.** Me non monente patet, si quae puncta ultra lineam be cadant, perpendicula ex iis demissa in be negativa accipi debere.

56. **Problema 7.** Fig. 22. Quotcunque potentiarum BA, CA, DA, EA, etc. puncto A applicatarum invenire centrum M.

Solutio. Ducta quacunque recta GH, ex punctis B, C, D et E extremis potentiarum datarum in eam rectam demittantur perpendicula Bb, Cc, Dd, Ee, quorum summa aequalis erit distantiae centri potentiarum M a recta GH, ductae in numerum potentiarum (54). Erit ergo distantia centri potentiarum a recta GH aequalis summae omnium perpendiculorum Bb, Cc etc. divisae per numerum potentiarum. Accipiatur in HJ, normali in GH, distantia haec centri sic inventa $H\mu$. Dein demittantur ex punctis B, C, D, E in rectam HJ perpendicula, erunt haec bH, cH, dH, eH. Quorum summa divisa per numerum potentiarum exhibebit distantiam centri quaesiti a recta HJ; sit ea Hm. Compleatur rectangulum $HmM\mu$. Cum puncti M distantia a HG sit $Mm = H\mu$, et a HJ, sit $M\mu = Hm$, erit M centrum potentiarum quaesitum. Q. E. I.

57. **Coroll. 1.** Ducta ergo AM, eaque pro numero potentiarum replicata, habebitur potentia omnibus aequivalens.

58. **Coroll. 2.** Fig. 23. Si numerus punctorum B, C, D, etc. sit infinitus, constituatque curvam continuam BE, simili modo invenietur centrum potentiarum. Quaeratur summa omnium distantiarum punctorum M, m a recta GH, eaque dividatur per numerum punctorum, qui exprimetur curvâ BME, et obtinebitur distantia centri potentiarum a GH. Eodem modo quaeratur summa distantiarum singulorum curvae punctorum a recta HJ, qua divisa per curvam BME, obtinetur distantia ejusdem centri a recta HJ et hoc modo determinabitur. Accipiatur elementum curvae quodvis Mm, quod dicatur ds; demittantur perpendicula MP, mp, sit $PM = y$, exprimet yds summam distantiarum punctorum in Mm contentorum a GH; ergo $\int yds$ exhibebit summam omnium punctorum in BE distantiarum a GH. Ergo $\int yds : BME$ aequatur distantiae centri potentiarum a GH. Eodem modo demissis ex M et m in HJ perpendiculis MQ, mq dictoque $MQ = x$, erit distantia centri a $HJ = \int xds : BME$. Unde dabitur

59. **Exemplum.** Sit Fig. 24 curva parabola AMC parametri a; sit $AP = x$, $PM = y$, AB axis curvae, erit $yy = ax$, ergo

$$Mm = ds = \frac{dy}{a}\sqrt{(aa + 4yy)}, \quad \text{unde} \quad yds = \frac{ydy}{a}\sqrt{(aa + 4yy)};$$

ergo

$$\int yds = \frac{1}{12a}(aa + 4yy)^{\frac{3}{2}} - \frac{aa}{12} = \frac{2}{3a}\left(\frac{aa}{4} + yy\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{aa}{12}.$$

Sit E focus, erit $AE = \frac{1}{4}a$, $PE = x - \frac{1}{4}a$, ergo

$$EM = \frac{1}{a}\left(\frac{aa}{4} + yy\right) \quad \text{et} \quad \frac{aa}{4} + yy = a.EM, \quad \text{consequenter} \quad \int yds = \frac{2}{3}EM\sqrt{a.EM} - \frac{aa}{12}.$$

Ducta tangente MT et demisso ex foco E perpendiculo EN, erit $EN = \frac{1}{2}\sqrt{a.EM}$, unde

$$\int yds = \frac{4EM.EN}{3} - \frac{4AE^2}{3} = \frac{4}{3}\cdot\frac{(EN^3 - AE^3)}{AE}.$$

Ergo distantia centri potentiarum arcus AM ab axe AB est $= \frac{4(EN^3 - AE^3)}{3AE.AM}$. Dein $xds = \frac{yydy}{aa}\sqrt{(aa + 4yy)}$;

cujus summa a rectificatione parabolae dependet; vocetur summa ejus S, erit distantia centri potentiarum a recta $AJ = \frac{S}{AM}$.

60. **Coroll. 3.** Fig. 25. Si curva CBD habuerit duos ramos BC, BD similes et aequales. Ducatur ejus diameter BA, ad eamque normalis EF. Patet centrum potentiarum in CBD terminatarum in ipsam diametrum AB incidere. Ad hoc centrum ergo determinandum, nonnisi distantiam ejus a recta EF investigari oportet, modo § 58 tradito. Distantiae inde inventae accipiatur AG aequalis, erit G centrum quaesitum.

61. **Exemplum.** Fig. 26. Sit CBD arcus circuli, cujus centrum A; bisecto arcu CBD radio AB, ducatur ad eum normalis AP. Sit $AB = a$, $PM = y$, $AP = x$, erit $y = \sqrt{(aa - xx)}$ et $Mm = \frac{adx}{\sqrt{(aa-xx)}}$; unde $\int yds = \int adx = ax$. Adeoque summa distantiarum omnium punctorum in arcu CBD erit $AB.CD$. Ergo distantia centri potentiarum G ab A erit $= \frac{AB.CD}{CBD} = AG$.

62. **Theorema 7.** Fig. 27. Si punctum A attrahatur ad puncta B, C, D et E viribus, quae sunt ut distantiae a punctis iisdem, trahetur illud semper ad punctum fixum M, centrum potentiarum in punctis B, C, D, E terminatarum, vi, quae est ut distantia ipsius A ab M.

Demonstratio. Ductis rectis AB, AC, AD, AE, exponent hae rectae, quae sunt distantiae puncti A ab B, C, D et E, potentias, quibus A respective ad haec puncta trahitur (per hypoth.); habemus ergo casum potentiarum hucusque tractatarum (26). Quare A trahetur semper versus punctum fixum M (51) centrum potentiarum, et vi, quae est ut distantia AM, ducta in punctorum numerum (57) i. e. numero punctorum dato atque manente, ut distantia AM. Q. E. D.

63. **Coroll.** Si ergo punctum A ad quotcunque puncta B, C, D et E attrahatur in ratione distantiarum, idem est ac si illud ad unicum punctum M traheretur in eadem ratione distantiarum.

64. **Scholion.** Hucusque potentiae expressae sunt per lineas in directionibus earum assumtas, ut inde deduceretur lex, qua punctum ad quotlibet alia data, ad quae urgetur vi, quae semper est ut distantia ab iisdem, trahitur. At si ad ea puncta attrahatur vi, quae sit ut functio quaevis distantiae ab iisdem punctis, ad inventionem legis, qua ad omnia simul urgetur, potentias per functiones linearum exprimere oportet; quocirca sequentia ad hoc obtinendum adjungo.

65. **Theorema 8.** Fig. 28. Si punctum A urgeatur utcunque ad puncta B et C viribus, quae sint ut P et Q, ducaturque linea AD secans angulum BAC ita, ut sit $\sin BAD : \sin CAD = Q : P$, exprimet AD mediam directionem.

Demonstratio. Producantur lineae AB et AC in b et c, ut sit $Ab : Ac = P : Q$; expriment ergo hae lineae Ab, Ac potentias, quibus punctum A secundum rectas AB et AC sollicitatur. Juncta bc, erit $\sin BAD : \sin CAD = bD.Ac : cD.Ab = bD.Q : cD.P$. Est autem ex hyp.

$$\sin BAD : \sin CAD = Q : P, \quad \text{ergo} \quad Q : P = bD.Q : cD.P, \quad \text{consequenter} \quad bD = cD.$$

Quare erit AD media directio (33). Q. E. D.

66. **Theorema 9.** Fig. 29. Urgeatur punctum A ad B et C potentiis P et Q, ducaturque media directio AD. Erit $BD : CD = Q.AB : P.AC$.

Demonstratio. Cum AD sit media directio, erit $\sin BAD : \sin CAD = Q:P$ (65); sed est $\sin BAD : \sin CAD = BD.AC:CD.AB$, ergo

$$Q:P = BD.AC:CD.AB \text{ consequenter } BD:CD = Q.AB:P.AC. \quad \text{Q. E. D.}$$

67. **Coroll.** Si fuerit $P = b.AB^n$ et $Q = c.AC^n$, erit $BD:CD = c.AC^{n-1}:b.AB^{n-1}$. Si ergo puncta B et C in ratione reciproca duplicata distantiarum attrahant, erit $n = -2$, unde

$$BD:CD = c.AB^3 : b.AC^3.$$

68. **Theorema 10.** Fig. 28. Puncto A sollicitato ad B et C potentiis P et Q, erit potentia aequipollens ad alteram datarum P ut se habet sinus anguli BAC ad sinum CAD, existente AD media directione.

Demonstratio. Productis AB et AC in b et c, ut sit $Ab:Ac = P:Q$, bisecta bc, exprimet AD dimidium potentiae aequivalentis (33). Est autem

$\sin BAC : \sin CAD = bc.AD:cD.Ab$; sed $bc = 2cD$, ergo $\sin BAC : \sin CAD = 2AD:Ab =$ potentia aequivalens : P; ergo potentia aequivalens est ad P ut $\sin BAC$ ad $\sin CAD$. Q. E. D.

69. **Coroll. 1.** Fig. 29. Juncta recta BC, quam media directio in D secet, erit

$$\sin BAC : \sin CAD = BC.AD:CD.AB;$$

consequenter potentia aequivalens erit ad alterutram datarum, puta ad eam, quae secundum AB agit, P, ut $BC.AD:CD.AB$.

70. **Coroll. 2.** Est autem $BD:CD = Q.AB:P.AC$ (66), ergo $BC:CD = Q.AB + P.AC:P.AC$. consequenter, potentia aequivalente dicta $Æ$, erit $Æ.AC.AB = P.AC.AD + Q.AB.AD$.

71. **Problema 8.** Fig. 30. Si punctum A ad puncta quotcunque B, C, D, E, etc. attrahatur in ratione cujusvis functionis distantiarum AB, AC, AD, AE, etc., invenire mediam directionem harum potentiarum et potentiam aequivalentem.

Solutio. Producantur, si opus est, directiones AB, AC, AD, AE, etc. et accipiantur Ab, Ac, Ad, Ae, etc., quae se habeant ut eae functiones, adeoque exprimant potentias, quibus punctum A secundum respectivas directiones sollicitatur. Quo facto media directio et potentia aequivalens ex §§ 56 et 57 determinabitur, demittendo ad invicem normales FR et LR, ex punctis b, c, d, e, etc. perpendicula bF, cG, dH, eJ et bK, cL, dM, eN, etc.; dein accipiendo RP aequalem summae perpendiculorum in FR, divisae per numerum potentiarum, et denique ducendo perpendiculum PO, aequale summae perpendiculorum in RL, divisae per numerum potentiarum, erit O centrum potentiarum; unde reliqua facile determinantur. Q. E. I.

72. **Problema 9.** Fig. 31. Si punctum A ad singula puncta curvae BM trahatur in ratione cujusvis functionis distantiarum, invenire mediam directionem et potentiam aequivalentem.

Solutio. Assumatur quodvis curvae elementum Mm, et dimittantur in AB perpendicula MP, mp; dicatur $AP = x$, $PM = y$, $Am = z = \sqrt{(xx + yy)}$. Sit functio, secundum quam A ad puncta elementi Mm attrahitur, Z; producatur Am in N, ut sit $AN = Z$, demittanturque perpendicula NQ

et NT; erit vis, qua A ad N sollicitatur ut Z in numerum punctorum Mm; sit $Mm = ds$; erit haec vis $= Zds$. Fiat $z : y = Zds : \frac{Zyds}{z}$, quae exprimet potentiam secundum NQ agentem, et $\frac{Zxds}{z}$ potentiam secundum NT. Ergo summa omnium perpendiculorum NQ est $\int\frac{Zyds}{z}$, quae divisa per numerum punctorum in curva BM (s) dat $\int\frac{Zyds}{z} : s$. Huic aequalis accipiatur AS. Dein summa omnium perpendiculorum $NT = \int\frac{Zxds}{z}$, quae divisa per numerum potentiarum s, dabit distantiam centri potentiarum (56) a AT, nempe $SO = \int\frac{Zxds}{z} : s$; erit ergo O centrum potentiarum (56), unde quaesita facile determinantur. Q. E. I.

73. **Coroll. 1.** Fig. 32. Si curva BCD ita fuerit comparata, ut a recta AC in duas partes similes et aequales dividatur, insuper autem functio Z eadem maneat, manente z, palam est centrum potentiarum in ipsam AC incidere, ad quod investigandum saltem accipiatur $AO = \int\frac{Zxds}{z} : s$; erit O centrum potentiarum quaesitum: idque, si tantum ramus CB consideretur, quia alter ipsi aequalis est et similis.

74. **Coroll. 2.** Patet dein vim omnibus aequivalentem esse $AO.s$ (57) seu manente s; positione autem puncti A variata, erit vis aequivalens ut AO.

75. **Exemplum 1.** Sit curva attrahens (Fig. 33) linea recta BC perpendicularis in AB, et $AB = a$, erit $x = a$, $BM = s = y$; ergo $AM = z = \sqrt{(aa + ss)}$, unde

$$AS = \int\frac{Zsds}{\sqrt{(aa+ss)}} : s \quad \text{et} \quad SO = \int\frac{Zads}{\sqrt{(aa+ss)}} : s.$$

Sit $Z = cz^n = c\,(aa + ss)^{\frac{n}{2}}$, erit

$$AS = \int cs\,ds\,(aa + ss)^{\frac{n-1}{2}} : s = \frac{c}{n+1} \cdot \frac{(aa+ss)^{\frac{n+1}{2}} + C}{s}.$$

Quia AS evanescit si $s = 0$, erit $C = -a^{n+1}$, ergo

$$AS = \frac{c\,(aa+ss)^{\frac{n+1}{2}} - ca^{n+1}}{(n+1)\,s} \quad \text{et} \quad SO = \int acds\,(aa+ss)^{\frac{n-1}{2}} : s.$$

Quae expressio, quoties $\frac{n-1}{2}$ non est numerus integer affirmativus, non integrari potest. Si ergo Fig. 34. punctum A ad duas rectas BC, DE parallelas, aequidistantes ab A, aequales et in BD normales attrahatur, quia tum SO evanescit, erit

$$AO = \frac{c\,(aa+ss)^{\frac{n+1}{2}} - ca^{n+1}}{(n+1)\,s}.$$

76. **Exemplum 2.** Fig. 35. Attrahat recta BC, cum qua in directum jacet punctum A, erit $y = 0$, $BM = s$ (AB posito $= a$), $AM = x = a + s$, $z = a + s$, erit

$$AO = \int\frac{Zds\,(a+s)}{a+s} : s = \frac{\int Zds}{s}.$$

Sit $Z = (a+s)^n$, erit $AO = \frac{(a+s)^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)\,s}$. Designet s totam BC, ergo vis aequipollens

$=\frac{(a+s)^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$, seu ut $(a+s)^{n+1}-a^{n+1}$. Si $n=1$, erit haec vis ut distantia puncti A a medietate lineae BC; si $n=-2$, erit vis aequivalens in ratione reciproca duplicata mediae proportionalis inter AB et AC, seu erit reciproce ut rectangulum ex AB in AC. At si sit $n=-1$, erit

$$AO=\int\frac{ds}{a+s}:s=l\left(\frac{a+s}{a}\right):s=\frac{l(a+s)-la}{s}.$$

Ergo vis aequivalens est ut log . AC demto log . AB.

77. **Exemplum 3.** Fig. 36. Sit peripheria circuli BMD; ex centro C erigatur perpendiculum CA super ejus plano, in quo situm sit punctum A, quod a peripheria attrahatur. Sit radius $BC=a$, $AC=b$, erit $AM=\sqrt{(aa+bb)}$; unde in nostro casu $x=b$, $y=a$, $z=\sqrt{(aa+bb)}$. Sit centrum potentiarum O, erit enim in recta AC; erit

$$AO=\int\frac{Zxds}{z}:s=\int\frac{Zbds}{\sqrt{(aa+bb)}}:s=\frac{Zb}{\sqrt{(aa+bb)}} \text{ ob } Z \text{ constantem.}$$

Sit $\sqrt{(aa+bb)}=c$ et $Z=c^n$, erit $AO=bc^{n-1}$. Ergo tota vis $=bc^{n-1}p$, existente p peripheria circuli. Sit T punctum, in quo, si tota peripheria, eadem manente lege attractionis, congregeretur, A eadem vi attraheretur; sit $AT=x$, erit vis $=x^np=bc^{n-1}p$, unde $x=b^{\frac{1}{n}}c^{\frac{n-1}{n}}=AT$. Si $n=1$, incidet T semper in C, sin vero $n=-2$, erit $AT=c\sqrt{\frac{c}{b}}$.

78. **Exemplum 4.** Fig. 37. Attrahatur punctum A a tota circuli CBb area. Assumatur circulus quivis concentricus CMN radio $CM=y$, et ejus peripheria $\frac{py}{r}$, posita ratione radii ad peripheriam $r:p$; erit vis, qua punctum A a peripheria hac MN trahitur $=b\,(bb+yy)^{\frac{n-1}{2}}py:r$. Ergo vis, qua a limbo $MNmn$, posito $Mm=dy$, attrahitur, erit $b\,(bb+yy)^{\frac{n-1}{2}}pydy:r$, quae expressio integrata exhibet vim, qua punctum A a circulo CMN attrahitur, nempe

$$bp\,(bb+yy)^{\frac{n+1}{2}}:(n+1)\,r-b^{n+2}p:(n+1)\,r.$$

Sit $CB=a$, erit vis, qua a toto circulo CBb trahitur

$$=bp\,(aa+bb)^{\frac{n+1}{2}}:(n+1)\,r-b^{n+2}p:(n+1)\,r.$$

Ad inveniendum punctum, in quo, si totus circulus congestetur, punctum A eodem modo urgeretur, ponatur hujus puncti T ab A distantia $AT=x$, erit vis attractiva inde orta $=x^npaa:2r$, ergo

$$x=\sqrt[n]{\frac{2b}{(n+1)\,aa}\left((aa+bb)^{\frac{n+1}{2}}-b^{n+1}\right)}=\left(\frac{2b\,(aa+bb)^{\frac{n+1}{2}}-2b^{n+2}}{(n+1)\,aa}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

79. **Exemplum 5.** Fig. 38. Attrahatur punctum A a superficie sphaerica, genita revolutione semiperipheriae BMD circa diametrum BD. Dicatur $AC=b$, $BC=a$, et assumto puncto quovis M, ductaque applicata MP, sit $CP=x$, erit $AP=b-x$, $PM=\sqrt{(aa-xx)}$; erit vis, qua punctum A a peripheria a puncto M genita trahitur, $AP.AM^{n-1}.p.PM:r$. Est vero

$$AM=\sqrt{(aa+bb-2bx)}, \text{ unde haec vis } =(b-x)\,(aa+bb-2bx)^{\frac{n-1}{2}}p\sqrt{(aa-xx)}:r.$$

Assumto puncto proximo m, erit $Mm = \frac{-adx}{\sqrt{(aa-xx)}}$, unde vis, qua A a limbo a Mm genito trahitur,

$$= -apdx\,(b-x)(aa+bb-2bx)^{\frac{n-1}{2}} : r.$$

Sit $b-x=z$, erit haec vis $= apzdz\,(aa-bb+2bz)^{\frac{n-1}{2}} : r$. Ergo vis a producto arcus BM genita

$$= \frac{ap\,(aa-bb+2bz)^{\frac{n+3}{2}}}{2rbb\,(n+3)} + \frac{ap\,(bb-aa)\,(aa-bb+2bz)^{\frac{n+1}{2}}}{2rbb\,(n+1)} - \frac{ap\,(b-a)^{n+3}}{2rbb\,(n+3)} - \frac{ap\,(b+a)\,(b-a)^{n+2}}{2rbb\,(n+1)}.$$

Ergo vis a tota superficie sphaerica orta est

$$= \frac{ap\,(a+b)^{n+3} - ap\,(b-a)^{n+3}}{2rbb\,(n+3)} + \frac{ap\,(b-a)\,(a+b)^{n+2}}{2rbb\,(n+1)} - \frac{ap\,(b+a)\,(b-a)^{n+2}}{2rbb\,(n+1)}.$$

Si $n=1$, abit haec expressio in $\frac{2aabp}{r}$; ut ergo attractiones sint ut distantiae a centro, et eodem modo se habeant ac si tota superficies ibi esset congesta. Si $n=-2$, erit vis attractiva $= \frac{2aap}{rbb}$, quae est reciproce ut quadratum distantiae a centro, et eodem fit modo ac si tota superficies in centro congregetur. Hoc modo res se habet, si A sit extra superficiem; sin vero intra in P, erit vis, qua a BM trahitur

$$= \frac{ap\,(aa-bb)^{\frac{n+3}{2}}}{(n+3)(n+1)\,rbb} + \frac{ap\,(a-b)^{n+3}}{2rbb\,(n+3)} - \frac{ap\,(a+b)\,(a-b)^{n+2}}{2rbb\,(n+1)}.$$

Et a genito ex DM, $$= \frac{ap\,(aa-bb)^{\frac{n+3}{2}}}{(n+3)(n+1)\,rbb} + \frac{ap\,(a+b)^{n+3}}{2rbb\,(n+3)} - \frac{ap\,(a-b)\,(a+b)^{n+2}}{2rbb\,(n+1)}.$$

Trahetur ergo ad C vi

$$= \frac{ap\,(a+b)^{n+3} - ap\,(a-b)^{n+3}}{2rbb\,(n+3)} + \frac{ap\,(a+b)\,(a-b)^{n+2} - ap\,(a-b)\,(a+b)^{n+2}}{2rbb\,(n+1)}.$$

Sit $n=1$, erit vis rursus $= \frac{2aabp}{r}$; si $n=-2$, erit haec vis $=0$. Nempe intra superficiem versus omnes plagas aequaliter trahitur. Id notandum, quod si n sit numerus impar, expressionem attractionis extra et intra esse eandem; at si sit n numerus par, tum eam esse diversam.

80. **Exemplum 6.** Attrahatur punctum A a tota sphaera genita convolutione semicirculi BMD circa axem BD, et vis, qua ad quamvis particulam attrahitur, sit ut potentia n distantiae. Manentibus iisdem denominationibus ac in § praeced., erit vis, qua A ad circulum revolutione MP genitum attrahitur,

$$= \frac{AP\cdot p}{(n+1)\,r}\left(AM^{n+1} - AP^{n+1}\right) = \frac{pz}{(n+1)\,r}\left((aa-bb+2bz)^{\frac{n+1}{2}} - z^{n+1}\right),$$

ergo vis, qua a genito elementi $PpmM$ trahitur, est

$$\frac{pzdz}{(n+1)\,r}\left((aa-bb+2bz)^{\frac{n+1}{2}} - z^{n+1}\right),$$

cujus integrale est

$$\frac{p\,(aa-bb+2bz)^{\frac{n+5}{2}} - p\,(b-a)^{n+5}}{2(n+1)(n+5)\,rbb} + \frac{p\,(bb-aa)\,(aa-bb+2bz)^{\frac{n+3}{2}} - p\,(bb-aa)\,(b-a)^{n+3}}{2(n+1)(n+3)\,rbb} - \frac{pz^{n+3} + p\,(b-a)^{n+3}}{(n+1)(n+3)\,r}$$

quod exprimit vim, qua A a frusto globi ab BPM genito attrahitur. Vis autem, qua a toto globo trahitur, est

$$=\frac{p(b+a)^{n+5}-p(b-a)^{n+5}}{2(n+1)(n+5)rbb}-\frac{p(bb+aa)(b+a)^{n+3}+p(bb+aa)(b-a)^{n+3}}{2(n+1)(n+3)rbb}=$$

$$\frac{p(nab+3ab-aa-bb)(b+a)^{n+3}+p(nab+3ab+aa+bb)(b-a)^{n+3}}{(n+1)(n+3)(n+5)rbb}.$$

Si $n=1$, erit attractio $=\frac{2pba^3}{3r}$; attrahetur ergo A in ratione distantiae a centro, et eodem modo ac si totus globus in centro esset collectus. Si $n=-2$, erit attractio $=\frac{2pa^3}{3rbb}$, eodemque modo se habet ac si totus globus in centro esset coadunatus. Si punctum A sit intra globum in P, erit vis, qua a solido a segmento BPM genito trahitur,

$$=\frac{p(aa-bb)^{\frac{n+5}{2}}+p(a-b)^{n+5}}{2(n+1)(n+5)rbb}-\frac{p(bb+aa)(a-b)^{n+3}-p(aa-bb)^{\frac{n+5}{2}}}{2(n+1)(n+3)rbb};$$

reliqua vero globi pars attrahit vi, quae est

$$=\frac{p(aa-bb)^{\frac{n+5}{2}}+p(a+b)^{n+5}}{2(n+1)(n+5)rbb}-\frac{p(bb+aa)(a+b)^{n+3}-p(aa-bb)^{\frac{n+5}{2}}}{2(n+1)(n+3)rbb}$$

trahitur ergo ad centrum globi vi

$$\frac{-p(a-b)^{n+5}+p(a+b)^{n+5}}{2(n+1)(n+5)rbb}-\frac{p(bb+aa)(a+b)^{n+3}+p(bb+aa)(a-b)^{n+3}}{2(n+1)(n+3)rbb}=$$

$$\frac{p(-aa-bb+nab+3ab)(a+b)^{n+3}+p(nab+3ab+aa+bb)(a-b)^{n+3}}{(n+1)(n+3)(n+5)rbb}.$$

Ubi notandum, si n sit numerus impar, hanc formulam a superiore non differre; at si sit n numerus par, valde fore diversam, ut si sit $n=-2$, erit vis $=\frac{2pb}{3r}$. Ergo intra globum attrahitur in ratione distantiae a centro.

81. **Scholion.** Cum iis in casibus, ubi n est numerus par, formula vim attractricem exprimens, duplex haberi debeat, prout punctum A sit extra vel intra figuram attrahentem. Videtur hic lex continuitatis non servari, cum tractio modo hanc, modo illam legem sequatur. Ad hoc dubium tollendum, dico vim attractivam talem algebraice non posse exprimi. Haec enim vis expressio: x^n si n est par, non congruit cum hypothesi attractionis: Sit enim (Fig. 39) punctum attrahens C, attractum A, $AC=x$, et vis, qua A ad C trahitur x^n, quae exhibet vim, qua A deorsum tendit. Transferatur A in a, ut sit $Ca=-x$; erit denuo vis, qua deorsum tendit, $=(-x)^n=$ (ob n numerum parem) x^n; oporteret ergo a denuo deorsum ad D tendere; at ex hypoth. debet versus C trahi, unde haec expressio . . . . . et correctione opus habet. Sin autem n numerus impar, erit attractio deorsum versus $D=-(x)^n$ i. e. sursum tum trahetur, ob signum —, secundum legem attractionis.

82. **Axioma.** Fig. 40. Si punctum C adjaceat firmo obstaculo AB, eique applicata sit potentia trahens CD, normalis in AB, punctum C nihilominus quiescet. Obstaculum autem AB premet

potentia, quae aequalis est potentiae CD. Si vero puncto C plures potentiae applicatae fuerint, id quiescet, si media directio in obstaculum fuerit normalis.

83. **Coroll. 1.** Fig. 41. Si ergo grave seu pondus C incumbat firmo obstaculo AB, quiescet illud, at subjectum obstaculum AB premet potentia aequali ejus ponderi (6).

84. **Coroll. 2.** Fig. 42. Si autem puncto C duae potentiae CD et CE oppositae fuerint applicatae, quarum utraque in AB normalis, patet si CD fuerit major CE, punctum C in quiete permanere, et obstaculum AB premere excessu potentiae CD super CE, at si $CE = CD$, ob statum aequilibrii (19), C quiescere et prorsus non obstaculum AB premere. Sin vero CE major fuerit quam CD, tum C amplius quiescere non posse, sed eodem modo in recta CE procedere, ac si differentia potentiarum $CE - CD$ illuc traheretur.

85. **Coroll. 3.** Fig. 43. Si ergo puncto C potentia CD, perpendicularis in tangentem ab obstaculi curvilinei ACB applicata sit, me non monente patet, eodem modo C in quiete permansurum, ac si ab designaret obstaculum, quoniam ab et ACB in puncto contactus C coincidunt.

86. **Scholion.** Veritas axiomatis inde patet, quod ob firmitatem obstaculi C (Fig. 40) directionem CD sequi non possit, et nulla adsit ratio, quare potius versus A quam B moveretur.

87. **Problema 10.** Fig. 44. Puncto O obstaculo AB adjacente, eique potentia OC applicata, invenire potentiam ei insuper applicandam, ut O in quiete permaneat.

Solutio. Potentia OC resolvatur in potentias laterales OD, OE, complendo parallelogrammum rectangulum $CDOE$, quarum OE est normalis in AB, altera vero OD agit secundum directionem obstaculi AB. Aequivalet potentia OC duabus OE et OD simul agentibus (38). Potentia autem OE puncto O nullum motum valet imprimere (82); adeoque non opus est hanc potentiam, applicatione contrariae, destruere. Altera vero OD punctum O libere valet secundum OD promovere, quia obstaculum ejus actionem non impedit; haec ergo applicatione contrariae, eique aequalis OF destruatur. Punctum O, applicata ei insuper potentia OF, in quiete persistet; obstaculum vero AB premetur potentia OE. Persistet autem O etiam in quiete, si potentia OE vel prorsus vel ex parte destruatur (84), applicata ergo $OJ = OE$. Duae potentiae OF et OJ simul, seu quae iis aequivalet OH (38) servabit O in quiete, et in hoc casu est $OH = OC$, eique directe contraria. Deinde si saltem OG, quae minor est quam OJ, applicetur, conservabit OK, aequivalens ipsis OG et OF, denuo quietem. Quocirca ducta FH parallela et aequali ipsi OE, omnes rectae OK, quae ex O ad FH duci possunt, exhibebunt potentias una cum OC, in quiete punctum O conservantes. Poterit porro OE, quantum libet, augeri, et nihilominus quietis status conservabitur. Applicetur ergo, praeter OF destruentem OD, potentia OL: haec duae OF et OL simul, seu iis aequivalens OM denuo O in quiete servat. Ergo si producetur CO in H, ut sit $OH = CO$, atque ex H demittatur infinita recta HR perpendicularis in AB, quaecunque recta ex O ad eam ducta OK, OM punctum O in quiete conservabit. Q. E. I.

Script. ad marg. Melius haec solutio adornatur, praemittendo constructionem.

88. **Coroll. 1.** Problema ergo hoc infinitas admittit solutiones, cum infinite possint applicari potentiae, cum data OC statum quietis servantes.

89. **Coroll. 2.** Ex solutione manifestum est, conferendo cum ea § 84, quanta vi obstaculum AB, in quo vis casu prematur, nempe applicata potentia OK vel OM, obstaculum premetur vi, quae exponitur recta HK vel HM. Cum in priori casu sit $HK = OE - OG$, in posteriori $HM = OE + OL$.

90. **Coroll. 3.** Fig. 45. Si ergo fuerit obstaculum AB ad horizontem inclinatum, eique incumbat punctum grave O, seu cui applicata est potentia verticalis OC: patet quomodo id in statu quietis servari debet. Erecta nempe verticali $OH = OC$, ducatur infinita HR, directionem AB obstaculi in F normaliter secans. Quaelibet recta OK, OM, ex O ad hanc HR ducta, exhibet potentiam, cum OC statum quietis servantem. Et loco harum potentiarum poterunt pondera adhiberi (12).

91. **Scholion.** Facile patet, quare perpendiculum HF in plagam R in infinitum liceat producere non item ultra H. Cum enim pressio, quam sustinet obstaculum AB, sit proportionalis ipsi KH electa potentia OK. Si ergo applicetur potentia OH, pressio haec evanescet. Sin autem potentia ultra OH accipiatur, vis obstaculum premens erit negativa. Ergo (84) punctum O directe ab obstaculo removeretur.

92. **Theorema 11.** Fig. 46. Puncto O obstaculo AB adjacenti, applicatis potentiis CO, OD, id in quiete conservantibus, erunt potentiae OC et OD inter se reciproce ut cosinus angulorum AOC, BOD, quos cum AB constituunt.

Demonstratio. Cum OC et OD quietem conservent, patet ex solutione problematis praecedentis, demissis in AB perpendiculis CE, DF, fore $OE = OF$. Est autem $\cos AOC = \frac{OE}{OC}$ et $\cos BOD = \frac{OF}{OD}$, unde erit $\cos AOC : \cos BOD = OE.OD : OF.OC = OD : OC$. Ergo $OC : OD = \cos BOD : \cos AOC$. Q. E. D.

93. **Coroll. 1.** Obstaculum autem AB premitur potentia, quae est $= CE - DF$; exprimit autem CE tangentem anguli AOC et DF tangentem anguli BOD, ob radios OE, OF aequales. Premitur ergo obstaculum AB potentia, quae est ut $\tang AOC - \tang BOD$. Cavendum igitur, ne haec expressio negativa evadat, quo in casu O ex statu quietis exturbabitur (91).

94. **Coroll. 2.** Fig. 47. Si fuerit planum AB, cum horizonte AE angulum BAE constituens, eique incumbat grave O, seu cui applicata est potentia verticalis OC, trahaturque O quoque a pondere P secundum OD. Ad id, ut O in quiete servetur, requiritur ut sit pondus P ad pondus puncti O, seu ad vim, qua deorsum niti supponitur, ut $\cos AOC : \cos BOD = \sin BAE : \cos BOD$ id est, ut sinus anguli inclinationis plani, ad cosinum anguli, quem directio OD cum plano AB conficit.

95. **Coroll. 3.** Fig. 48. Si ergo angulus DOB evanescit, recta DO incidente in AB, erit cosinus hujus anguli $=$ sinui toto. Erit ergo P ad pondus ipsius O ut sinus ang. BAE ad sinum totum, i. e. ut BE ad AB.

96. **Theorema 12.** Fig. 49. Si fuerint duo pondera O et o, planis inclinatis AB et ab incumbentia, cum horizontalibus AE, ae angulos BAE, bae constituentibus, sintque ea pondera O et o juncta filo ODo, supra clavum firmum D protenso, aequilibrium habebitur, si ex utraque parte factum ex pondere in sinum anguli inclinationis applicatum ad cosinum anguli, quem filum cum directione plani constituit, fuerit idem.

Demonstratio. Ut pondus O in quiete conservetur, oportet, ut filum OD trahatur seu tendatur potentia, quae est $=\frac{O\sin BAE}{\cos DOB}$ (94). Hac ergo vi conabitur O filum OD promovere. Eodem modo pondus o tendet filum Do vi $=\frac{o\sin bae}{\cos Dob}$ (cit.), quae duae expressiones, ut aequilibrium obtineatur, debent esse aequales. Etenim in statu aequilibrii necesse est, ut filum ex utraque parte aequaliter trahatur. Consequenter in statu aequilibrii oportet, ut sit $\frac{O\sin BAE}{\cos DOB}=\frac{o\sin bae}{\cos Dob}$. Q. E. D.

97. **Coroll. 1.** Fig. 50. Incumbat pondus O curvae AOB, cujus tangens OT, sitque id alligatum filo in D firmato, ducaturque verticalis DP, in hancque perpendiculum OP. Erit vis filum OD tendens $=\frac{O\sin TOP}{\cos DOT}$. Est autem $\sin TOP=\frac{PT}{OT}$, et demisso ex T in OD perpendiculo TQ, $\cos TOQ=\frac{OQ}{OT}$, ergo $\frac{O\sin TOP}{\cos TOQ}=\frac{O.PT}{OQ}$. Ad has determinandas vocetur

$$DP=x,\quad PO=y,\quad DO=\sqrt{(xx+yy)}=z,\quad PT=t;$$

erit ob triangula DQT, DPO similia, $DQ=\frac{xx-tx}{z}$, unde $OQ=\frac{zz-xx+tx}{z}=\frac{yy+tx}{z}$, hincque vis filum OD tendens $=\frac{O.tz}{yy+tx}$.

98. **Coroll. 2.** Quia t est subtangens, erit ex natura tangentium $t=\frac{ydx}{dy}$, unde

$$\frac{O.tz}{yy+tx}=\frac{O.zydx}{yydy+yxdx}=\frac{O.zdx}{ydy+xdx}.$$

Est autem $ydy+xdx=zdz$; unde vis filum OD tendens erit $=\frac{O.dx}{dz}$.

99. **Problema 11.** Fig. 51. Junctis ponderibus O et o filo ODo super clavo D mobili, et eorum alterutro ubicunque super curva AB data posito. Determinare alteram curvam ba, super qua, si alterum o incumbat, semper habeatur aequilibrium.

Solutio. Ducta verticali DP, in eamque demissis perpendiculis ex O et o, OP et op, dicatur fili longitudo $OD+Do=a$, $DP=x$, $DO=z$, erit $Do=a-z$, sitque $Dp=v$. Erit vis, qua filum DO a pondere O trahitur $=\frac{O.dx}{dz}$ (98); et eodem modo tendetur filum Do a pondere o vi $=\frac{o.dv}{-dz}$. Hae duae vires tendentes filum ODo, ut aequilibrium obtineatur, debent esse aequales; est ergo $\frac{Odx}{dz}=\frac{odv}{-dz}$, hincque $Odx=-odv$; consequenter integrando erit $Ox=ob-ov$, ubi pro b quaecunque data accipi potest. Est ergo $x=\frac{o(b-v)}{O}$. Dein dictis $PO=y$ et $po=t$, erit

$$a=\sqrt{(xx+yy)}+\sqrt{(vv+tt)}=\frac{\sqrt{(oo(b-v)^2+OOyy)}}{O}+\sqrt{(vv+tt)}$$

ergo $oo(b-v)^2+OOyy=aaOO+OOvv+OOtt-2OOa\sqrt{(vv+tt)}$, consequenter

$$y=\sqrt{\left(aa+vv+tt-2a\sqrt{(vv+tt)}-\frac{oo(b-v)^2}{OO}\right)}.$$

Hi valores ipsorum x et y, si in aequatione inter x et y pro curva data BOA substituantur, orietur aequatio inter v et t pro curva quaesita boa. Q. E. I.

100. **Coroll.** Est ergo, sumto $DO+Do=a$, $DP.O+Dp.o$ quoque constans. Si ergo fuerit $O=o$, erit summa abscissarum $DP+Dp$ constans, sumta $DO+Do$ constante. Patet ergo quomodo data una, altera facile construi possit.

101. Exemplum 1. Fig. 52. Sit curva data recta DO, per D transiens, et $y = nx$; erit ad alteram curvam:

$$\sqrt{\left(aa + vv + tt - 2a\sqrt{(vv+tt)} - \frac{oo(b-v^2)}{OO}\right)} = \frac{no(b-v)}{O}.$$

Ergo $\frac{(nn+1)oo}{OO}(b-v)^2 = (a - \sqrt{(vv+tt)})^2$, unde $\frac{o(b-v)}{O}\sqrt{(nn+1)} = a - \sqrt{(vv+tt)}$.

Sit $\sqrt{(nn+1)} = m$, erit $Oa - mob + mov = O\sqrt{(vv+tt)}$, quae est aequatio ad hyperbolam vel ellipsin, prout mo majus vel minus est quam O; sin autem $mo = O$, erit curva quaesita parabola. Si $Oa = mob$, erit $Ot = v\sqrt{(mmoo - OO)}$, etiam pro recta per D transeunte.

102. Exemplum 2. Fig. 53. Sit curva data circuli quadrans DOA per D transiens. Erit dicto radio $DC = c$, $yy = 2cx - xx$. Substitutis loco y et x valoribus inventis (99), erit

$$(a - \sqrt{(tt+vv)})^2 = \frac{oo(b-v)^2}{OO} + \frac{2oc(b-v)}{O} - \frac{oo(b-v)^2}{OO} = \frac{2oc(b-v)}{O}$$

consequenter
$$aa + tt + vv - \frac{2oc(b-v)}{O} = 2a\sqrt{(tt+vv)}.$$

Quae aequatio exhibet curvam quarti ordinis. Si $aa = \frac{2obc}{O}$, erit

$$tt + vv + \frac{aav}{b} = 2a\sqrt{(tt+vv)}.$$

103. Scholion. Obiter hic moneo inservire hanc curvam pontibus elevandis. Si enim OC designet pontem, circa C mobilem: dum is elevatur, punctum extremum O movetur in quadrante AOD. Si ergo altera curva Doa dicto modo construatur et pondus debitum o funi, circa trochleam in D circumplicato, appendatur, in quocunque situ pontis, pondus o eum in aequilibrio conservabit, ut ergo minima vis, hoc aequilibrium tollens, pontem attollere et rursus demittere possit. Ratio hujus autem in sequentibus, ubi de natura vectis disseretur, quaeri debet.

104. Problema 12. Fig. 54. Si pondera O et o fuerint aequalia, determinare casus, quibus curvae BA et Ba sunt inter se eaedem et similiter applicatae.

Solutio. In statu quocunque ODo demissis perpendiculis OP, op, erit $DP + Dp$ constans; accepta ergo $DC = \frac{DP+Dp}{2}$, erit C punctum fixum, ergo semper $CP = Cp$. Dicatur $CP = x$, erit $Cp = -x$, sit $DC = b$, erit $DP = b + x$ et $Dp = b - x$. Exprimatur DO per functionem ipsius P, quae, si loco x substituatur $-x$, abeat in p. Designabit ergo p rectam Do; oportet igitur, ut sit $P + p$ constans (100); ponatur $P + p = 2a$. Erit ergo $P = a + Q$ et $p = a - Q$; ut autem P abeat in p, si loco x substituatur $-x$, patet Q talem esse debere ipsius x functionem, quae abeat in $-Q$, posito $-x$ loco x. Unde loco Q subrogari possunt x, x^3, x^5 etc. $x^{\frac{n}{m}}$, si n numerus impar et m par, etiam $x\sqrt{(cc+xx)}$ et hujusmodi infinitae, quae facile determinantur. Est ergo $DO = a + Q$; sit $PO = y$, erit

$$yy + bb + 2bx + xx = aa + 2aQ + QQ. \quad \text{Q. E. I.}$$

105. **Exemplum.** Sit $Q = hx$, erit $yy + xx(1 - hh) + 2x(b - ah) + bb - aa = 0$, quae aequatio, si $1 > h$, est ad ellipsin, si autem $1 < h$, ad hyperbolam; si vero $1 = h$, ad parabolam. Erit tum $yy = 2x(a - b) + aa - bb$; erit ergo $BC = \frac{a+b}{2}$ et $DB = \frac{b-a}{2}$. Sit

$$BP = t = x + \frac{a+b}{2}, \text{ ergo } x = t - \frac{a-b}{2}, \text{ consequenter } yy = 2t(a - b);$$

est ergo curva parabola, cujus parameter $= 2a - 2b$. Facta ergo Fig. 55 parabola OBo, cujus axis verticalis BC, constitui debet punctum fixum D in foco. Punctum C autem ubi lubet accipi potest. Et dein longitudo fili erit $= 2BC + 2BD$, atque hoc modo parabola satisfacit. Sin autem fuerit $\frac{b-ah}{hh-1} = \sqrt{\frac{-bb+aa}{hh-1}}$, erit $a = hb$ et $\frac{by}{\sqrt{(aa-bb)}} = b + x$, seu $by = (b+x)\sqrt{(aa - bb)}$ pro linea recta per D transeunte.

106. **Theorema 13.** Fig. 56. Si duo pondera O et o, filo rigido Oo alligata, incumbant respective planis inclinatis AB et Ab, erunt ea in aequilibrio, si fuerit O ad o ut (ducta horizontali Bb) factum ex BA in $\cos.AOo$ ad factum ex Ab in $\cos.AoO$.

Demonstratio. Accepto in Oo puncto quocunque D, patet ad aequilibrium obtinendum, punctum tanta vi versus o trahi debere, quanta versus O trahitur. Etenim ut O in statu suo conservetur, oportet ut filum OD ad D certa vi trahatur. Sed o, quia descendere conatur, filum oD certa vi trahit; hae ergo vires ad aequilibrium obtinendum aequales esse debent. Vis autem, qua OD versus D trahi debet, est $= \frac{O.\sin ABb}{\cos AOo}$; vis vero, qua o filum Do tendit, est $= \frac{o \sin AbB}{\cos AoO}$. Oportet ergo ut sit $\frac{O \sin ABb}{\cos AOo} = \frac{o \sin AbB}{\cos AoO}$; sed $\sin ABb : \sin AbB = Ab : AB$, ergo

$$O : o = AB \cos AOo : Ab \cos AoO. \quad \text{Q. E. D.}$$

107. **Coroll. 1.** Ex demonstratione patet esse etiam $O : o = \frac{\cos AOo}{\sin ABb} : \frac{\cos AoO}{\sin AbB}$.

Script. ad marg. Corollarium hoc in theorema, theorema vero in corollarium mutetur.

108. **Coroll. 2.** Fig. 57. Si lineae AB, Ab fuerint parallelae, obtinebitur ob $\sin ABb = \sin AbB$ et $\cos AOo = -\cos AoO$, haec analogia $O : o = -1 : 1$ i. e. $O = -o$, seu alterutrum corpus sursum tendere debet, ut figura annexa monstrat.

109. **Coroll. 3.** Fig. 58. Si altera linea Ab fuerit horizontalis, erit $AB : Ab = 0 : 1$, hincque $O : o = 0.\cos AOo : \cos AoO$. Quia autem $O : o$ datur, oportet ut sit $\cos AoO = 0$ seu ang. AoO rectus.

110. **Coroll. 4.** Fig. 59. Si altera linea AB fuerit verticalis, erit $O : o = \frac{\cos AOo}{1} : \frac{\cos AoO}{\sin AbB}$, ergo $\cos AOo : \cos AoO = O.Ab : o.AB$. Constructio hujus ex sequenti generali patebit.

111. **Coroll. 5.** Fig. 60. Sint latera AB, Ab utcunque posita, et Bb sit horizontalis; oportet sit $O : o = AB \cos AOo : Ab \cos AoO$, erit $\cos AOo : \cos AoO = O.Ab : o.AB$. Ad Oo erigatur normalis OE, ipsi bA productae in E occurrens. Erit

$$\sin EOA = \cos AOo \text{ et } \sin AEO = \cos AoO;$$

sed $\sin EOA : \sin AEO = AE : AO$. Ergo haec habetur analogia $AE : AO = O.Ab : o.AB$. Datur igitur ratio ipsius AE ad AO, unde haec oritur constructio. Cum detur ratio ponderum, producatur

(Fig. 61) bA in F, ut sit $AF:AB = O.Ab:o.AB$, seu accipiatur $AF = \frac{O.Ab}{o}$ i. e. $o:O = Ab:AF$. Jungatur BF et in eam ex A demittatur perpendicularis AD, aequalis longitudini fili datae. Ex D ducatur parallela ipsi Ab, alteram AB in O secans, et ex O parallela ipsi AD applicetur Oo, exhibebit haec Oo positionem fili ad aequilibrium requisitum.

112. **Problema 13.** Fig. 62. Data una curva AO, invenire alteram Ao ejus conditionis, ut pondera O et o, filo Oo alligata, quomodocunque applicata, sint in aequilibrio.

Solutio. Sit situs fili Oo; utriusque curvae axis verticalis AC; ducantur applicatae OP, op nec non tangentes OT, ot, plana, quibus pondera incumbunt, exhibentia. Sit $Oo = a$ et $AP = x$, $PO = y$; in altera curva $Ap = v$, $po = z$. Erit primo $Oo^2 = Pp^2 + (PO + po)^2$ i. e. $aa = (y+z)^2 + (x-v)^2$. Dein ex § 107 est $O:o = \frac{\cos TOC}{\sin TOP} : \frac{\cos toC}{\sin top}$. Demisso ex T in Oo productam perpendiculo TQ, erit $\cos TOC = \frac{OQ}{OT}$ et $\sin TOP = \frac{TP}{OT}$, ergo $\frac{\cos TOC}{\sin TOP} = \frac{OQ}{PT}$. OQ autem sic invenitur: Ob triangula similia OCP et TCQ fac $OC:CP = TC:CQ$; ad obtinendum OC fiat $y+z:a = y:\frac{ay}{y+z} = OC$; ad CP fiat $y+z:x-v = y:\frac{y(x-v)}{y+z} = CP$, et $TC = TP - CP = \frac{ydx}{dy} - \frac{y(x-v)}{y+z}$; est ergo

$$CQ = \frac{ydx(x-v)}{ady} - \frac{y(x-v)^2}{a(y+z)}; \quad \text{ergo} \quad OQ = \frac{ydx(x-v)}{ady} - \frac{y(x-v)^2}{a(y+z)} + \frac{aay}{a(y+z)}.$$

Sed est $aa - (x-v)^2 = (y+z)^2$, ergo $OQ = \frac{ydx(x-v)}{ady} + \frac{y(y+z)}{a}$. Cum autem sit $PT = \frac{ydx}{dy}$, erit

$$\frac{OQ}{PT} = \frac{x-v}{a} + \frac{dy(y+z)}{adx} = \frac{ydy + zdy + xdx - vdx}{adx} = \frac{\cos TOC}{\sin TOP}.$$

Eodem modo est
$$\frac{\cos toC}{\sin top} = \frac{zdz + ydz + vdv - xdv}{adv}.$$

Quia autem est $aa = (y+z)^2 + (x-v)^2$, erit

$$0 = ydy + ydz + zdy + zdz + xdx - xdv - vdx + vdv,$$

ergo
$$zdz + ydz + vdv - xdv = -ydy - zdy - xdx + vdx,$$

consequenter
$$\frac{\cos toC}{\sin top} = \frac{-ydy - zdy - xdx + vdx}{adv}.$$

Erit igitur $O:o = \frac{1}{adx} : \frac{-1}{adv} = -dv:dx$, adeoque $Odx = -odv$ et integrando $Ox + ov = \text{Const.}\ C$. Quia autem est $aa = (y+z)^2 + (x-v)^2$, erit

$$x = \frac{C - ov}{O} \quad \text{et} \quad y = \sqrt{(aa - (x-v)^2)} - z = -z + \sqrt{\left(aa - \left(\frac{C - v(O+o)}{O}\right)^2\right)}.$$

Unde data aequatione inter x et y, invenietur aequatio inter v et z. Q. E. I.

113. **Coroll. 1.** Sit $C = (O+o)\,b$, erit $x = \frac{(O+o)b - ov}{O}$ et $y = -z + \frac{\sqrt{(OOaa - (O+o)^2(b-v)^2)}}{O}$.

114. **Coroll. 2.** Si fuerit $O = o$, erit $x = 2b - v$ et $y = -z + \sqrt{(aa - 4(b-v)^2)}$.

115. **Coroll. 3.** Fig. 63. Data una curva, hoc modo facile altera construitur. Sit una AO et accepto quovis puncto O, demittatur applicata OP. In axe accipiatur Ap, ut sit $\frac{AP.O + Ap.o}{O+o} = b$

ex p erigatur perpendiculum po. Centro O radio $= a$ describatur circulus secans po in o, erit o punctum in curva quaesita. a est longitudo fili, sed b linea ad arbitrium sumta.

116. **Exemplum 1.** Si altera linea fuerit recta, erit altera sectio conica, ut calculum tentanti facile patebit.

117. **Exemplum 2.** Sint pondera O et o aequalia et una curva circulus, cujus diameter $= a$, ut adeo sit $yy = ax - xx$; sit porro $2b = a$, erit $x = a - v$ et

$$y = -z + \sqrt{(aa - (a-2v)^2)} = -z + \sqrt{(4av - 4vv)}$$

at $ax - xx = av - vv$, unde $-z + 2\sqrt{(av - vv)} = \sqrt{(av - vv)}$, ergo $z = \sqrt{(av - vv)}$, seu $zz = av - vv$; altera ergo curva est rursus semicirculus. Consequenter in circulo, si linea pondera jungens fuerit diametro aequalis, quomodocunque ea applicetur, aequilibrium habebitur. Sed linea non solum non extensibilis, sed etiam neque contractibilis, neque flexibilis esse debet.

118. **Problema 14.** Determinare casus, ubi hae duae curvae sunt eaedem, positis ponderibus aequalibus.

Solutio. Fig. 64. Sint duae curvae quaesitae AO, Ao, quae debeant esse eaedem. Accipiantur duo loca O et o, in quibus pondera existunt, homologa. Erit ductis applicatis OP, op, $AP + Ap$ constans $= 2b$, accipiatur ergo $AE = b$, erit semper $PE = pE$; erit autem $po = p\omega$. Dicatur $PE = x$, erit $pE = -x$, sitque $PO = y$, unde si haberetur aequatio inter x et y, inveniri posset $p\omega$ ponendo, loco x, $-x$. Interim autem dicatur $p\omega = z$, quae ex eo definiri debet, quod puncta O et ω sint in eadem curva. Est vero $aa = (y + z)^2 + 4xx$, ergo $y + z = \sqrt{(aa - 4xx)}$; fiat $y = P + \frac{1}{2}\sqrt{(aa - 4xx)}$, abeat autem P in Q, si loco x ponetur $-x$, unde erit

$$z = Q + \tfrac{1}{2}\sqrt{(aa - 4xx)}.$$

Oportet ergo sit $P + Q = 0$. Unde patet loco P poni posse x, x^3, x^5, etc., seu loco P substitui potest quaevis functio impar ipsius x; functio enim impar abit in sui negativam, posito $-x$ loco x, ut ergo earum summa sit nihilo aequalis. Designante igitur P functione impari, erit

$$y = P + \tfrac{1}{2}\sqrt{(aa - 4xx)}, \text{ hincque } 4yy - 8Py + 4PP = aa - 4xx,$$

adeoque est

$$yy + xx = \tfrac{1}{4}aa + 2Py - PP,$$

quae aequatio exhibet generalissime curvas quaesitas. Q. E. I.

119. **Exemplum 1.** Fig. 65. Sit $P = nx$, erit $yy + xx(1 + nn) = \frac{1}{4}aa + 2nxy$, quae est aequatio generalis pro omnibus ellipsibus. Videamus ergo, quomodo quaevis ellipsis applicari ad hunc usum possit. Sit ellipsis AMB, cujus axis transversus c; erit conjugatus $= \frac{aa}{c}$. Erit autem $n = \frac{cc - aa}{ac}$; ex B constituatur perpendicularis BD in axem $AB = \frac{cc}{2a}$, et ex centro C ducatur CD, ut sit $CB : BD = a : c$. Erit haec CD verticalis quaesita, cujus pars D infra tendere debet, ut figura praesens exhibet (Fig. 66): habet nimirum formam cordis inversi. Si fuerit $a = c$, abit ellipsis in circulum, et etiam figura cordiformis fit circularis, juxta § 117.

120. **Exemplum 2.** Quia $nx\sqrt{(aa - 4xx)}$ est quoque functio impar ipsius x, substituatur loco P, et habebitur $y = (nx + \frac{1}{2})\sqrt{(aa - 4xx)}$, erit ergo

$$yy = (nx + \tfrac{1}{2})^2 (aa - 4xx) = nnaaxx - 4nnx^4 + naax - 4nx^3 + \tfrac{1}{4} aa - xx,$$

aequatio ad curvam quarti ordinis. Et quoniam y habet duas dimensiones, erit curva ex utraque axis plaga eadem; quapropter curva satisfaciens erit una continua curva, non ex duabus curvis composita. (Fig. 67).

121. **Theorema 14.** Fig. 68. Si fuerit puncto O, intra angulum AOB sito, potentia quaecunque OC applicata, producta CO, erit potentia, qua AO premitur, ad potentiam, qua BO premitur ut $\cos BOF$ ad $\cos AOF$.

Demonstratio. Vis OC resolvatur in duas laterales OD et OE, quae sint perpendiculares in AO et OB. Cum vis OC aequivaleat duabus OD et OE simul agentibus (38), vis autem OD tota in pressionem lateris AO, et vis OE in pressionem lateris OB impendatur, erit vis, qua AO premitur, ad vim, qua BO premitur, ut OD ad OE, seu CD, i. e. ut $\sin DCO : \sin DOC$; sed $\sin DCO = \sin COE$, et ob angulos AOD, BOE rectos, est $\sin COE = \cos BOF$ et $\sin DOC = \cos AOF$. Ergo vis in AO est ad vim in BO, ut $\cos BOF$ ad $\cos AOF$. Q. E. D.

122. **Coroll. 1.** Fig. 69. Si ergo fuerint duo plana inclinata AO et BO in O concurrentia et in angulo pondus O incumbat, quia in hoc casu OF est verticalis, ducatur horizontalis MN, eritque $\cos AOF = \sin AOM$ et $\cos BOF = \sin BON$. Quare vires, quibus plana haec inclinata premuntur, sunt reciproce ut sinus angulorum inclinationis.

123. **Coroll. 2.** Fig. 68. Si OC in OD incidat, tota vis in pressionem lateris AO impenditur; si autem ultra OD cadit, tum punctum O non amplius in aequilibrio persistit, sed juxta OA movebitur; ut ergo O in quiete persistat, oportet ut OC intra OD et OE cadat.

Sectio secunda.

De aequilibrio potentiarum, virgae rigidae applicatarum.

124. **Axioma 5.** Fig. 70. Si figurae cujuscunque ACD puncto A applicata fuerit potentia AB, eundem haec in figuram exercet effectum, ac si in puncto quolibet alio M, in AB producta assumto, applicata fuerit secundum eandem directionem agens.

125. **Scholion.** Veritas hujus axiomatis cuique facile innotescet, hoc modo rem consideranti, ac si filum in M fixum secundum directionem MB traheretur; tum enim figurae usque in A exacte adjacebit. Ponatur filum in A usque agglutinari, effectus ejus non mutabitur; resecetur portio AM effectus manebit; quare sive filum in A sive in M figatur, effectus idem erit.

126. **Coroll.** Fig. 71. Si ergo figurae ACD duae potentiae AB, ab applicatae sint, producantur directiones earum donec sese mutuo in M intersecent; utraque earum eundem praestabit effectum, ac si in M essent applicatae. Reducitur igitur hoc modo casus duarum potentiarum, duobus diversis punctis figurae applicatarum, ad casum jam expositum praecedenti sectione duarum potentiarum eidem puncto applicatarum.

127. **Scholion 1.** Manifestum est, hic intelligi debere potentias, cum figura in eodem plano constitutas; alioquin sese mutuo nusquam intersecarent.

128. **Scholion 2.** Ex hoc principio omnes casus potentiarum virgae rigidae non in eodem puncto applicatarum resolvuntur. Cum enim punctum illud, quo sese mutuo intersecant duae potentiae, nonnisi imagini opituletur, cuicunque figurae poterit affingi tantum planum, quantum sufficit ad punctum intersectionis excipiendum.

129. **Divisio.** Divido hanc Sectionem in duas partes, prout virga vel libera sit, ut omnibus potentiis aeque facile cedere valeat, vel ab obstaculo utcunque impedita. Utramque partem iterum subdividere convenit pro figura virgae, utrum ea recta sit an curva. Quos casus omnes in hac sectione evolvam, aut ad minimum principia praebebo, quibus singuli casus resolvi poterunt.

130. **Problema 15.** Fig. 72. Si virgae rectae AB duae potentiae AC, BD applicatae fuerint, in eodem plano positae, oportet applicare potentiam OM duabus datis aequivalentem.

Solutio. Producantur CA et DB donec se mutuo in a intersecent. Considerari ergo potentiae AC et BD possunt quasi puncto a applicatae (128); fiat igitur $ac = AC$ et $ad = BD$, quae potentias datas tanquam in a applicatas exhibent. Ducatur cd, eaque bisecta in e, ducatur ae, cujus duplum am exhibet potentiam duabus ac, ad aequivalentem (38). Transferatur haec in ae producta in OM, quae adhuc aequipollet duabus ac et ad (128); aequivalet igitur quoque potentiis AC et BD. Q. E. I.

131. **Coroll. 1.** Quia potentiae datae in eodem plano positae esse debent (127), patet, pro potentiis non in eodem plano sitis aequivalentem inveniri non posse. Ponatur enim dari potentiam aequivalentem duabus non in eodem plano sitis, resolvatur utraque in duas, quarum una in eodem plano cum aequivalente, altera in id normalis. Patet has normales ab assumta aequivalente non compensari posse, quare aequivalens non datur.

132. **Coroll 2.** Poterit quoque punctum O ex hac proprietate inveniri: In $\triangle acd$, a recta ae secto, est $\sin cae : \sin dae = ce.ad : de.ac = ad : ac$ (ob $ce = de$) $= BD : AC$ (per hyp.) Dein in $\triangle AaB$ ab aO secto est $\sin cae : \sin dae = AO.aB : BO.aA$; unde conficitur $BD : AC = AO.aB : BO.aA$. Est vero $aB : aA = \sin BAa : \sin ABa = \sin CAB : \sin DBA$; ergo erit $BD : AC = AO \sin CAB : BO \sin DBA$; consequenter $AO : BO = BD \sin DBA : AC \sin CAB$; est ergo $AC.AO \sin CAO = BD.BO \sin DBO$: factum AC in AO et $\sin CAO$ vocatur momentum potentiae AC respectu puncti O. Ergo momenta vis et ultra O debent esse aequalia.

133. **Coroll. 3.** Fig. 73. Definito hoc modo puncto O, in quo potentia aequivalens applicari debet, magnitudo ejus et positio sequenti modo facilius invenietur: Ex B ducatur Bc parallela et aequalis ipsi AC; ducta cD et bisecta in e, ducatur Be, cujus duplum erit Bm; huic ex O aequalis et parallela ducatur OM, erit haec potentia aequivalens quaesita.

Script. ad marg. ad Fig. 74. Momentum potentiae BA in O aequatur $BA.OE$, demisso OE perpendiculo in BA productam.

134. **Coroll. 4.** Fig. 75. Si potentiarum applicatarum directiones AC, BD fuerint inter se parallelae, erit $\sin CAB = \sin DBA$, adeoque erit $AO : BO = BD : AC$, seu est $AC.AO = BD.BO$. Dein, quia in hoc casu Bc (Fig. 73) incidit in BD, incidet quoque Bm in BD, eritque

$$Bm = AC + BD = OM.$$

Ducatur igitur (Fig. 75) OM parallela ipsius AC vel BD accipiaturque aequalis $AC + BD$, exprimet haec OM potentiam duabus datis aequivalentem.

Script. ad marg. Momentum potentiae aequatur momentis potentiarum aequivalentium.

135. **Coroll. 5.** Fig. 76. Inventa potentia aequivalente OM, obtinebitur potentia propositas AC et BD in aequilibrio servans. Producatur nimirum MO in alteram partem in N usque, ut sit $ON = OM$; exprimet ON potentiam cum OM in aequilibrio stantem. Cum autem OM aequivaleat ambabus AC et BD, patet et ON in aequilibrio conservaturam potentias AC et BD.

Script. ad marg. Momentum potentiae AC in O aequatur vi, quam virga in O habere debet, ne frangatur.

136. **Coroll. 6.** Fig. 77. Si directiones potentiarum in eadem recta cum virga jaceant, ut AC et BD, erit tum $AO:BO = BD \sin DBA : AC \sin BAC$ id est ut $0:0$. Quare cum hic 0 ad 0 rationem quamcunque habere queat, punctum O ubicunque accipi poterit, et potentia aequivalens etiam in ipsam AB incidet, et aequalis erit differentiae inter has potentias, inque plagam fortioris dirigetur.

137. **Scholion.** Veritas hujus corollarii immediate ex axiomate quinto patet, juxta quod eodem redit, in quo virgae AB puncto potentiae applicentur, quia directiones earum in eam incidunt. Idem ad plures potentias eodem modo extenditur.

138. **Coroll. 7.** Fig. 78. Methodus tradita, duarum potentiarum aequivalentem vel contrariam inveniendi, facile ad plures potentias extendetur. Hoc modo sint virgae AB applicatae potentiae AC, JD, KE, LF, NG et BH; sumantur primo duae AC, JD, harumque quaeratur aequivalens, quae loco duarum AC, JD substituatur; hujus et alius v. gr. KE iterum quaeratur aequivalens, loco trium AC, JD, KE substituenda, et hoc peragatur, donec omnium aequivalens OM obtineatur.

139. **Theorema 15.** Fig. 79. Sint virgae rigidae AB duae potentiae AC, BD quaecunque applicatae, ductaque sit potentia OM iis aequivalens. Tum si in AB producta punctum quodcunque Z accipiatur, erit $OM.OZ \sin MOZ = AC.AZ \sin CAZ + DB.BZ \sin DBZ$.

Script. ad marg. NB. Propositio haec valet, si Z extra rectam AB sumatur: generalius ergo proponatur demonstratio.

Demonstratio. Patet per § 132 esse $AC.AO \sin CAZ = BD.BO \sin DBZ$; ergo ob $AO = AZ - OZ$ et $BO = OZ - BZ$, erit $AC.AZ \sin CAZ - AC.OZ \sin CAZ = BD.OZ \sin DBZ - BD.BZ \sin DBZ$, sive $AC.AZ \sin CAZ + BD.BZ \sin DBZ = AC.OZ \sin CAZ + BD.OZ \sin DBZ = OZ\,(AC \sin CAZ + BD \sin DBZ)$. Nunc circa positionem lineae OM consulatur § 133, juxta quem ducatur Bc aequalis et parallela ipsi AC et juncta cD, bifariamque secta in e, ducta est $Bm = 2Be$, quae aequalis est et parallela ipsi OM. Ducatur porro per e recta fg parallela virgae AB; erit $2Be \sin Beg = Bf \sin Bfe + Bg \sin Bge$ seu $OM \sin MOZ = Bf \sin CAZ + Bg \sin DBZ$. Dein in $\triangle Deg$ est

$$\sin Deg : \sin Dge\ (= \sin DBZ) = Dg : De,$$

et in $\triangle fec$ est

$$\sin cef : \sin cfe\ (= \sin CAZ) = cf : ce,$$

ergo ob $\sin Deg = \sin cef$ et $De = ce$ (hyp.), erit

$$Dg \sin DBZ = cf \sin CAZ, \quad \text{seu} \quad Dg \sin DBZ - cf \sin CAZ = 0.$$

Est igitur

$$OM \sin MOZ = Bf \sin CAZ + Bg \sin Bge + Dg \sin DBZ - cf \sin CAZ = Bc \sin CAZ + BD \sin Bge = AC \sin CAZ + BD \sin DBZ.$$

Consequenter substituto supra loco $AC \sin CAZ + BD \sin DBZ$ ejus aequali $OM \sin MOZ$ habebitur

$$AC.AZ \sin CAZ + BD.BZ \sin DBZ = OM.OZ \sin MOZ. \quad \text{Q. E. D.}$$

140. **Coroll. 1.** Si Z incidat in O, erit $OZ = 0$, $AZ = AO$, $BZ = -BO$, ergo

$$AC.AO \sin CAZ = BD.BO \sin DBZ$$

ut jam constat.

141. **Coroll. 2.** Distet punctum Z infinite, erunt AZ, OZ, BZ inter se aequales, unde consequitur $AC \sin CAZ + BD \sin DBZ = OM \sin MOZ$, uti jam ex ipsa demonstratione elucet.

142. **Coroll. 3.** Fig. 80. Ex hisce, quae de duabus potentiis demonstrata sunt, facile colligitur, quid de pluribus potentiis AE, BF, CG, DH, virgae AD applicatis respectu puncti Z, in AD producta accepti, statuendum sit, designante OM potentia omnibus aequivalente. Exprimat om potentiam aequivalentem duabus AE et BF, et $\omega\mu$ potentiam aequivalentem duabus CG et DH; erit OM potentia duabus om et $\omega\mu$ aequivalens; ergo $OM.OZ \sin MOZ = om.oZ \sin moZ + \omega\mu.\omega Z \sin \mu\omega Z$.

Est vero $\quad om.oZ \sin moZ = AE.AZ \sin EAZ + FB.BZ \sin FBZ$ et

$$\omega\mu.\omega Z \sin \mu\omega Z = GC.CZ \sin GCZ + HD.DZ \sin HDZ, \quad \text{ergo}$$

$$OM.OZ \sin MOZ = AE.AZ \sin EAZ + FB.BZ \sin FBZ + GC.CZ \sin GCZ + HD.DZ \sin HDZ$$

et haec proprietas valet, quantuscunque fuerit numerus potentiarum.

143. **Coroll. 4.** Si Z incidat in O, abibunt AZ, BZ, CZ, DZ in AO, BO, $-CO$, $-DO$ et OZ evanescet. Ergo $AE.AO \sin EAO + FB.BO \sin FBO = GC.CO \sin GCO + HD.DO \sin HDO$. Ubi notandum est, ex una parte omnes potentias ex una parte puncti O esse constitutas, et ex altera potentias ex altera parte puncti O applicatas.

144. **Coroll. 5.** Cum in hac aequalitate neque ipsa OM neque angulus MOA in computum ingrediatur, poterit ex ea locus puncti O inveniri.

145. **Coroll. 6.** Si punctum Z infinite distet, erunt AZ, BZ, CZ, DZ et OZ inter se aequales, et ideo erit $AE \sin EAZ + BF.\sin FBZ + CG \sin GCZ + DH \sin HDZ = MO \sin MOZ$.

146. **Coroll. 7.** Ex hac aequalitate factum ipsius potentiae aequivalentis omnibus, MO, in sinum anguli, quem cum virga constituit, cognoscitur; si igitur alia insuper proprietas adjiciatur, potentia OM penitus applicari poterit.

147. **Problema 16.** Fig. 81. Si virgae rigidae AD potentiae quotcunque AE, BF, CG, DH inter se parallelae applicatae fuerint, invenire potentiam OM, omnibus aequivalentem.

*

Solutio. Patet ex § 134 potentiam duabus parallelis aequivalentem iisdem esse parallelam, quod quoque ad plures potentias extenditur. Ut ergo OM sit parallela directioni potentiarum, erunt anguli EAZ, FBZ, GCZ, HDZ et MOZ omnes inter se aequales, ergo ex § 145 facta divisione per angulorum sinus, elicietur $MO = AE + BF + CG + DH$. Dein, assumto Z ut ante, ex § 142 abjectis sinibus angulorum, nanciscimur

$$OM.OZ = AE.AZ + FB.BZ + GC.CZ + HD.DZ$$

quia vero $MO = AE + BF + CG + DH$, erit

$$OZ = \frac{AE.AZ + FB.BZ + GC.CZ + HD.DZ}{AE + BF + CG + DH}.$$

Unde invenietur punctum O, ex quo dein ducatur OM, parallela potentiis datis et omnibus simul sumtis aequalis: exprimet haec OM potentiam omnibus aequivalentem. Q. E. I. Ergo momentum potentiae aequivalentis in Z aequatur summae omnium momentorum in Z.

Script. ad marg. Problema generaliter concipiatur pro potentiis utcunque inclinatis, et invenietur ZO = summae omnium momentorum divisae per summam potentiarum, in sinus inclinationum suarum ductarum, et problema ipsum, instar corollarii, inde derivetur.

148. **Coroll. 1.** Si potentiae OM aequalis et directe contraria applicetur, erit ea in aequilibrio cum omnibus applicatis. Patet ergo hoc in casu potentiam, datas in aequilibrio servantem, eandem cum iis directionem habere et iis omnibus simul sumtis esse aequalem.

149. **Coroll. 2.** Fig. 82. Appendantur virgae rigidae AB pondera P, T, Q ex punctis A, C, B; determinetur O ut doctum est, et, filo OM verticaliter posito et supra trochleas M et N ducto appendetur pondus R, aequale ipsis P, T et Q simul; conservabit hoc pondus R reliqua in aequilibrio, ut ex antecedentibus clarum est.

150. **Scholion.** Non immoror hic expositioni casuum, quibus directiones potentiarum ad alteram virgae partem cadunt, quibus in casibus valor ipsarum evadit negativus, id quod cuivis in Geometria versato, qualem hic lectorem suppono, nullam difficultatem facesset. Ne propterea corollaria nimium accumulentur.

151. **Definitio 9.** Si loco potentiarum pondera applicentur, punctum, in quo potentia, omnia applicata pondera in aequilibrio servans, applicari debet, vocatur *centrum gravitatis.*

Coroll. marg. adscript. Sequitur hinc centrum gravitatis non mutari, utcunque inclinationes potentiarum varientur, modo inter se semper parallelae maneant.

152. **Scholion.** Equidem non opus est, ut pondera reipsa sint applicata. Sed cum singula corporum naturalium elementa gravia sint, unumquodque tanquam pondus appensum habens considerari potest. Unde inventio centri gravitatis se ad omnia corpora gravia extendit.

153. **Problema 17.** Fig. 83. Si virgae rigidae AB in singulis punctis P appensa fuerint pondera, quae sint ut respondentes applicatae PM curvae cujusvis CMD, invenire centrum gravitatis O virgae AB.

Solutio. Cum singulae applicatae curvae CMD exprimant potentias virgae AB applicatas, accipiatur in AB producta, ubi libuerit, punctum Z, ut distantia OZ centri gravitatis O ab hoc Z inveniatur. Est autem (147) OZ aequalis summae factorum ex singulis potentiis PM in respectivas distantias PZ a Z, divisae per summam omnium potentiarum. Puncto P accipiatur proximum p, erunt singulis elementi Pp punctis potentiae aequales PM vel pm applicatae, ut ergo summa potentiarum elemento Pp applicatarum sit $PM.Pp$, et summa momentorum in elemento $Pp = PM.PZ.Pp$. Ergo summa omnium momentorum in AB erit $\int PM.PZ.Pp$, summa vero omnium potentiarum in AB erit $\int PM.Pp$. Ex quibus erit $OZ = \frac{\int PM.PZ.Pp}{\int PM.Pp}$; seu vocatis $ZP = x$, $PM = y$, erit $Pp = dx$, ergo $OZ = \frac{\int yxdx}{\int ydx}$. Q. E. I.

154. **Coroll. 1.** Si CD fuerit recta parallela cum AB, erit y constans $= b$, ergo

$$OZ = \frac{\int bxdx}{\int bdx} = \frac{xx}{2x} + C = \frac{x}{2} + C.$$

Si $x = BZ$, erit $OZ = BZ$, ergo $C = \frac{1}{2} BZ$; si $x = AZ$, habebitur $OZ = \frac{AZ + BZ}{2}$, et haec dat punctum O.

155. **Coroll. 2.** Fig. 84. Si curva, a potentiis virgae AB applicatis formata, ejusmodi fuerit, ut versus A et B ramos similes et aequales protendat, seu ut verticalis OM, ex medio O virgae AB ducta, curvam in duas aequales partes secet, tum palam est, centrum gravitatis AB in medium O casurum.

156. **Coroll. 3.** Fig. 85. Generaliter invento puncto O, seu centro gravitatis, ut obtineatur potentia omnibus aequivalens, oportet in O applicare potentiam OR, omnibus simul sumtis aequalem. Ita OR erit aequalis $\int ydx$.

157. **Coroll. 4.** Sit curva AD quadrans circuli, cujus centrum B. Incidat Z in B; dicta $BP = x$, $PM = y$ et radio $BD = a$, erit $BO = \frac{\int yxdx}{\int ydx}$, et ob $y = \sqrt{(aa - xx)}$, erit

$$BO = \frac{\int xdx\sqrt{(aa-xx)}}{\int dx\sqrt{(aa-xx)}} = \frac{A - \frac{1}{3}(aa-xx)^{\frac{3}{2}}}{\int dx\sqrt{(aa-xx)}}.$$

Si punctum P incidit in A, erit $x = a$ et $\int dx\sqrt{(aa-xx)} = \text{quadranti} = Q$. At, quia incidente P in B, BO evanescere debet, erit $A = \frac{1}{3}a^3$; fiat $x = a$, erit $BO = \frac{a^3}{3Q}$ et $OR = Q$; unde momentum hujus potentiae aequivalentis in B erit $OR.Q = \frac{1}{3}a^3$, cui etiam aequatur summa singulorum momentorum in AB.

158. **Theorema 16.** Fig. 86. Si habeatur virga rigida AB talium in quovis loco pondusculorum, ut applicata PM curvae AM exprimat summam omnium pondusculorum portionis AP, seu quae exprimat pondus partis AP, erit centrum gravitatis partis AP in O, ut sit

$$PO.PM = \text{areae } APM.$$

Demonstratio. Accipiatur ubivis punctum Q, ducaturque applicata QN, dein proximum ei q et applicata qn; exprimet QN pondus partis AQ, et qn pondus ipsius Aq, ut igitur nr exhibeat pondusculum elementi Qq. Hujus in P momentum erit $nr.QP$. Puncti P accipiatur sequens p, erit momentum ponderis Qq in $p = nr.Qp$; ergo differentia momentorum in p et P est $= nr.Pp$. Idem cum de omnibus valeat, erit differentia omnium momentorum a portione AP in p et in $P = PM.Pp$. Quanquam in p etiam praeter caetera agat pondusculum elementi Pp, seu ms, tamen id respectu $PM.Pp$ negligitur. Sit jam summa momentorum virgae AP in $P = M$, erit summa momentorum virgae Ap in $p = M + dM$; erit igitur differentia $dM = PM.Pp = PpmM$. Consequenter sumendo integralia erit $M = APM =$ summae momentorum virgae AP in P. Si fuerit O centrum gravitatis virgae AP, erit pondus totius virgae AP, i. e. PM in OP aequale summae omnium momentorum virgae AP in P. Erit igitur

$$PM.OP = APM. \text{ Q. E. D.}$$

159. **Coroll. 1.** Ex hoc ergo nascitur nova methodus centrum gravitatis inveniendi; est enim $OP = \frac{APM}{PM}$. Quae methodus interdum altera foecundior esse poterit, praecipue quando totum virgae pondus datur.

160. **Coroll. 2.** Est igitur $AO = AP - \frac{APM}{PM} = \frac{AP.PM}{PM} - \frac{APM}{PM}$; compleatur rectangulum $APMR$, erit id $= AP.PM$, unde $AO = \frac{ARM}{PM}$; hincque semper dabitur distantia centri gravitatis a puncto fixo A.

161. **Coroll. 3.** Fig. 87. Hinc inveniri potest centri gravitatis fluxus, si longitudo virgae aliquantulum augeatur. Sit O centrum gravitatis virgae AP, et o virgae Ap; PM est pondus virgae AP, et pm virgae Ap. Erit

$$AO = \frac{AQM}{PM} \text{ et } Ao = \frac{Aqm}{pm} = \frac{AQM + Qq.AP}{PM + Mr}$$

$$\text{ergo } Ao - AO = \frac{PM.AP.Qq - Mr.AQM}{PM^2} = \frac{Mr \cdot APM}{PM^2}.$$

Est ergo $Oo = \frac{Mr.APM}{PM^2}$. Sit $AP = x$ et ejus pondus $PM = y$, erit $Oo = \frac{dy \int y dx}{yy}$.

162. **Scholion.** Hae proprietates etiam valent, quamquam potentiae applicatae non sint normales in virgam, sed tantummodo parallelae inter se. Nusquam enim in computum ductum est, angulum APM esse rectum, sed saltem constantem.

163. **Coroll. 4.** Si ergo in O applicetur potentia omnibus aequalis et juxta earundem directionem, aequivalebit ea omnibus simul agentibus (151). Cum autem PM exprimat summam omnium potentiarum virgae AP applicatarum, ducatur OS aequalis et parallela ipsi PM: exprimet haec potentiam omnibus aequivalentem.

164. **Coroll. 5.** Fig. 88. Si virgae AP in singulis punctis potentiae secundum quascunque directiones fuerint applicatae, resolvantur eae singulae in laterales, quarum una in virgam sit normalis, altera trahat secundum directionem rectae AP. Quaeratur centrum gravitatis pro normalibus, quod sit O, et potentia iis aequivalens OS. Exprimat OD summam reliquarum, quae cum non mutent centrum gravitatis (136), ducatur OE aequivalens duabus OS, OD, aequivalebit ea omnibus.

165. **Coroll. 6.** Momentum omnium potentiarum in P, seu vis, qua virga in P ruptioni resistit, aequatur $OS.OP$, seu $PM.OP$. At est $OP = \frac{APM}{PM}$; ergo summa momentorum omnium potentiarum est area APM. Ergo vis, qua virga in P rumpi conatur, est ut area APM.

166. **Coroll. 7.** Fig. 87. Si ergo vis, qua virga rumpi conatur, sit ut ejus crassities in eo loco, seu ut pondus in eo loco applicatum, erit APM ut rm. Dicatur $AP = x$, $PM = y$, erit $\int y dx$ ut dy, sumto dx pro constante. Ergo fiat $\int y dx = \frac{aady}{dx}$, ut homogeneitas observetur, unde $ydx = \frac{aaddy}{dx}$, ergo $ydxdy = \frac{aadyddy}{dx}$, quare $yydx = \frac{aady^2}{dx} + abdx$, et idcirco $dx = \frac{ady}{\sqrt{(yy-ab)}}$. Sit crassities virgae p, erit ponduscululum in elemento Pp ut pdx, ergo $dy = pdx$, consequenter

$$\sqrt{((\int pdx)^2 - ab)} = ap, \text{ unde } \int pdx = \sqrt{(aapp + ab)}, \text{ seu } dx = \frac{adp}{\sqrt{(pp+ac)}}, \text{ posito } b = aac.$$

Quae est aequatio pro catenaria, ut infra videbimus; abit haec in logarithmicam, si fiat $c = o$.

167. **Coroll. 8.** Si in singulis punctis potentiae quaecunque sint applicatae, ut pdx in P, erit $\int pdx = y$. Sit porro vis, qua ruptioni resistit z, erit $z = \int dx \int pdx$ et $dz = dx \int pdx$. Sit dx constans, erit $ddz = pdx^2$; si fuerit p constans $= b$, erit

$$z = \int dx \int bdx = \int bxdx + \int cdx = \frac{bxx}{2} + cx + e \text{ seu } xx + cx + ce = bz$$

quae est ad parabolam.

168. **Scholion.** His de virgis rigidis rectis explicatis, progredior ad virgas curvas, et in harum expositione ea penitus tractabo, quae insuper ad rectas pertinere possent. Etenim multa sunt ad rectas spectantia, quae eadem opera generalius ad curvas extenduntur. Et idcirco, ne in particularibus nimis sim prolixus, ad generaliora accedam.

169. **Problema 18.** Fig. 89. Si virgae rigidae curvae $ABCD$ quotcunque potentiae AE, BF, CG, DH applicatae fuerint in eodem plano, applicare potentiam MN omnibus aequivalentem.

Solutio. Ducatur recta quaecunque ad, et directiones potentiarum prolongentur, si opus est, quoad ei occurrant in a, b, c, d. Patet (124) eas potentias eundem praestaturas effectum, sive in ad sive in AD sint applicatae. Habemus ergo casum virgae rectae, et applicetur potentia aequivalens mn, curvam in M intersecans; transferatur ea in MN, et exprimet MN potentiam omnibus aequivalentem. Q. E. I.

170. **Coroll. 1.** Si directiones potentiarum fuerint parallelae, erit iisdem et MN parallela et omnibus simul sumtis aequalis.

171. **Coroll. 2.** Fig. 90. Transeat recta ad per punctum M, et erit

$$AE.aM \sin a + BF.bM \sin b = CG.cM \sin c + DH.dM \sin d.$$

Est autem, ducta AP in AE normali et perpendiculo in eam MP, $AE.AP = AE.aM \sin a$; eodem modo ductis BQ, CR, DS normalibus in directiones potentiarum, et in eas ex M demissis perpendiculis, erit $FB.BQ = FB.bM \sin b$ et ita de reliquis. Ut ergo sit

$$AE.AP + BF.BQ = CG.CR + DH.DS,$$

seu summae momentorum ex utraque parte lineae MN sunt aequales.

172. **Coroll. 3.** Fig. 91. Sint virgae AOD potentiae parallelae AE, BF, CG, DH applicatae, erit OM iis aequivalens, quae est iis parallela et simul sumtis aequalis, et quae est in O applicata ita, ut ductis in OM perpendiculis AP, BQ, CR, DS, sit

$$AE.AP + BF.BQ = CG.CR + DH.DS.$$

Oportet igitur ex hac proprietate determinare locum rectae OM.

173. **Coroll. 4.** Fig. 92. Simili modo si potentiae quotcunque et qualescunque AE, BF, CG fuerint applicatae, resolvantur eae in verticales Ae, Bf, Cg et horizontales $A\varepsilon$, $B\varphi$, $C\gamma$: quaeratur aequivalens verticalibus OM, ubi debet esse $Ae.AP + Bf.BQ - Cg.CR = 0$, et aequivalens horizontalibus om, ut sit $A\varepsilon.Ap + B\varphi.Bq - C\gamma.Cr = 0$. Quae duae lineae om et OM se mutuo in ω intersecant; quia autem per axioma 5 (§ 124) patet idem esse quocunque in loco potentia applicetur modo in eadem directione applicentur ambae potentiae aequivalentes in ω, quarum aequivalens $\omega\mu$ aequivalebit omnibus, quae in debito virgae puncto applicari poterit.

174. **Scholion.** Ut facilius quae dicta sunt applicentur, notandum est, summam omnium momentorum potentiarum verticalium in rectam OM esse aequalem nihilo, ut et summam omnium momentorum horizontalium in om; at attentione habita, quae potentiae et quae lineae sint affirmativae quaeque negativae. Ut si Fig. 93. summa momentorum potentiarum AE, BF, CG, DH in rectam PS sit $=$ nihilo, hoc modo concipi debet: Si AE et AP sumantur pro affirmativis, erunt BF, BQ, CG et DS negativae et RC ac DH affirmativae, ut igitur sit

$$AE.AP + BF.BQ - CG.CR - DH.DS = 0.$$

175. **Theorema 17.** Fig. 94. Si virgae rigidae AOD potentiae quaecunque AC, BF, CG, DH fuerint applicatae, quarum aequivalens sit OM. Erit, assumto pro lubitu puncto Z, ductisque rectis AZ, BZ, CZ, DZ et OZ, summa momentorum omnium potentiarum AE, BF, CG, DH aequalis momento potentiae OM in Z, seu demonstrari oportet esse

$$AE.AZ \sin EAZ + BF.BZ \sin FBZ + CG.CZ \sin GCZ + DH.DZ \sin HDZ = OM.OZ \sin MOZ.$$

Demonstratio. Ducatur recta quaecunque ad secans directiones potentiarum in a, b, c, d et o. Patet potentiam OM in o applicatam aequivalere reliquis AE, BF, CG et DH in a, b, c et d applicatis. Sed ductis aZ, bZ, cZ, dZ et oZ, est

$$AE.aZ \sin EaZ + BF.bZ \sin FbZ + CG.cZ \sin GcZ + DH.dZ \sin HdZ = OM.oZ \sin MoZ \quad (139).$$

Est vero

$$AE.aZ \sin EaZ = AE.AZ \sin EAZ \text{ et } BF.bZ \sin FbZ = BF.BZ \sin FBZ,$$

et ita de reliquis, ut adeo habeatur

$$AE.AZ \sin EAZ + BF.BZ \sin FBZ + CG.CZ \sin GCZ + DH.DZ \sin HDZ = OM.OZ \sin MOZ. \text{ Q.E.D.}$$

176. **Coroll. 1.** Fig. 95. Si directiones potentiarum producantur et ex Z in eas perpendicula Za, Zb, Zc, Zd et Zo demittantur, erunt $AE.aZ$, $BF.bZ$, etc. momenta potentiarum in Z, et ideo erit $AE.aZ + BF.bZ + CG.cZ + DH.dZ = OM.oZ$.

177. **Coroll. 2.** Fig. 96. Si directiones potentiarum fuerint parallelae, lineae Za, Zb, Zc, Zd et Zo coincident, et propterea sequenti modo potentia aequivalens facile determinabitur. Ducatur ex Z recta Za in directiones potentiarum normalis (potest quidem recta quaecunque duci, cum nihilominus anguli ad a, b etc. fiant aequales). Erit $AE.aZ + BF.bZ + CG.cZ + DH.dZ = OM.oZ$; sed est $OM = AE + BF + CG + DH$, unde erit

$$oZ = \frac{AE.aZ + BF.bZ + CG.cZ + DH.dZ}{AE + BF + CG + DH},$$

unde invenitur punctum o, et ex eo O, ubi potentiam aequivalentem applicari oportet.

178. **Coroll. 3.** Si potentiae quaecunque fuerint applicatae, resolvantur singulae in verticales et horizontales, quo facto quaeratur potentia verticalibus aequivalens, et etiam potentia horizontalibus aequivalens. Quibus habitis, facile invenietur iis ambabus aequivalens, quae proin omnibus quoque aequivalebit.

179. **Coroll. 4.** Fig. 97. Contemplemur rem iterum generaliter, et sint virgae AOD potentiae quotcunque et qualescunque AE, BF, CG, DH applicatae, quibus aequivaleat potentia OM. Sit punctum Z infinite distans, erunt lineae AZ, BZ, CZ, DZ et OZ inter se parallelae, et pro aequalibus haberi poterunt. Quapropter haec proprietas obtinebitur, ut sit

$$OM \sin MOZ = AE \sin EAZ + BF \sin FBZ + CG \sin GCZ + DH \sin HDZ.$$

180. **Coroll. 5.** Fig. 98. Si fuerint lineae AZ, BZ etc. parallelae rectae OM, erit $\sin MOZ = 0$, adeoque $0 = AE \sin EAZ + BF \sin FBZ + CG \sin GCZ + DH \sin HDZ$; sed quia anguli GCZ et HDZ in alteram plagam rectarum CZ, DZ cadunt, pro negativis haberi debent eritque

$$AE \sin EAZ + BF \sin FBZ = CG \sin GCZ + HD \sin HDZ.$$

181. **Theorema 18.** Fig. 99. Si curvae AM in singulis punctis μ fuerint potentiae quaecunque verticales applicatae, ex curva AN determinatae, ita ut $\pi\nu$ applicata repraesentet summam omnium potentiarum, in respondente arcu $A\mu$ applicatarum. Erit summa momentorum omnium potentiarum arcus AM in M ut area APN.

Demonstratio. Ducatur applicatae $\mu\nu$ proxima $\varkappa\iota$; exprimet $\lambda\iota$ summam potentiarum arcus $A\varkappa$, ergo $\varrho\iota$ exhibet potentiam in $\mu\varkappa$ applicatam. Ejus momentum in M igitur erit $\varrho\iota.\lambda P$. Accipiatur puncto M proximum m, ductaque verticali mpn, erit potentiae $\varrho\iota$ momentum in $m = \varrho\iota.\lambda p$; unde differentia horum momentorum erit $\varrho\iota.Pp$. Idem cum de singulis potentiis valeat, erit differentia momentorum potentiarum omnium arcus AM in m et $M = PN.Pp$. Sit summa momentorum omnium in $M = M$, erit summa omnium momentorum in $m = M + dM$, quarum differentia erit dM, et ideo $dM = PN.Pp$; ergo, summando $M = \int PN.Pp =$ areae APN. Q. E. D.

Script. ad marg. Generalius potest applicari ad quascunque potentias; sed tum $\pi\nu$ denotare debet summam factorum omnium potentiarum arcus $A\mu$ in sinus angulorum, quos earum directiones cum axe AP constituunt.

182. **Coroll. 1.** Fig. 100. Si curvae AB hoc modo potentiae verticales fuerint applicatae juxta curvam AD, et quaeratur summa momentorum omnium in punctum M ubilibet assumtum, ducatur applicata MP et prolongetur in N, ut sit $PN = CD$, ducaturque recta DN. Exprimet quaevis applicata $\pi\nu$ summam omnium potentiarum arcus $AB\mu$; etenim cum in $B\mu$ nullae potentiae sint applicatae, summa omnium potentiarum BD per totum spatium BM non augetur neque minuitur. Ergo summa momentorum in M est ut area $ACD + CDPN$ $(PC.CD)$.

183. **Coroll. 2.** Fig. 101. Dicatur $AP = x$, $PM = y$ et summa potentiarum arcus AM sit P; erit summa omnium momentorum in $M = \int Pdx$. Ergo si arcui AM in quolibet puncto potentiae aequales applicentur, erit P ut arcus AM, qui si dicatur s, erit $P = s$, et summa momentorum omnium in M erit $\int sdx$.

184. **Coroll. 3.** Si curvae AM potentiae qualescunque fuerint applicatae, resolvantur singulae in laterales, unas verticales secundum MP agentes, et alteras horizontales, juxta MR trahentes. Dicatur summa horizontalium arcus $AM = Q$, erit summa momentorum potentiarum horizontalium $= \int Qdy$, existente summa verticalium $= \int Pdx$.

185. **Coroll. 4.** Cum momentum sit vis, punctum, in quod agit, circa se ipsum convertendi, videamus, num momenta potentiarum verticalium et horizontalium sint conspirantia, an vero minus. Potentiae verticales punctum M conantur convertere secundum plagam AM; at vero potentiae horizontales MR secundum plagam AR: sunt ergo contrariae ambarum actiones.

186. **Coroll. 5.** Sin autem potentiae horizontales MR fiant negativae, ut trahant juxta Mr, erunt et momentorum vires contrariae, et propterea conspirantes cum verticalibus; omnes enim punctum M conantur convertere secundum eandem plagam AP.

187. **Coroll. 6.** In illo igitur casu, quo horizontales agunt juxta MR, et summa omnium momentorum, punctum M secundum AP convertentium, $= \int Pdx - \int Qdy$; at in hoc casu potentiarum horizontalium, juxta Mr trahentium, erit communis vis convertens punctum M a dextro in sinistrum $= \int Pdx + \int Qdy$.

188. **Coroll. 7.** Fig. 102. Sint curvae AM in quovis loco μ potentiae normales $\mu\omega$ applicatae; resolvantur eae in verticales μo et horizontales ωo. Sit $A\pi = x$, $\pi\mu = y$ et potentia $\mu\omega = dz$; erit $\mu o = \frac{dzdx}{ds}$, et $\omega o = \frac{dzdy}{ds}$, denotante s curva $A\mu$. Erit summa omnium potentiarum verticalium $= \int\frac{dzdx}{ds}$, et summa omnium horizontalium $= \int\frac{dzdy}{ds}$. Si in integralibus loco x substituatur AP, et loco y, PM, habebuntur summae potentiarum verticalium et horizontalium arcus AM; unde momentum omnium in M erit $\int dx \int\frac{dzdx}{ds} + \int dy \int\frac{dzdy}{ds}$; sunt enim conspirantia momenta horizontalium et verticalium.

189. **Problema 19.** Fig. 103. Curvae AC in singulis punctis potentiis verticalibus applicatis, determinare punctum O, in quo potentia OR omnibus aequivalens applicari potest.

Solutio. Cum directiones omnium potentiarum supponuntur parallelae, erit potentia aequivalens omnibus simul sumtis aequalis. Designante autem AD curva supra descripta, erit BD aequalis omnibus potentiis simul sumtis; sit ergo oportet $OR = BD$. Accipiatur punctum quodcunque M; erit summa momentorum omnium potentiarum in M aequalis momento potentiae aequivalentis OR in M, quod est $OR.QP$, seu $BD.QP$. Ducta autem MP, eaque producta in T, ut sit $PT = BD$, ducatur recta DT. Exprimetur summa omnium momentorum potentiarum arcus AOC in M, per aream $APTDA$ (182), quae est aequalis $ABD + BP.BD$; oportet ergo ut sit

$$ABD + BP.BD = BD.QP = BP.BD + BQ.BD,$$

ergo $ABD = BQ.BD$, consequenter $BQ = \frac{ABD}{BD}$, unde invenietur punctum Q, et ex eo O. Q. E. I.

190. **Coroll. 1.** Sed distantia AQ erit $AB - \frac{ABD}{BD} = \frac{AB.BD - ABD}{BD}$. Compleatur rectangulum $ABDE$; erit $ABDE = AB.BD$, quare $AQ = \frac{ABDE - ABD}{BD} = \frac{AED}{BD}$, unde denuo punctum Q invenietur.

191. **Coroll. 2.** Dicatur $AB = x$, $BC = y$ et summa omnium potentiarum arcus $AC = P$; erit area $ABD = \int Pdx$, ergo $BQ = \frac{\int Pdx}{P}$, et hinc $AQ = x - \frac{\int Pdx}{P} = \frac{Px - \int Pdx}{P}$. Est vero

$$Px - \int Pdx = \int xdP, \text{ consequenter } AQ = \frac{\int xdP}{P};$$

denotat vero dP potentiam ipsam in quovis loco C applicatam.

192. **Coroll. 3.** Fig. 104. Existente OR potentia aequivalente omnibus arcus AM; accedat arcui AM insuper elementum Mm, cum sua potentia applicata, sitque or potentia tum aequivalens, manentibus $AP = x$, $PM = y$, summa omnium potentiarum arcus $AM = P$, erit potentia arculi $Mm = dP$; consequenter $AQ = \frac{\int xdP}{P}$ et $Aq = \frac{\int (x + dx)\, dP}{P + dP} = \frac{\int xdP + \int dxdP}{P + dP}$. Quapropter

$$Qq = \frac{P\int dxdP - dP\int xdP}{PP};$$

sed quia dP jam pro constanti erat acceptum, etenim oportuisset ponere $Aq = \frac{\int (x + dx)\,(dP + ddP)}{P + dP}$, erit $\int dxdP = xdP$, consequenter $Qq = \frac{PxdP - dP\int xdP}{PP}$. Est vero $\int xdP = P.AQ$, ergo posito $AQ = z$, erit $Qq = \frac{PxdP - PzdP}{PP} = (x - z)\frac{dP}{P} = PQ.\frac{dP}{P}$. Caeterum haec proprietas etiam invenitur ex inspectione superioris figurae, geometrice re considerata, nec non ex sola differentiatione aequationis $AQ = z = \frac{\int xdP}{P}$, seu $Pz = \int xdP$, quae dat $Pdz = (x - z)\,dP = PQ.dP$.

193. **Coroll. 4.** Fig. 105. Si curvae AM in singulis punctis potentiae qualescunque applicentur, resolvantur singulae in verticales et horizontales, illas juxta MP agentes, has juxta MQ. Sit summa omnium verticalium P, et summa horizontalium Q, manentibus $AP = x$ et $PM = y$; designet OR potentiam aequivalentem verticalibus, et VS aequivalentem horizontalibus, erit $AT = \frac{\int xdP}{P}$ et $AX = \frac{\int ydQ}{Q}$, unde O et V invenientur, cum vero sit $OR = P$ et $VS = Q$, poterit inveniri potentia aequivalens duabus OR et VS, quae proin aequivalebit omnibus.

194. **Coroll. 5.** Fig. 106. Sit curva AM catenaria, seu curva, quam format catena suspensa; erit ut infra videbimus $dx = \frac{ady}{\sqrt{(2ay + yy)}}$. Sint huic curvae in singulis punctis potentiae aequales

applicatae verticales; erit P ut arcus AM; dicatur $AM = s$, erit P ut s; est itaque $AT = \frac{\int xds}{s}$. Est autem $ds = \frac{(a+y)\,dy}{\sqrt{(2ay+yy)}}$ et $s = \sqrt{(2ay+yy)}$. Quia porro est

$$\int xds = sx - \int sdx, \quad \text{erit} \quad \int xds = x\sqrt{(2ay+yy)} - \int ady = x\sqrt{(2ay+yy)} - ay,$$

$$\text{quare} \quad AT = x - \frac{ay}{\sqrt{(2ay+yy)}}.$$

Sed cum sit $dx = \frac{ady}{\sqrt{(2ay+yy)}}$, erit $x = \frac{ay}{\sqrt{(2ay+yy)}} + \int \frac{aydy\,(a+y)}{(2ay+yy)^{\frac{3}{2}}}$, unde $AT = -\int \frac{aydy\,(a+y)}{(2ay+yy)^{\frac{3}{2}}}$, quod a logarithmis dependet. Erit autem

$$PT = \frac{ay}{\sqrt{(2ay+yy)}} = \frac{a.PM}{AOM}; \text{ ergo } OR.PT \text{ erit, ob } OR = s = \sqrt{(2ay+yy)}$$

aequale ay; consequenter summa momentorum in M est ut PM. Alia exempla non in medium affero facile enim ex praescriptis applicatio ad quosvis casus speciales absolvetur.

195. **Problema 20.** Fig. 107. Si curvae AMB in singulis punctis potentiae quaecunque ad punctum idem C tendentes fuerint applicatae, invenire potentiam iis aequivalentem.

Solutio. Cum omnes potentiae tendant ad punctum C, singulae tanquam puncto C applicatae considerari possunt. Assumatur elementum Mm, sitque potentia in ejus singulis punctis applicata $= z$, erit potentia in elementum Mm agens $= z.Mm = zds$ dicto $Mm = ds$. Applicetur igitur potentia CN in directum cum MC, fiatque $CN = zds$. Oportet ergo omnium potentiarum CN invenire aequivalentem (55.56) CV, seu punctum H, ita ut CH, ducta in numerum potentiarum, exprimat potentiam aequivalentem. Est vero numerus potentiarum aequalis numero punctorum curvae AMB adeoque aequalis ipsi curvae AMB. Ducatur recta quaecunque DP, et ex N demittantur in eam perpendicula NP, quorum summa dividatur per AB, quotoque aequalis accipiatur DK. Dein quoque accipiatur DJ, aequalis omnium DP summae, divisae per AB, completoque rectangulo $DKHJ$, erit H id punctum, et recta CH ducta in AB seu CV exhibebit potentiam aequivalentem. Producatur HC in O, et erit O punctum, in quo potentia aequivalens modo inventa secundum directionem OC applicari debet. Q. E. I.

196. **Coroll. 1.** Fig. 108. Quaeratur arcus AOM punctum O, in quo media directio terminatur, seu in quo potentiam aequivalentem applicare oportet. Ducatur recta AC, eaque producatur ut loco verticalis DP haberi queat; ei in C normaliter jungatur CQ, pro axe curvae habenda. Sit $CQ = x$, $MQ = y$; erit $CM = \sqrt{(xx+yy)} = t$; sit $AOM = s$, et potentia in M applicata $CN = zds$ erit $CP = \frac{yzds}{t}$ et $PN = \frac{xzds}{t}$; accipi ergo debet $CJ = \int \frac{yzds}{t} : s$ et $CK = \int \frac{xyds}{t} : s$. Completo rectangulo $CJHK$, ducatur diagonalis CH, quae producta curvam in O secat; erit O punctum applicationis OC directio et $CH.s$ quantitas potentiae aequivalentis.

197. **Coroll. 2.** Potest quoque CJ accipi aequalis $\int \frac{yzds}{t}$ et $CK = \int \frac{xzds}{t}$, eas non dividendo per s. Sed tum ipsa CH erit potentia aequivalens, ut non opus sit eam in s ducere. Hoc ergo modo facilius et brevius punctum O obtinebitur.

198. **Coroll. 3.** Fig. 109. Si punctum M ponatur variabile, et O continuo mutabitur ut et punctum H. Invenientur igitur hoc modo omnia loca puncti H, seu curva EH, quam id percurrit. Habebitur autem aequatio pro curva EH inter coordinatas, scilicet abscissa CJ erit $=\int\frac{yzds}{t}$ et applicata $HJ = \int\frac{xzds}{t}$. Data igitur curva AM et lege potentiarum, ei in singulis locis applicatarum, invenietur aequatio pro curva EH.

199. **Coroll. 4.** Ex solutione problematis et ejus collatione cum § 58 patet, eodem modo rem se habere, ac si punctum C ad singula curvae AM puncta traheretur eadem vi, qua ea ad C trahi ponuntur. Et propterea exempla in medium afferre non necesse esse duxi, cum ibi jam nonnulla sint annexa.

200. **Scholion.** Hisce de aequilibrio potentiarum virgae rigidae liberae applicatarum sufficientibus judicatis, ad alterum virgarum rigidarum casum propero, quo eae quodammodo impeditae ponuntur, ut non libere cuivis potentiae cedere queant, et interdum in quiete perseverare possint, etsi potentia quaedam alia non destruatur.

201. **Divisio.** Hanc sectionem hoc modo partior, ut primo de virga, in quodam puncto prorsus firmata, agam; dein, de virga alicubi ita saltem firmata, ut tantum circa illud punctum motu circulari moveri queat. Tertio, de virga, cujus aliquod punctum perpetuo in data linea positum esse debet. Quarto, de virga, lineae cuivis firmae adjacente, ut eam semper tangat, nunquam transigere queat. Quinto, de virga, cujus duo puncta continuo in datis curvis ponuntur, et sexto, de virga, quae punctum quoddam in data curva mobile habet, et quae praeterea super alia data linea jacet, juxta quartum casum. Hoc modo penitus istam materiam exhausisse autumo, ut vix casus excogitari possit, qui in enumeratis non contineatur. Hoc igitur pertractato, tam in hypothesi virgae rectae, quam curvae cujusvis.

202. **Theorema 19.** Fig. 110. Si virgae AB in A prorsus firmae applicetur in B potentia quaecunque BC, poterit ea duplicem habere effectum, unum, quo virgam BA evellere, alterum, quo eam abrumpere conatur.

Demonstratio. Sit virgae AB applicata potentia in directum jacens BE, conabitur haec virgam AB directe evellere. Sed si potentia applicata BF fuerit in AB perpendicularis, ejus tota actio in abrumpenda virga consumetur. Quare cum potentia quaecunque, quae neque in directum BE, neque perpendiculariter secundum BF trahit, in hujusmodi duas resolvi possit, ut potentia BC in BE et BF, duplici modo in virgam aget, uno, quo eam evellere, propter BE, et altero, quo eam abrumpere, propter BF, conatur. Q. E. I.

203. **Coroll. 1.** Quod ad quantitatem horum conatuum attinet, patet conatum evellendi virgam esse ut potentiam BE, neque hic locum applicationis B in computum venire.

204. **Coroll. 2.** Ne ergo virga cedat, oportet ut retineatur, seu retrorsum trahatur vi aequali vel majori, quam est vis BE.

205. **Coroll. 3.** Quantitas conatus abrumpendi virgam AB est aequivalens momento potentiae BF, seu facto ex BF in AB.

206. **Coroll. 4.** Fig. 111. Ne igitur haec potentia effectum suum obtineat, oportet applicari contrarie agentem GH, cujus momentum $HG.AG$ aequale sit momento $BF.AB$; unde patet si ea potentia in puncto A applicari debeat, eam oportere esse infinitam.

207. **Coroll. 5.** Fig. 112. Si virga fuerit curva AB in A firmata et in B applicatam habens potentiam BC, ducatur tangens Ab ex A et producatur CB ut eam in b secet, potentia BC tanquam in b applicata considerari potest, quae, ut praeceptum est, resoluta, dabit effectus in punctum A, nempe unum, quo evellitur, alterum quo abrumpitur.

208. **Coroll. 6.** Si tali virgae, vel rectae vel curvae, plures una potentiae sint applicatae, quid eae in virgam possint, opus non est particulariter inquirere. Nam cum in praecedentibus methodus tradita sit, qua una potentia iis aequivalens inveniri potest: quaeratur ea, eritque casus plurium potentiarum ad casum unicae reductus, qui hic est expositus.

209. **Problema 21.** Fig. 113. Si virgae ABC in duobus punctis A et B firmatae potentia CD in puncto C applicetur, invenire vires, quas puncta A et B sustinent.

Solutio. Ponatur primo punctum A solum firmum, et quaeratur potentia in B applicanda, quae actionem potentiae CD destruat. Sit ea Be, et oportet, ut momenta potentiarum CD, Be in A sint aequalia et contraria. Producatur eB in alteram partem; ex punctis A et C in eam demittantur perpendicula CG, AH. Erit momentum potentiae CD in $A = CD.(CG + AH)$ ( ), et momentum potentiae $Be = Be.AH$; ergo $CD(CG + AH) = Be.AH$, unde $Be = CD\,(CG + AH):AH$. Hanc ergo vim punctum B sustinet; adeoque ea sursum trahi debet. Simili modo punctum A sursum sollicitatur a potentia CD vi $= CD.CG:AH$ (posito B puncto fixo). Ergo tanta vi deorsum urgeri debet. Q. E. I.

210. **Coroll. 1.** Solutio problematis ex eo pendet, quomodo virgae ABC potentiae in punctis A et B applicari debeant, data potentia in C applicata, ut obtineatur aequilibrium. Cum hoc sit in priori parte hujus capitis pertractatum, quales potentiae virgae applicatae esse debeant, ut adsit aequilibrium, plures casus, ubi vires quaeruntur, quibus plura puncta virgae urgentur, praetermitto.

211. **Coroll. 2.** Fig. 114. Si virga fuerit recta AC, eique in C potentia CD normaliter applicata, erit vis, quam B sustinet $= CD.CA:AB$, et vis, quam A sustinet $= CD.CB:AB$. Cum autem sit $CD.CA:AB = CD.CB:AB + CD$, manifestum est vim, quam punctum B sustinet, aequalem esse summae potentiarum puncta C et A urgentium.

212. **Coroll. 3.** Fig. 115. Hinc igitur perspicuum est, quantam vim clavi A et B sustinere debeant a trabe AC, potentia CD sollicitato, utrumque enim de loco movere conatur.

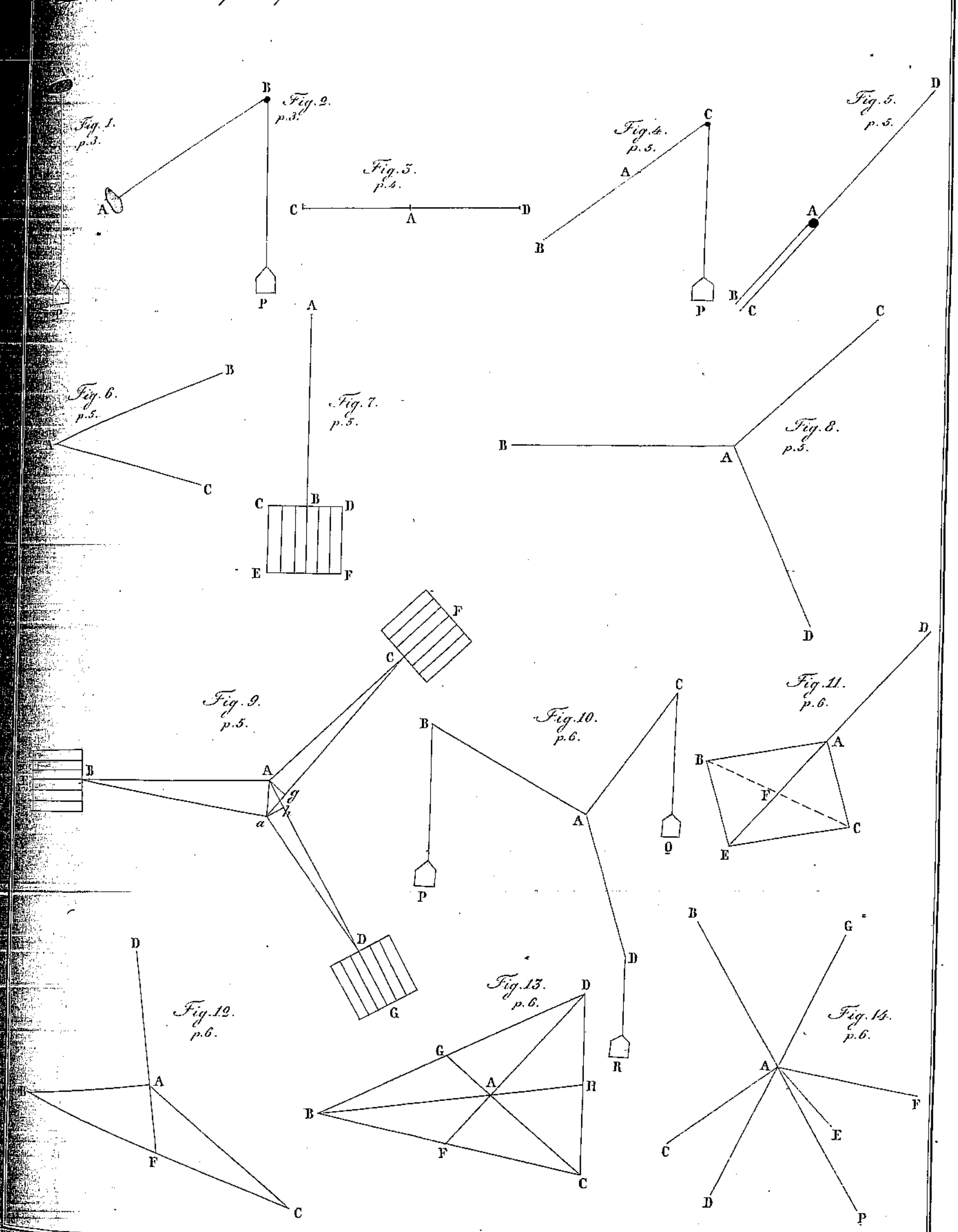


Fig. 1. p. 3.
Fig. 2. p. 3.
Fig. 3. p. 4.
Fig. 4. p. 5.
Fig. 5. p. 5.
Fig. 6. p. 5.
Fig. 7. p. 5.
Fig. 8. p. 5.
Fig. 9. p. 5.
Fig. 10. p. 6.
Fig. 11. p. 6.
Fig. 12. p. 6.
Fig. 13. p. 6.
Fig. 14. p. 6.

Fig. 15. p. 7.

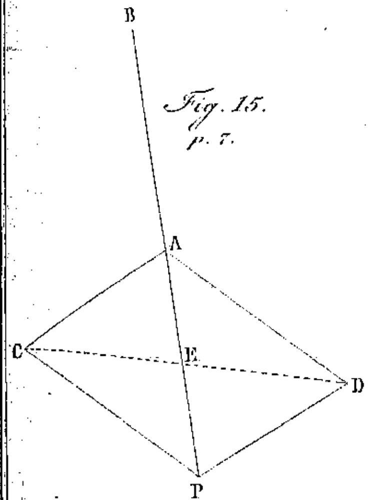


Fig. 16. p. 7.

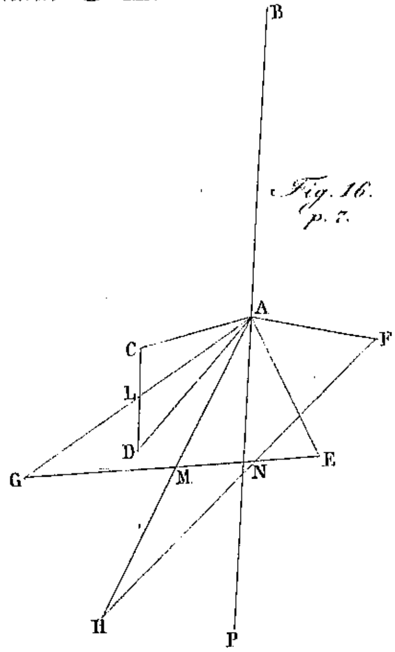


Fig. 17. p. 7.

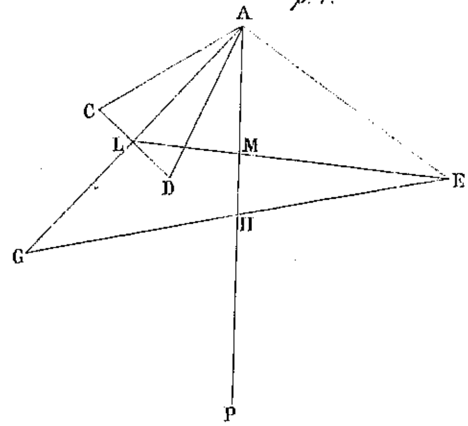


Fig. 20. p. 9.

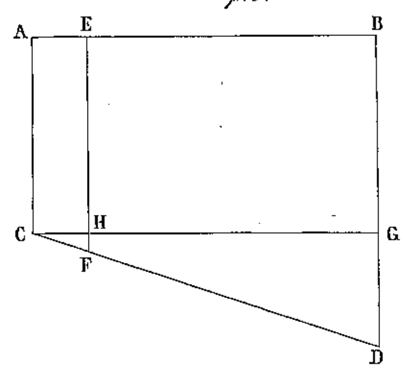


Fig. 18. p. 8.

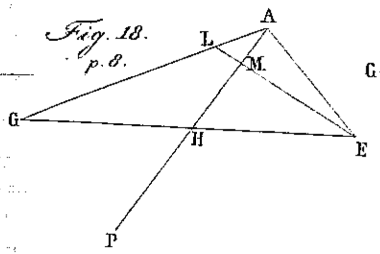


Fig. 23. p. 10.

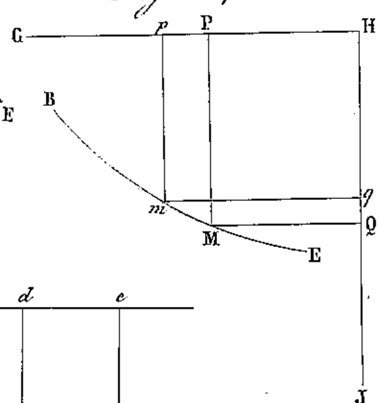


Fig. 21. p. 9.

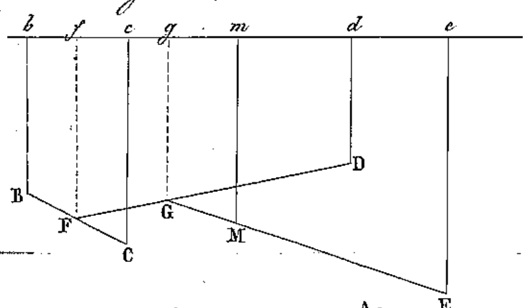


Fig. 22. p. 10.

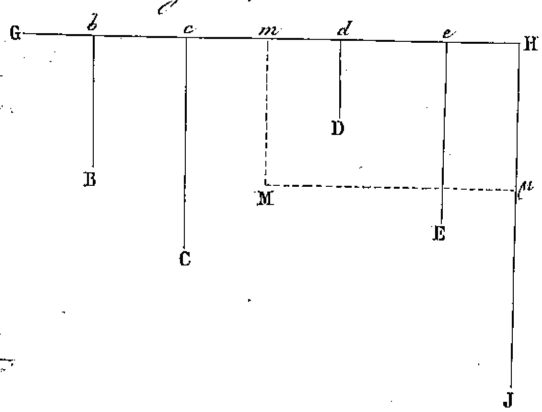


Fig. 19. p. 8.

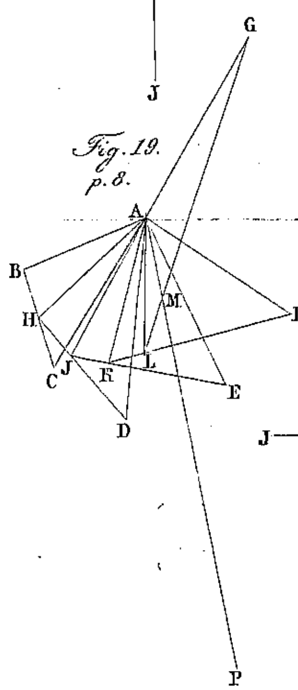


Fig. 24. p. 10.

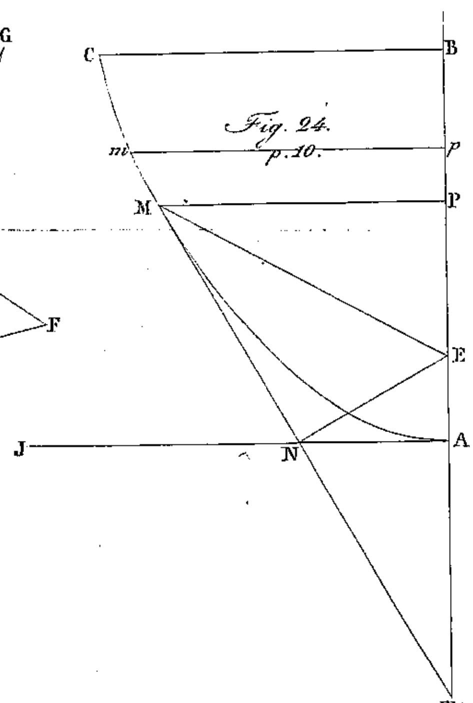


Fig. 25. p. 11.

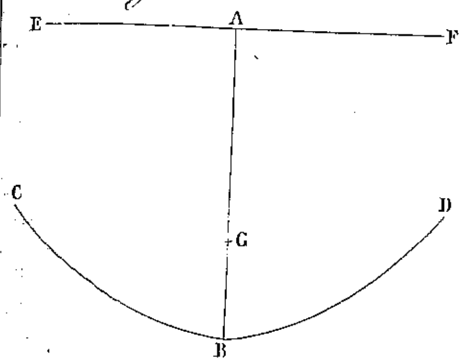


Fig. 26. p. 11.

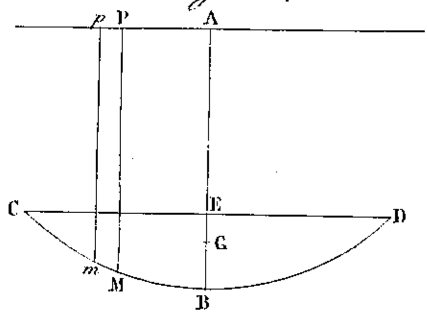


Fig. 27. p. 11.

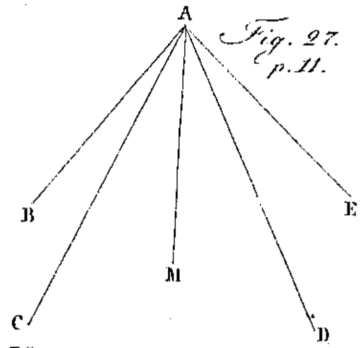


Fig. 35. p. 15.

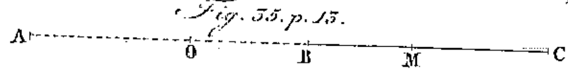


Fig. 28. p. 11.

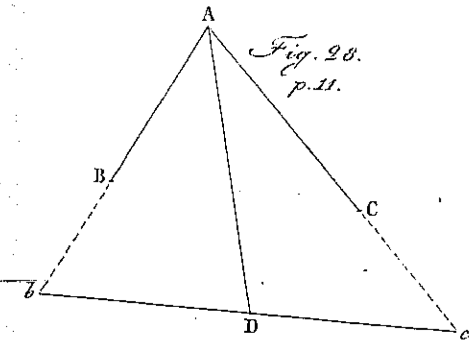


Fig. 30. p. 12.

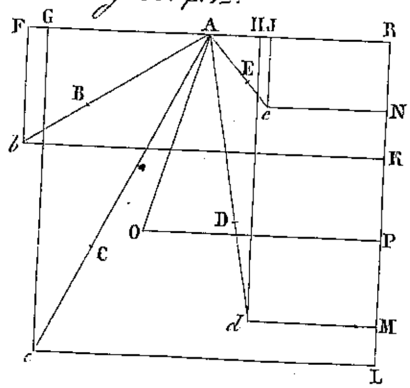


Fig. 31. p. 12.

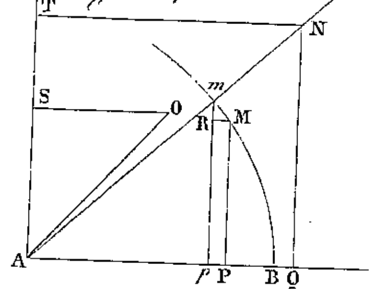


Fig. 32. p. 13.

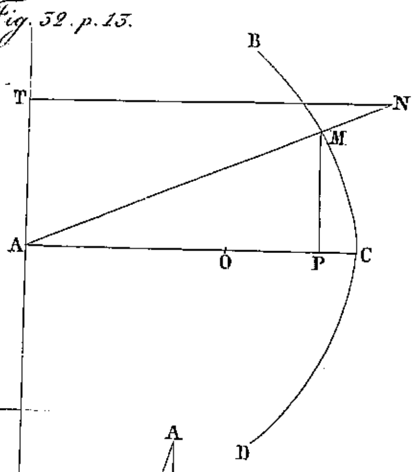


Fig. 33. p. 13.

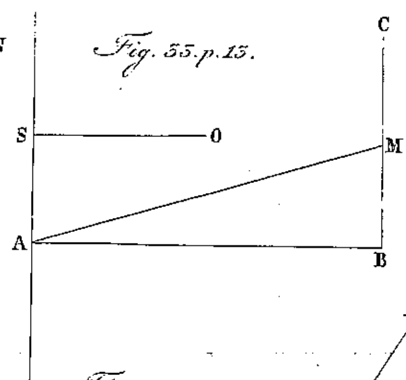


Fig. 34. p. 13.

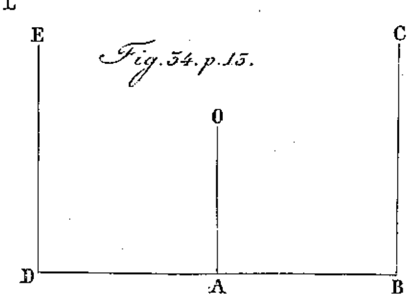


Fig. 29. p. 11.

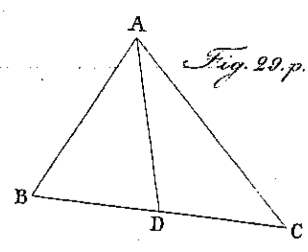


Fig. 36. p. 14.

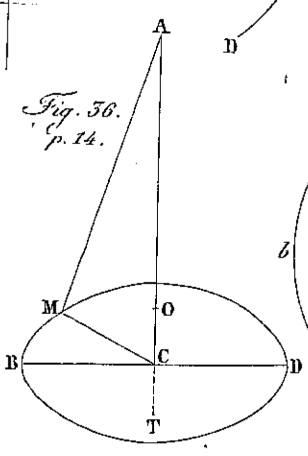


Fig. 37. p. 14.

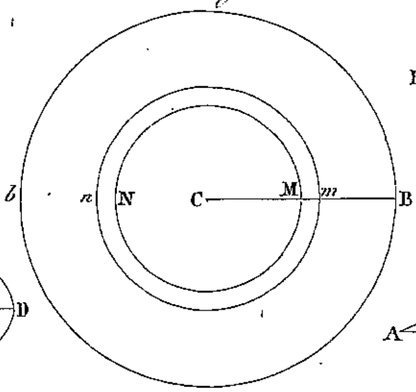


Fig. 38. p. 14.

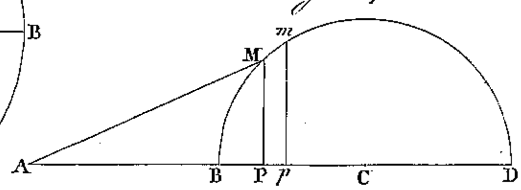
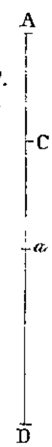


Fig. 39. p. 16.



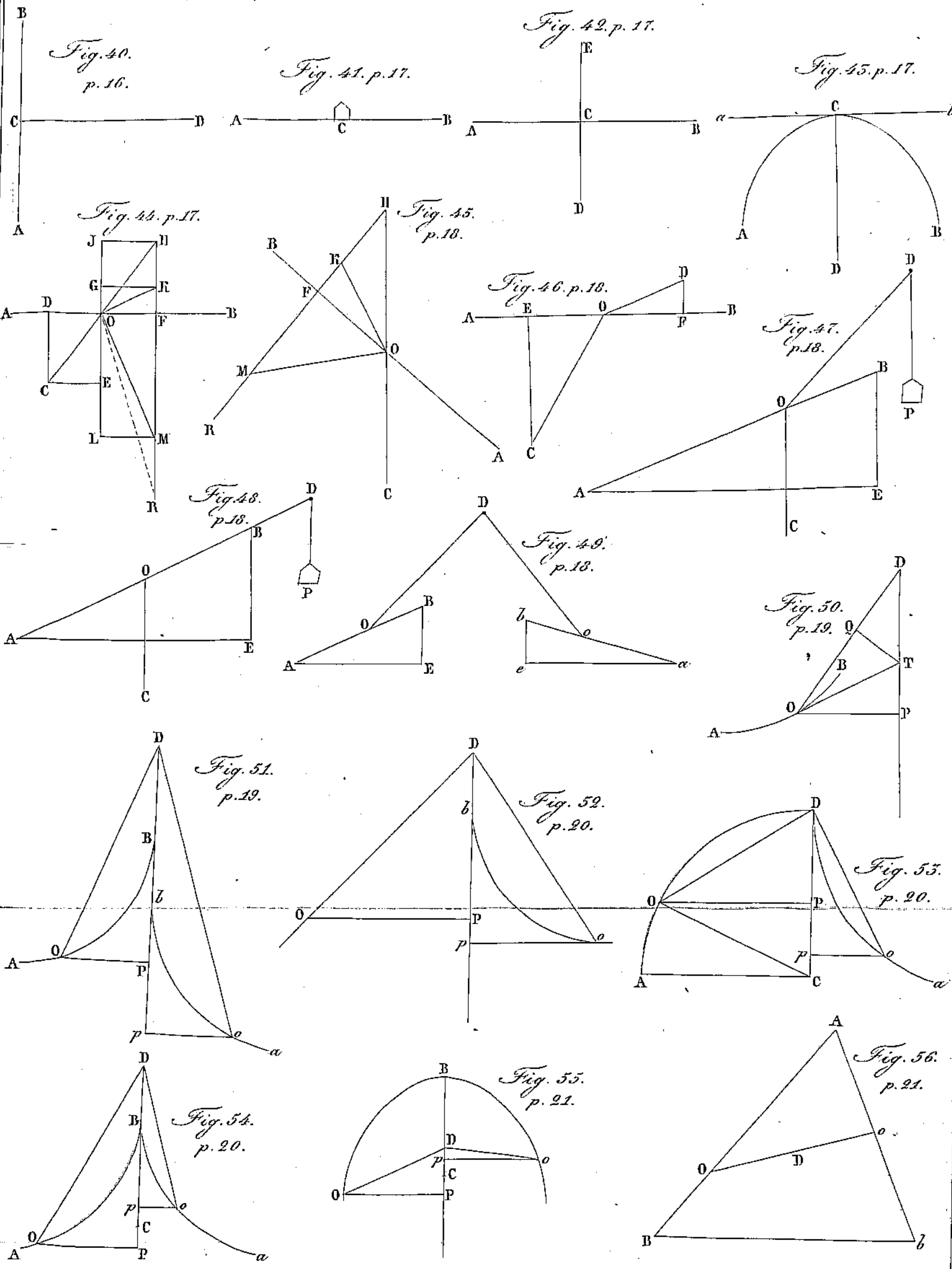


Fig. 40. p. 16.

Fig. 41. p. 17.

Fig. 42. p. 17.

Fig. 43. p. 17.

Fig. 44. p. 17.

Fig. 45. p. 18.

Fig. 46. p. 18.

Fig. 47. p. 18.

Fig. 48. p. 18.

Fig. 49. p. 18.

Fig. 50. p. 19.

Fig. 51. p. 19.

Fig. 52. p. 20.

Fig. 53. p. 20.

Fig. 54. p. 20.

Fig. 55. p. 21.

Fig. 56. p. 21.

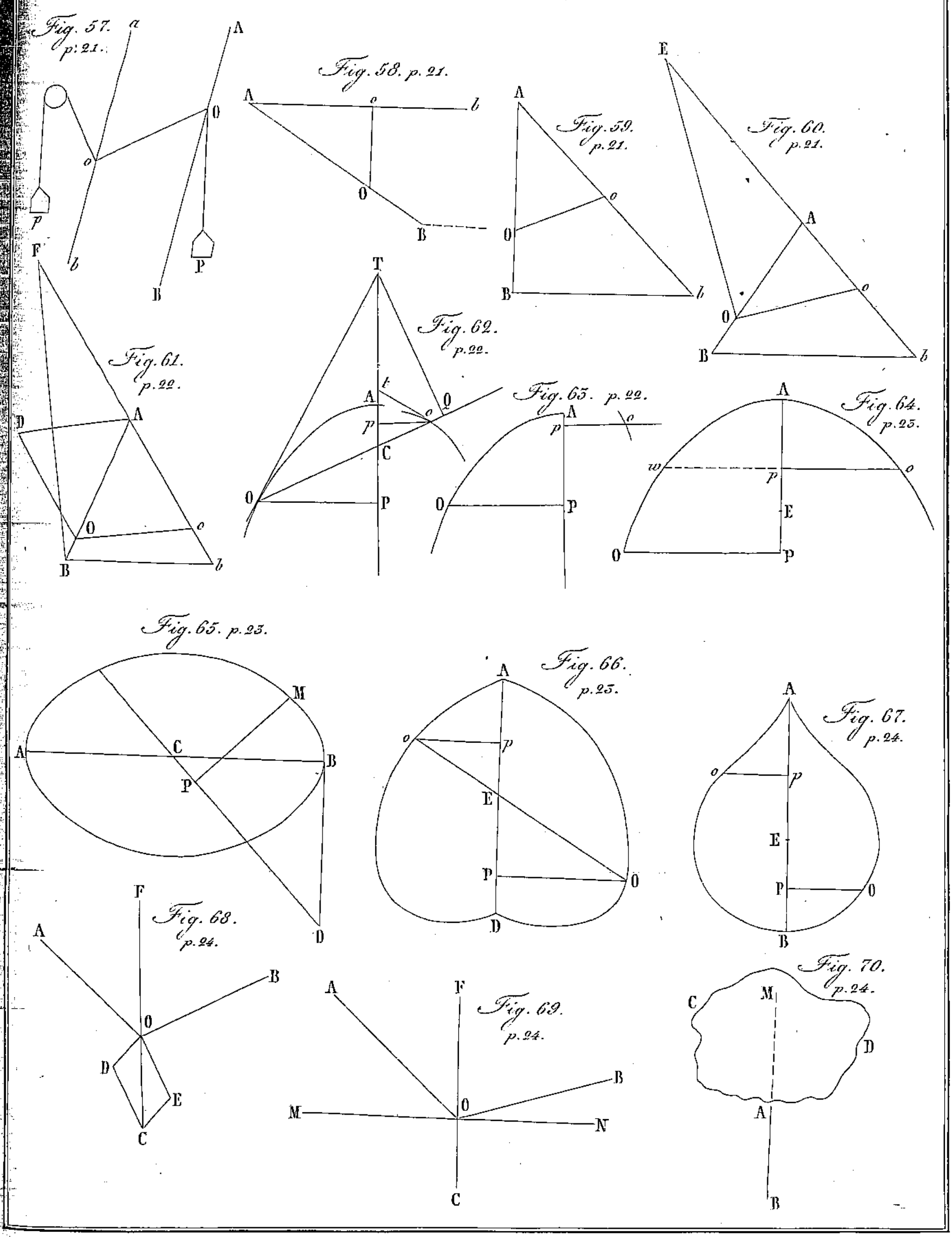


Fig. 57. p. 21.
Fig. 58. p. 21.
Fig. 59. p. 21.
Fig. 60. p. 21.
Fig. 61. p. 22.
Fig. 62. p. 22.
Fig. 63. p. 22.
Fig. 64. p. 23.
Fig. 65. p. 23.
Fig. 66. p. 23.
Fig. 67. p. 24.
Fig. 68. p. 24.
Fig. 69. p. 24.
Fig. 70. p. 24.

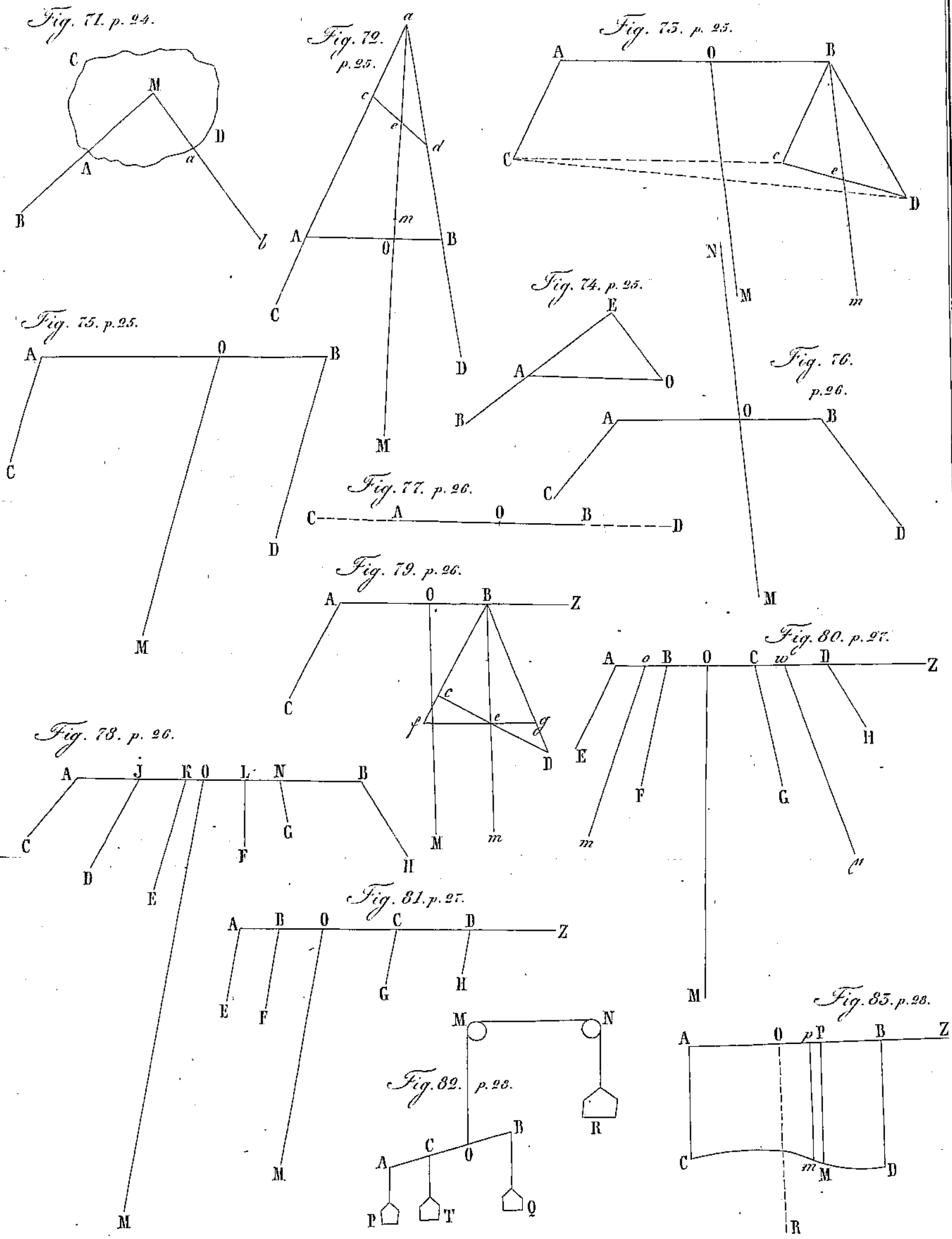


Fig. 71. p. 24.

Fig. 72. p. 25.

Fig. 73. p. 25.

Fig. 74. p. 25.

Fig. 75. p. 25.

Fig. 76. p. 26.

Fig. 77. p. 26.

Fig. 78. p. 26.

Fig. 79. p. 26.

Fig. 80. p. 27.

Fig. 81. p. 27.

Fig. 82. p. 28.

Fig. 83. p. 28.

Fig. 84. p. 29.

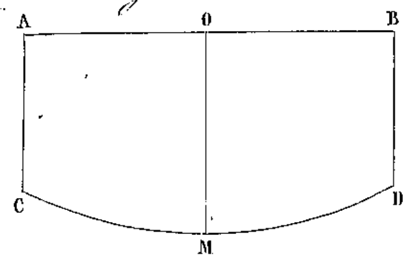


Fig. 85. p. 29.

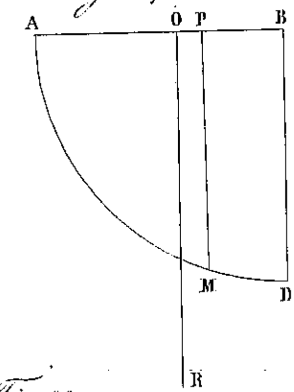


Fig. 86. p. 29.

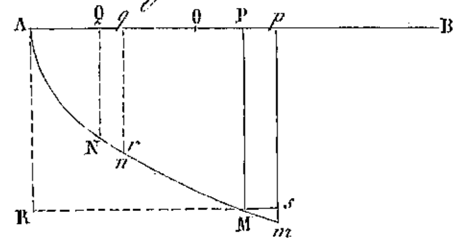


Fig. 89. p. 31.

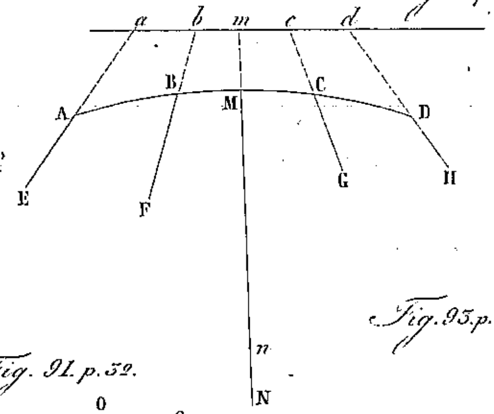


Fig. 87. p. 30.

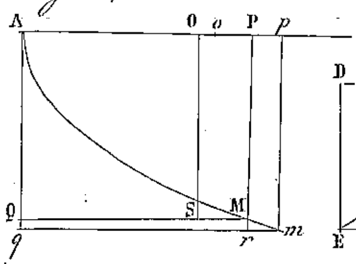


Fig. 88. p. 30.

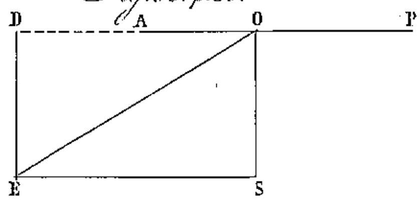


Fig. 90. p. 31.

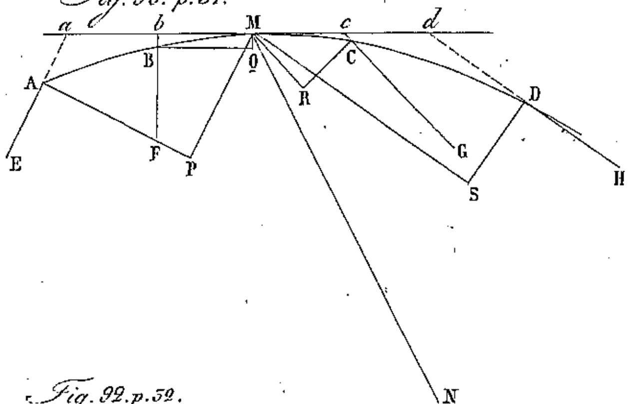


Fig. 91. p. 32.

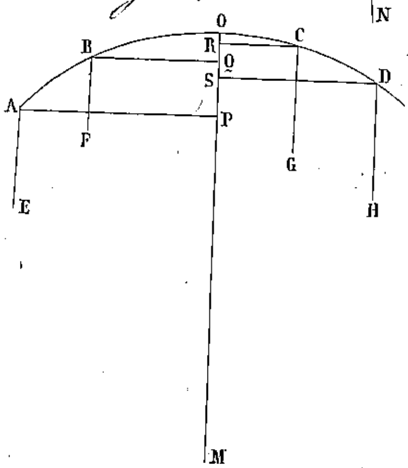


Fig. 93. p. 32.

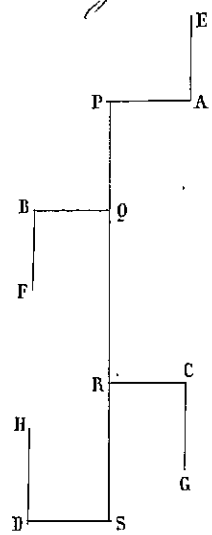


Fig. 92. p. 32.

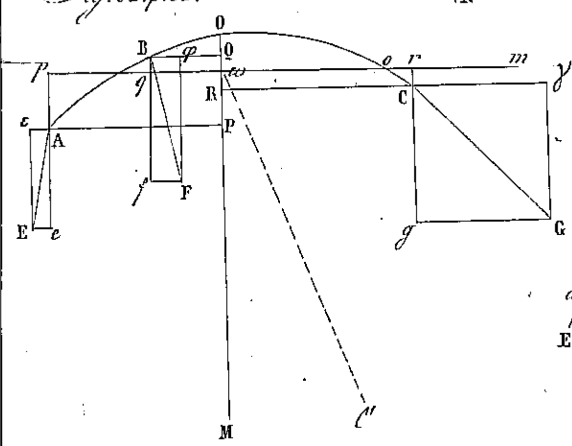


Fig. 94. p. 32.

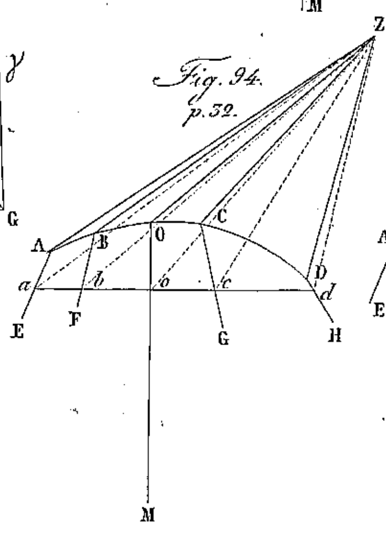
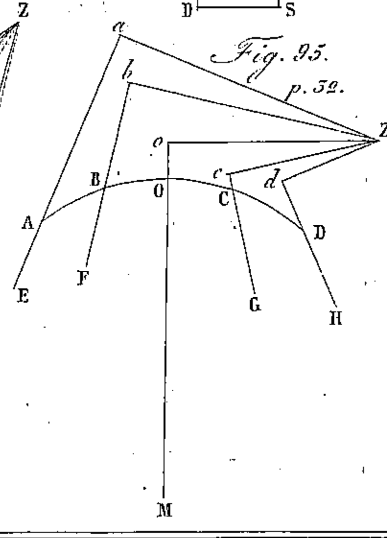


Fig. 95. p. 32.



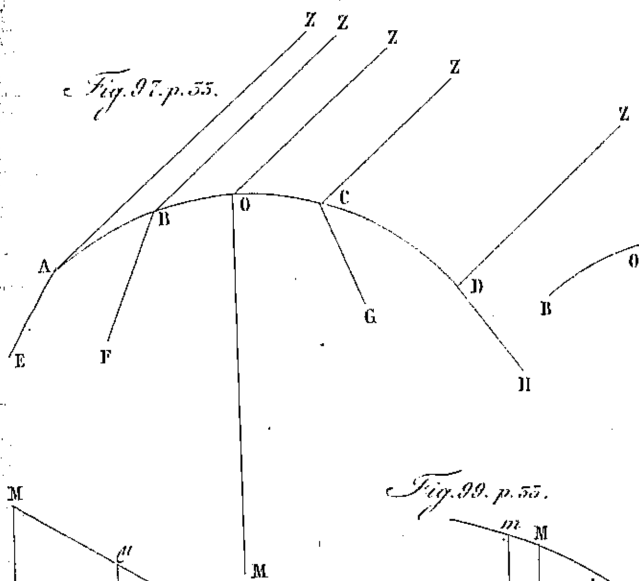


Fig. 97. p. 33.

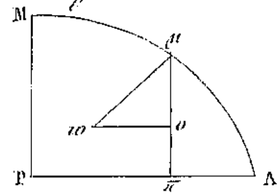


Fig. 102. p. 34.

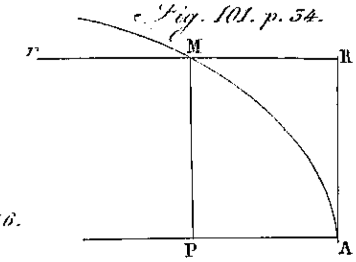


Fig. 101. p. 34.

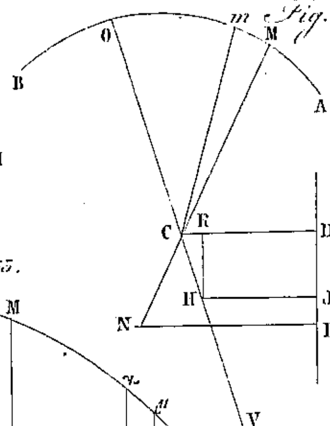


Fig. 107. p. 36.

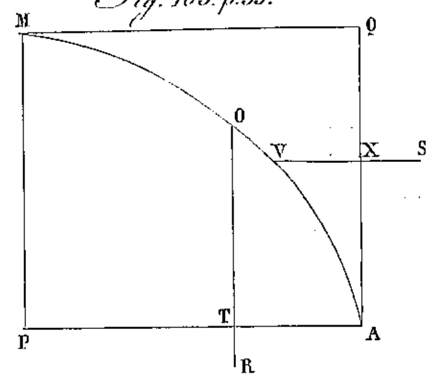


Fig. 105. p. 35.

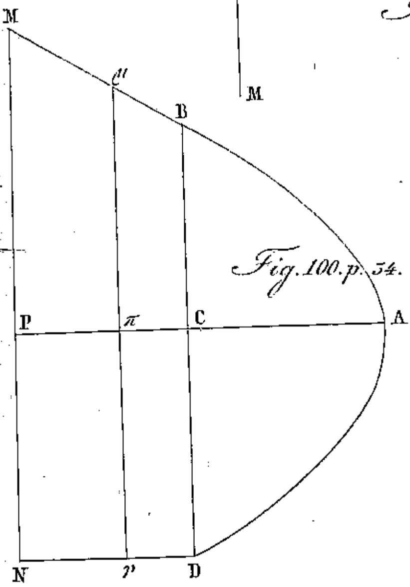


Fig. 100. p. 34.

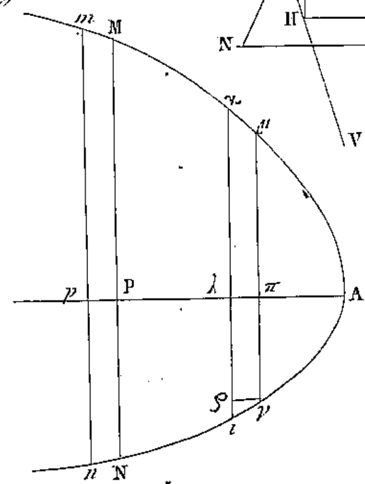


Fig. 99. p. 33.

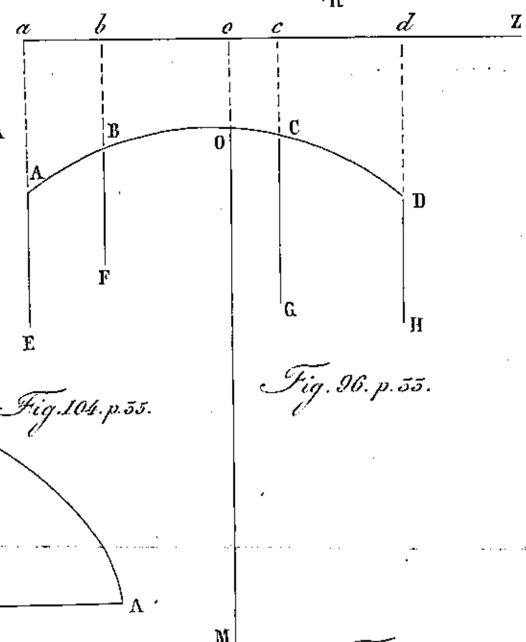


Fig. 96. p. 33.

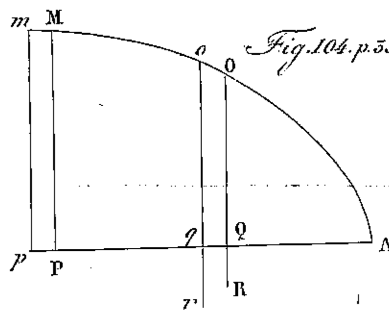


Fig. 104. p. 35.

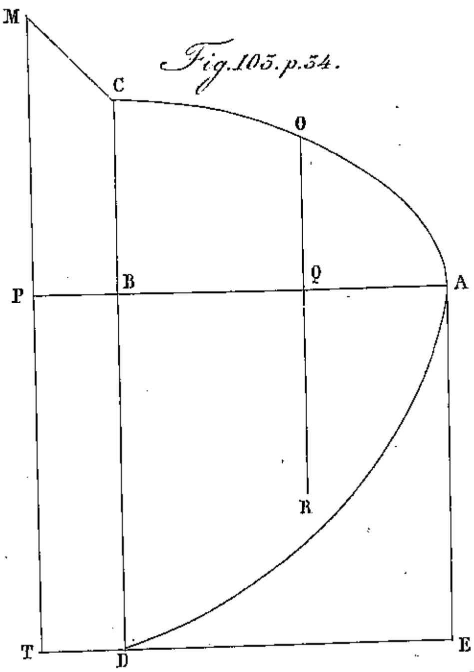


Fig. 103. p. 34.

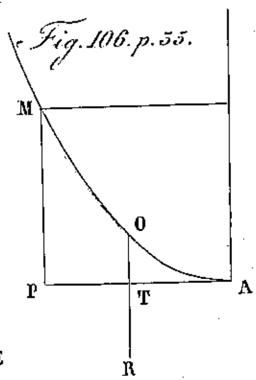


Fig. 106. p. 35.

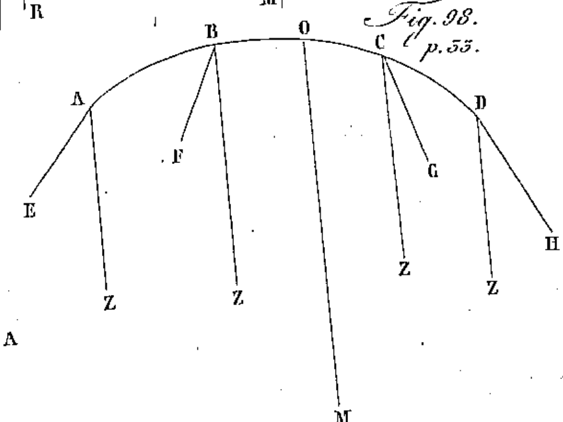


Fig. 98. p. 33.

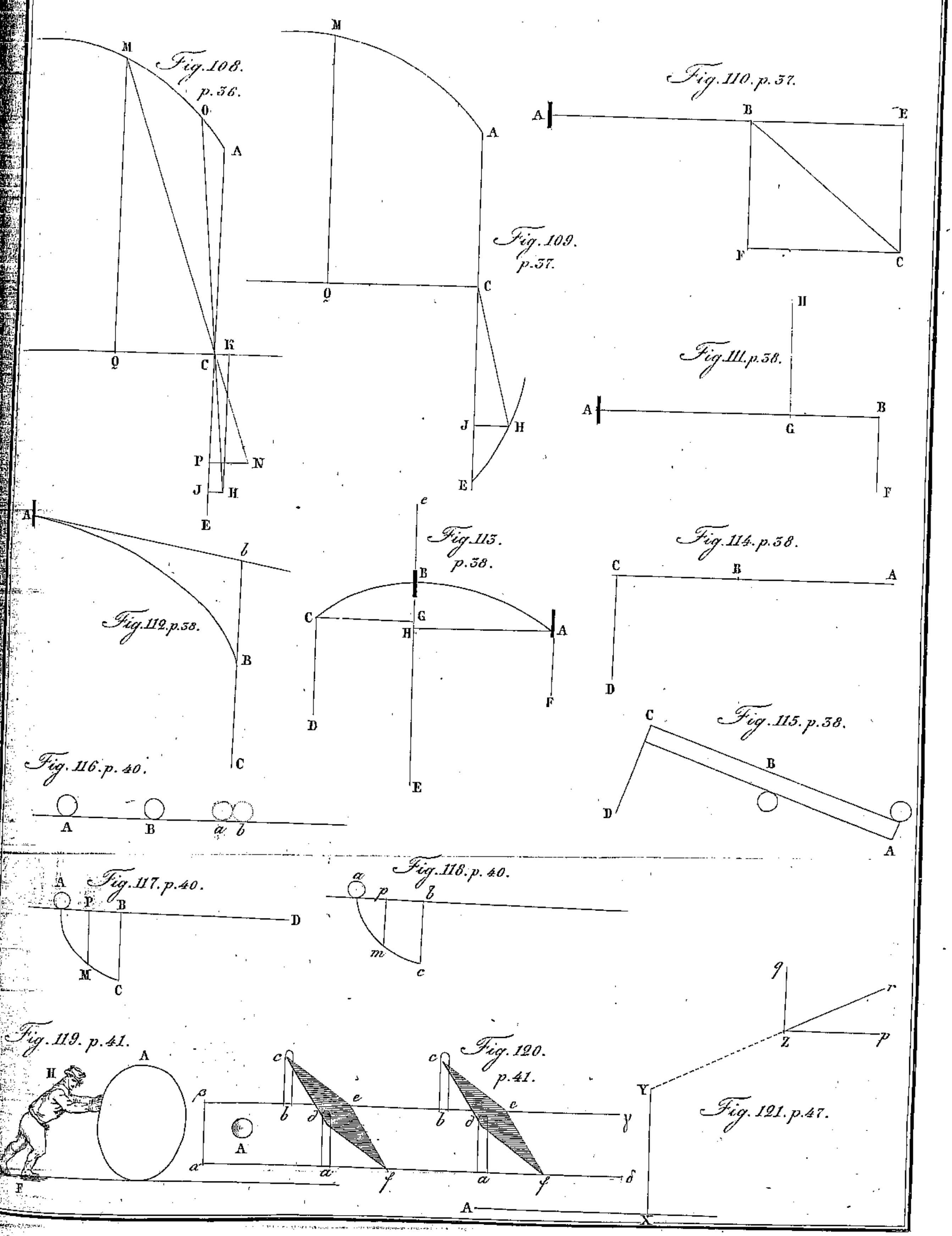


Fig. 108. p. 36.
Fig. 109. p. 37.
Fig. 110. p. 37.
Fig. 111. p. 38.
Fig. 112. p. 38.
Fig. 113. p. 38.
Fig. 114. p. 38.
Fig. 115. p. 38.
Fig. 116. p. 40.
Fig. 117. p. 40.
Fig. 118. p. 40.
Fig. 119. p. 41.
Fig. 120. p. 41.
Fig. 121. p. 47.