1862

Octodecim litterae ad Cel. Lagrange datae annis 1755 ad 1775

Leonhard Euler

C. Octodecim litterae ad Cel. Lagrange datae annis 1755 ad 1775.

1.

Vir praestantissime atque Excellentissime.

Perlectis tuis postremis litteris, quibus theoriam maximorum ac minimorum ad summum fere perfectionis fastigium erexisse videris, eximiam ingenii tui sagacitatem satis admirari non possum. Cum enim non solum in tractatu meo de hoc argumento methodum mere analyticam desideravissem, qua regulae ibi traditae erui possent, sed etiam deinceps non parum studii in hujusmodi methodo detegenda consumpsissem, maximo sane gaudio me affecisti, quod tuos profundissimas aeque ac solidissimas meditationes super his rebus mecum benevole communicare voluisti, quamobrem tibi me maxime obstrictum agnosco. Statim autem perspixi analysin tuam, quae meas hujusmodi problematum solutiones per sola analyseos praecepta elicuisti, multo latius patere mea methodo ideis geometricis innixa. In universa enim serie valorum ipsius y, qui singulis valoribus ipsius x respondent, donec x dato valori a aequetur, ego unicum valorem ipsius y data quadam particula δy augeri concepi, indeque incrementum in formula integrali $\int zdx$ ortum investigavi, dum tu, Vir clarissime, singulos valores ipsius y incrementa δy capere assumis, quam ob causam, non dubito quin tua analysis, si penitus excolatur, ad multo profundiora mox sit perductura. Cujus quidem praestantiae jam eximia exempla a te feliciter confecta circa lineas citissimi appulsus ad datam lineam, quin etiam de methodo maximorum ad superficies applicata commemoras, quae omnia ut accuratius persequaris etiam atque etiam te rogo. Mea quidem methodo usus, plures hujusmodi quaestiones circa superficies pertractavi in scientia navali, quae duobus voluminibus in 4[to] Petropoli pluribus abhinc annis prodiit. Quod autem ad tuam methodum, qua singulis applicatis y incrementa δy tribuis, attinet, antequam hoc ipsum, quod non aperte indicas, animadverti, de consensu tuarum formularum cum meis dubitaveram. Ut enim $\int zdx$ fiat maximum existente:

$$dz = Ndy + Pd^2y + Qd^3y + \ldots\ldots$$

(ubi quidem pro δx unitatem ponis, non pro x, uti forte lapsu calami notas), necesse est, ut tuo signandi more sit

$$\delta \int zdx, \quad \text{seu} \quad \int \delta zdx = 0.$$

At vero invenis, ponendo tecum 1 pro δx:

$$\delta \int z = \int (N - dP + d^2Q - d^3R \text{ etc.})\ \delta y + (P - dQ + d^2R)\,\delta y + (Q - dR)\,d\delta y \quad \text{etc.}$$

unde concludis esse debere

$$N - dP + d^2Q - d^3R = 0.$$

Cum tamen natura maximorum tantum postulet, ut sit:

$$\int (N - dP + d^2Q - d^3R \text{ etc.})\ \delta y = 0.$$

Verum perspecta amplitudine .... si unicae applicatae y incremen .... $\int (N - dP + d^2Q -)\,\delta y$ alius val .... partes $(P - dQ + d^2R)\,\delta y + (Q$ .... $x = a$ referuntur evanescere, ... sensus deprehendatur.

Vehementer etiam te rogo, Vir clarissime, ut mihi ignoscas, quod ad tuos priores litteras m ...... commercium nostrae urbis cum Italia .... ut nisi per mercatores promoveatur, non .... possit. Quare cum mihi jam mercatorem tuum indicaveris, has litteras ad eum per mercatorem mittens rogo, ad quem etiam tuam responsionem, qua forte me honorare volueris, per tuum mercatorem mittere vellem.

Quod autem in prioribus litteris de analogia differentialium cujusque ordinis formulae xy et terminorum binomii potestatis $(a+b)^m$ attulisti, eam jam a Leibnitzio observatam esse memini, quod nisi fallor in ejus cum Bernoullio commercio reperies. Vale et salve

Dabam Berolini d. 6 Sept. 1755. Tibi addictissimo L. Eulero*).

2.

Vir clarissime atque acutissime,

Binas tuas epistolas, alteram circa finem anni elapsi, alteram vero nuper, ad me datas, summa cum voluptate perlegi, summamque ingenii tui perspicaciam maxime sum admiratus. Non solum enim methodum illam maximorum et minimorum, cujus equidem prima quasi elementa exposueram, ex veris iisque subtilissimis principiis elicuisti, verum etiam eandem penitus perfecisse videris, ut nihil amplius, quod in hoc genere desiderari queat, sit relictum. Quamobrem tibi, Vir clarissime, ex animo gratulor, ac te etiam atque etiam rogo, ut quae in hoc genere tam felici cum successu es meditatus, ea omni studio penitius perscrutari ac perficere pergas. Subtilissimae autem hic occurrunt quaestiones, quae non solum omnem ingenii solertiam, sed etiam maximam circumspectionem in ratiocinando postulant, quandoquidem haec methodus nobis objecta plurimis plerumque circumstantiis involuta exhibet, quas nisi calculum ad exempla determinata applicemus, vix distincte perspicere valeamus. Ita cum investigatio curvae maximi minimive proprietate praeditae perduxerit ad hanc aequationem $L=0$, quae scilicet indicat tractu curvae, paululum immutato, variationem inde ortam evanescere, quemadmodum natura maximi minimive postulat, dubito an aequationes $dL=0$, $d^2L=0$, seu $L=\alpha$ vel $L=\alpha+\beta x$ ad eundem sub aliis circumstantiis perducere queant. Neque etiam transformatio formulae

$$\int L\delta y \quad \text{in} \quad L\int\delta y - dL\int^2\delta y \quad \text{etc.}$$

novas determinationes mihi quidem suppeditare videtur; sed tantum indicare si sit $L=0$, fore etiam $dL=0$, quod utique verum est, sed conclusio inversa locum non habet. Nam nisi sit $L=0$, ratio maximi vel minimi non amplius versatur; sed fortasse hujusmodi positiones aliis problematis solvendis inservire poterunt. Quod autem brachystochronas per tria plurave puncta data transeuntes attinet, crediderim eas non esse curvas continuas, sed a quovis puncto ad proximum sequens arcum cycloidis duci oportere, quo tempus translationis ab altero ad alterum fiat minimum: si enim corpus celerrime singulas has portiones percurrat, totam curvam sine dubio tempore brevissimo conficiet.

Deinde si non inter omnes curvas, sed eas tantum, quae sub certo quodam genere continentur, quaeratur ea, quae maximi minimive proprietate gaudeat, tua quidem methodus ad hujusmodi quaestiones aequo cum successu adhiberi potest, dum mea nullius est usus, sed evolutio calculi saepenumero maximis obnoxia est difficultatibus; velut si (Fig. 76) super semiaxe horizontali dato AC infiniti describantur quadrantes elliptici AD, AQ, qui ratione semiaxis conjugati CD, CQ, differant, inter eosque quaeratur is AD, super quo corpus in vacuo descensum ex A incipiens, citissime ad rectam CQ perveniat, aequatio infinita pro specie hujus ellipsis invenitur, unde non nisi appropinquando valor semiaxis conjugati CD definiri potest. Adhibitis autem appropinquationibus, reperis esse debere

$$8CD^2 = 3AC^2, \quad \text{seu} \quad CD = AC\sqrt{\frac{3}{8}}$$

*) Omnes litterae e Berolino datae propria Euleri manu conscriptae sunt.

ɜ ergo velim, an haec sit vera solutio? et si sit vera, an ea non directe ope methodi cujusdam certae obri queat.

Litteras tuas tam profundis meditationibus refertas cum illustrissimo praeside nostro communicavi, qui sumn tuam sagacitatem mecum plurimum est admiratus, simulque tibi pro suscepto principii minimae actionis ocinio, maximas agit gratias: tuoque nomine numerum sociorum academiae nostrae haud mediocriter illustrairi censet, quod munus ut tibi conferatur prima oblata occasione curabit. De eo quoque mecum est allo-ıs, ut ex te sciscitarer, an non sedem, qua Taurini frueris, cum alia in Germania sub auspiciis regis nostri nificentissimi, cui te commendare vellet, permutare cupias; qua de re ut me certiorem facias, enixe rogo; i enim certe nihil evoptatius exenire potest, quam si tecum coram communicare, tuaque consuetudine frui ret. Vale et salve, Vir praestantissime

Berolini d. 24 Aprilis 1756. Tibi deditissimo L. Eulero.

3.

Vir clarissime ac praestantissime

Ad litteras tuas mihi quidem jucundissimas prius respondere nolui, quam sententiam tuam cum illustri ıeside nostro nunc in Gallia degente communicavissem, qui uti tuum praestantissimum ingenium mecum maxme niratur, ita mihi mandavit, ut quantocius te Academiae nostrae commendarem, et in numerum sociorum strorum adscribi curarem. Quod cum summo applausu hodie sit expeditum, consuetum diploma cum his littaccipies. Caeterum ill. praeses noster mihi perscripsit, se post reditum suum apud regem nostrum omnem eram esse adhibiturum, ut tuis meritis dignam stationem obtineat. Cum is tam propenso in te sit animo, ud abs re fore arbitror, si ad ipsum litteras dare volueris, quas ita inscibere poteris: *à M. de Maupertuis, sident de l'académie royale des sciences et belles-lettres de Prusse, à St.-Malo*, quo loco hyemem commorari deəvit. Interim Academia nostra profundissimas tuas meditationes summo cum desiderio expectat, quibus in sterum nostri commentarii exornentur. Vale, Vir clarissime,

faveque ingenii tui sagacissimi admiratori candidissimo

L. Eulero.

Berolini d. 2 Sept. 1756.

4.

Vir clarissime ac praestantissime

Inter tot et tam atroces tumultus bellicos, quibus hic undequaque premimur, tantis curis equidem sum strictus, ut fere omne commercium litterarum negligere sim coactus, ex quo imprimis te, Vir clarissime, iam atque etiam rogo, ut ne mihi meam negligentiam in scribendo vitio vertere velis. Quanquam autem Miscelnea philosophico-mathematica, quorum exemplar mihi benevole destinasti, nondum accepi, nec fortasse tam to expectare possum, tamen non potui, quin tibi pro hoc testimonio amicitiae gratias agam maximas, simulque eam laetitiam et admirationem declarem, quod tam felici successu tam sublimes ac profundissimas investigationes perfeceris. Litterae tuae mihi demum post obitum dignissimi praesidis nostri sunt redditae, quo casu equidem eo gravius sum perculsus, quod optimum fautorem ac suavissimum amicum amisserim: litteras ergo tuas ad illum directas in nostro conventu academico aperiri, maxime optassem, ut ab ipso superstite responsum accipere posses. Nunc quid tibi scribam nescio? Fama est locum praesidis Alembertio cum maximis emolumentis destinari, quo casu an tuum excellentissimum opus huc mitti consultum sit, ipse judicaveris. Quin potius operam da, ut quam primum prelo committatur; hic enim his turbulentis temporibus vix quisquam Bibliopola suam operam esset praestaturus. Genevae putem hujusmodi opus commodissime excudi posse, vel Lausannae, ubi quidem summo otio fruuntur. Lubens cognovi tibi meam solutionem cordae vibrantis probari, quam Alembertus variis cavillationibus infirmare est conatus, idque ob eam solam rationem, quod non ab ipso esset profecta. Minatus est se gravem refutationem esse publicaturum, quod an faceret nescio, putat se per eloquentiam semidoctis fucum esse facturum; dubito an serio rem gerat, nisi forte amore proprio sit penitus occoecatus. Voluit nostris commentariis non demonstrationem, sed nudam declarationem inseri meam solutionem maxime esse vitiosam, ego vero opposui novam demonstrationem omni rigore adornatam, sed praeses noster beatae memoriae noluit ipsi nostram Academiam tanquam palaestram concedere, unde etiam meam confirmationem lubens suppressi. Ex quo judicabis, quantas turbas, si praesidio decoretur, sit aturus, equidem omnia tranquillus expecto, nihil negotii cum illo mixturus.

Analytica tua solutio problematis isoperimetrici continet, ut video, quicquid in hac quaestione desiderari potest, et ego maxime gaudeo, hoc argumentum, quod fere solus post primos conatus quasi post limines tractaveram, a te potissimum ad summum perfectionis fastigium esse avectum. Rei dignitas me excitavit, ut tuis luminibus adjutus, ipse solutionem analyticam conscripserim, quam autem celare statui, donec ipse tuas meditationes publici juris feceris, ne ullam partem gloriae tibi debitae praeripiam.

Quoniam his gravissimis temporibus ab aliis negotiis vacavi, librum de calculo integrali conscribere coepi, quod opus jampridem etiam meditatus, atque adeo Academiae Petropolitanae pollicitus; nunc igitur jam notabilem partem absolvi. Calculum integralem ita definivi, ut esset methodus functiones unius pluriumve variabilium inveniendi ex data differentialium vel primi vel altiorum graduum relatione; unde prout functiones sint vel unius, vel duarum pluriumve variabilium, totum opus in duos libros divisi, ubi quidem pro posteriori vix quicquam est cultum. Eo pertinent scilicet quaestiones de cordis vibrantibus, ubi pro dato tempore t et cordae puncto, cujus situs variabilis, denotetur ejus celeritas et ...... determinari debet: quaeritur enim functio quaedam (r) binarum variabilium t et s ex data relatione formularum $\frac{d^2r}{dt^2}$ et $\frac{d^2r}{ds^2}$, et hujusmodi formulis universa Hydrodynamica innititur. Utilissimum ergo erit hanc partem calculi integralis adhuc fere intactam accuratius evolvi, cujus equidem prima fundamenta jam jecisse videor. Incipiendum autem erat a differentialibus primi gradus, ut functio r binarum variabilium t et s definiatur ex data quacunque relatione inter r et has formulas $\frac{dr}{dt}$ et $\frac{dr}{ds}$ per differentiationem inde derivatas. Ex quo perspicuum est fere omnia, quae adhuc de integrandi methodo sunt prolata, etiamsi binarum variabilium mentio fiat, ad primam tamen partem referri debere, quia altera ut functio alterius tractatur. Alio forte tempore plura de his commemorare continget. Vale ac fave

Berolini de 2 Oct. 1759.

Tibi addictissimo

L. Eulero.

P. S. Privatam adhuc societatem litterarum Taurinensem mox publicam fieri in augmentum scientiarum magnopere opto.

5.

Monsieur,

Ayant reçu l'excellent présent que vous avez eu la bonté de m'envoyer, je l'ai d'abord parcouru avec la plus grande avidité, et je n'ai pu assez admirer l'adresse avec laquelle vous maniez les équations les plus difficiles, pour déterminer le mouvement des cordes et la propagation du son. Je vous suis infiniment obligé d'avoir mis ma solution à l'abri de toute chicane et c'est d'après vos profonds calculs, que tout le monde doit reconnoître à présent l'usage des fonctions irrégulières et discontinues pour la solution de ces sortes de problèmes. En effet, la chose me paroît à présent si claire, qu'il n'y sauroit rester le moindre doute. Supposons qu'il faille chercher une fonction r des deux variables t et x telle, qu'on ait $\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{ds}$, et il est évident que toute fonctions de $t+x$, tant irrégulière que régulière peut être mise pour r: par exemple, ayant tracé a plaisir (Fig. 77) une ligne quelconque AM, si l'on prend l'abcisse $AP=t+x$, l'appliquée PM fournira une valeur pour r, et il en est de même du problème des cordes. A cette occasion j'ai observé, que ma solution n'est pas assez générale; car pour qu'on puisse donner à la corde au commencement une figure quelconque AMB (Fig. 78), ma solution exige que dans cet état, il n'y ait pas de mouvement; mais je puis résoudre à présent le problème lorsqu'on a donné d'abord à la corde non seulement une figure quelconque AMB, mais qu'outre cela on ait imprimé à chaque point M une vitesse quelconque Mm. Je vois que vous avez traité le cas où la corde au commencement est tendue en ligne droite AB, mais je ne sais pas bien si votre solution s'étend aussi au cas où l'on suppose à la corde outre, le mouvement donné, une figure quelconque. Je passe à la propagation du son dont je n'ai jamais pu venir à bout, quelques efforts que j'aie faits pour cela, car ce que j'en ai donné dans ma jeunesse est fondé sur quelque idée illusoire pour mettre d'accord la théorie avec l'expérience sur la vitesse du son. J'ai donc lu votre mémoire sur cette matière avec la plus vive satisfaction, et je ne puis assez admirer votre sagacité en surmontant tous les obstacles. A présent je vois bien qu'on pourrait tirer la même solution de la formule $\frac{d^2r}{dt^2}=\alpha\frac{d^2r}{ds^2}$ en faisant usage des fonctions discontinues; mais alors M. D'Alembert me ferait les mêmes objections que contre le mouvement des cordes. Ce n'est qu'après vos recherches que je pourrai faire valoir cette méthode. J'ai résolu par là le cas où l'on suppose au commencement non seulement un déplacement quelconque a autant de molécules d'air qu'on veut, mais où l'on donne outre cela à chacune un mouvement comme dans les cordes; mais en ne considérant qu'une ligne physique d'air, ou bien un tuyau mince et droit rempli d'air, comme vous l'avez fait. Cette généralisation me paraît d'autant plus utile qu'elle nous découvre plus clairement le mouvement dont toutes les particules d'air sont successivement ébranlées. On peut aussi par là résoudre un doute bien important qui m'a longtemps tourmenté; c'est qu'un ébranlement excité en A (Fig. 79) se répand également des deux côtés du point A. Mais étant parvenu en X, il ne se répand que vers E: on demande donc quelle différence il y a entre un ébranlement primitif en A et un dérivatif en X, pour que celui-là se répande vers D et E et celui-ci uniquement vers E. Ce doute est levé par la solution générale dont nous venons de parler, et qui fait voir que le déplacement primitif des particules en A, avec le mouvement imprimé à chacune pourrait être tel que la propagation ne se fit que dans le sens de E; et on s'apercevra ensuite que cette circonstance a toujours lieu dans les ébranlemens dérivés. Il est bien remarquable que la propagation du son se fait actuellement plus vite que le calcul ne l'indique, et je renonce à présent à la pensée que j'eus autrefois que les ébranlemens suivans pourraient accélérer la propagation des précédens, de sorte que plus un son serait aigu, plus la vitesse serait grande, comme vous l'avez peut être vu dans nos derniers mémoires. Il m'est aussi venu dans l'esprit d'examiner, si la grandeur des ébranlemens n'y pourrait causer quelqu'accélération, puisque dans le calcul on les a supposés infiniment petits: et il est évident que leur grandeur changerait le calcul et le rendrait intraitable. Mais autant que je puis l'entrevoir, il me semble que cette circonstance diminuerait plutôt la vitesse. C'est dommage que ce même problème ne puisse pas être résolu en donnant à l'air trois dimensions ou seulement deux; car on a lieu de douter que la propagation fut alors la même; au moins est il certain que les ébranlemens seraient dans ce cas plus faibles, plus ils s'écarteraient de l'origine. J'ai bien trouvé les formules fondamentales pour le cas où l'étendue de l'air n'a que deux dimensions, ou est contenue entre deux plans. Soit (Fig. 80) Y une particule d'air dans l'état d'équilibre, qui après quelqu'agitation ait été transporté en y; posons $AX = X$, $XY = Y$, $Xx = Yu = x$ et $uy = y$. Cela posé, tant x que y seront certaines fonctions de X, Y et du temps t et partant de trois variables. Je trouve pour leur détermination les deux équations suivantes:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha\frac{d^2x}{dX^2} + \alpha\frac{d^2y}{dXdY} \quad \text{et}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \alpha\frac{d^2y}{dY^2} + \alpha\frac{d^2x}{dXdY}$$

de là, si je suppose que l'ébranlement primitif se passe en A (Fig. 81) et qu'il se répande de là en ondes circulaires, de sorte qu'une de ces ondes ZV, dans l'état d'équilibre, ait été, après l'agitation, transportée en zv; posant $AZ = Z$ et $Zz = z$ la quantité r sera une fonction des deux variables t et z pour la détermination de laquelle je trouve cette équation

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \alpha\frac{d^2r}{dz^2} + \frac{\alpha}{z}\frac{dr}{dz} - \frac{\alpha r}{z^2}.$$

En rejetant les deux derniers termes, il reste la même équation qui convient au cas où l'air est étendu seulement en ligne droite AE. Or par cette équation il ne paraît pas que la propagation se fasse avec la même vitesse dans les deux cas. Il serait donc fort à souhaiter que l'analyse fut portée au point de pouvoir résoudre ces sortes d'équations; et j'espère que cette gloire vous est réservée. Ce que vous dites des échos est aussi important dans l'analyse que dans la physique. Tout le monde doit convenir que ce premier volume de vos travaux est un vrai chef-d'oeuvre et renferme bien plus de profondeur que tant d'autres volumes des académies établies; jamais société particulière n'a mieux mérité d'être soutenue par son souverain.

Quant aux sons de musique, je suis parfaitement de votre avis, Monsieur, que les sons consonnans, que M. Rameau prétend entendre d'une même corde, viennent des autres corps ébranlés: et je ne vois pas pourquoi ce phénomène doit être regardé comme le principe de la musique, plutôt que les proportions véritables qui en sont le fondement. Je crois encore avoir bien déterminé le degré d'agrément avec lequel on entend deux sons donnés, et de là deux sons dans la raison de 8 : 9 s'aperçoivent plus aisément que s'ils étaient dans la raison de 7 : 8. Mais je crois qu'ici il faut avoir égard à un préjugé par lequel on suppose d'avance la proportion des sons, et alors une aberration est insupposable; comme celui qui accorde un violon, si deux cordes se trouvent dans l'intervalle d'une sexte, les juge fausses, parce qu'il prétend que leur intervalle soit une quinte. Ainsi, pour l'intervalle 7 : 8, il sera fort difficile de le prendre tel qu'il est, on s'imaginera toujours qu'il devrait être celui de 8 : 9, celui-ci étant mal accordé: il ne s'agit que de prévenir ce préjugé, pour mettre en usage l'intervalle 7 : 8; mais il faudrait aussi pour cela des règles particulières de composition.

Je viens d'achever le III[e] volume de ma Mécanique qui roule sur le mouvement des corps solides inflexibles, j'y ai découvert des principes tout à fait nouveaux et de la dernière importance. Pour qu'un tel corps tourne librement autour d'un axe, il ne suffit pas que cet axe passe par le centre de gravité (ou plutot par le centre d'inertie du corps), mais il faut, outre cela, que toutes les forces centrifuges se détruisent. Il est bien évident que dans tous les corps, toutes les lignes qui passent par le centre d'inertie n'ont pas cette propriété. Or j'ai démontré que dans tous les corps quelqu'irréguliers qu'il soient, il y a toujours trois lignes perpendiculaires entr'elles qui remplissent ces conditions; je les nomme les trois axes principaux du corps, par rapport aux quels je détermine ensuite les momens d'inertie. Cette considération m'a mis en état de résoudre quantité de problèmes qui auparavant m'avaient paru insolubles, tels que celui-ci: ayant imprimé a un corps quelconque un mouvement quelconque, déterminer la continuation de ce mouvement, en fesant abstraction de toute force qui pourrait agir sur le corps.

J'espère que vous aurez reçu ma dernière lettre; pour celle-ci, je la fais passer par la main d'un ami a Genève, M. Bertrand qui s'est appliqué aux mathématiques avec un très grand succès.

J'ai l'honneur d'être

Monsieur

Votre très humble et très obéissant serviteur

Berlin ce 27 oct. 1759. L. Euler.

6.

Monsieur,

Depuis ma dernière lettre j'ai réussi à ramener au calcul la propagation du son, en supposant à l'air toutes les trois dimensions, quoique je ne doute pas que vous n'y soyez parvenu plus heureusement, je ne crois cependant pouvoir mieux témoigner mon attachement envers votre illustre société qu'en lui présentant mes recherches sur le même sujet.

Recherches sur la propagation des ébranlemens dans un milieu élastique.

Ces recherches commençant par ces mots:

«En considérant le milieu dans l'état d'equilibre, soit etc. et finissant par ceux-ci:

«D'ou l'en peut justement juger de l'affoiblissement du son par de grandes distances.»

Se trouvent imprimées dans le III^e volume des Mélanges de la Société de Turin.

Voilà mes recherches que vous pouvez insérer, Monsieur, dans votre second volume, si vous le jugez a propos. Je les ai abrégées autant qu'il m'a été possible: et si vous y vouliez ajouter vos remarques, ou quelques éclaircissemens, je vous en serai infiniment obligé.

Il y a longtemps que j'ai examiné le son des Cordes qui ne sont pas également épaisses, et je viens de lire à notre académie quelques mémoires sur le son des cloches et des tambours ou tymbales, fondis sur la même théorie, des fonctions discontinues.

Faites bien mes complimens les plus empressés à toute votre illustre société, et soyez assuré que je suis avec le plus parfait attachement

Monsieur

Votre très humble et très obéissant serviteur

Berlin ce 1 Janvier 1760. L Euler.

7.

Monsieur,

Je suis très flatté de l'approbation dont votre illustre académie et vous en particulier avez bien voulu honorer mon essai sur les ébranlemens dans un milieu élastique. L'honneur de ces profondes recherches est uniquement dû a votre sagacité et je n'y ai rien fait que profiter des lumières que votre excellent mémoire m'a fournies. Vous y avez ouvert une carrière toute nouvelle où tous les géomètres qui viendront après nous trouveront abondamment de quoi exercer leur adresse; et, à mesure qu'ils y réussiront, l'analyse en acquerra des développemens très considérables. La matière même est sans doute la plus importante en physique; non seulement tous les phénomènes de la propagation du son en dépendent, mais je suis assuré que la propagation de la lumière suit les mêmes lois on n'a qu'à substituer l'éther au lieu de l'air et les ébranlemens qui y sont répandus, nous donneront la propagation de la lumière. Il serait à souhaiter qu'on put déterminer les altérations que les ébranlemens excités dans un milieu, souffrent, lorsqu'ils passent dans un autre milieu dont la densité et l'élasticité sont différentes. Je ne sais pas si l'on peut espèrer la solution de ce problème mais je suis convaincu qu'on y découvrirait infailliblement, non seulement les véritables lois de la réfraction, mais aussi l'explication la plus complète de la réflexion dont la réfraction est toujours accompagnée. On verrait qu'il est impossible que les rayons passent d'un milieu dans un autre sans qu'une partie rebrousse chemin. Peut être cette considération pourroit-elle faciliter le développement de l'analyse et fournir au moins quelques solutions particulières. Mais on rencontrera ici une nouvelle difficulté: comme il faut estimer tant la densité que l'élasticité des autres milieux transparens, du verre par exemple, la densité étant si grande par rapport à celle de l'éther sans qu'on puisse supposer son élasticité plus grande, que la vitesse des rayons dans le verre deviendrait extrêmement petite; cependant je crois que la réfraction même prouve suffisamment que la vitesse des rayons dans le verre à celle dans l'éther doit être dans le rapport de 2 à 3. Si les pores du verre sont remplis d'un éther pur par lequel se ferait la propagation, il semble que la matière du verre n'y contribuerait pour rien, ce qui est pourtant faux. De là je conclurais volontiers qu'il faut tenir compte des particules du verre même, mais d'une manière tout à fait différente de celle, dont nous concevons la propagation des ébranlemens par l'air où nous supposons les mêmes particules parfaitement liquides. Or il doit y avoir une différence essentielle entre les particules fluides et solides dont le milieu est composé; les impressions ne sont transmises que successivement par les particules fluides, tandis qu'une particule solide étant frappée par un bout, transmet quasi dans un instant le coup à l'autre bout; et je crois là la raison pourquoi les rayons de lumière traversent le verre avec une aussi prodigieuse vitesse, que si la densité était des millions de fois plus petite qu'elle n'est effectivement. Cette pensée me semble conduire à l'explication de cet étrange phénomène que la vitesse du son par l'air est plus grande que le calcul ne nous l'indique. Tous les efforts que vous avez faits pour déterminer la propagation des ébranlemens finis, prouvent incontestablement qu'aucune accélération n'en saurait résulter, comme je l'avais soupçonné: il faut donc que cette accélération actuelle que l'expérience nous découvre dans la propagation du son, provienne d'une autre cause. Ne pourrait-on donc dire, que l'air n'est pas un milieu parfaitement liquide dans les moindres particules, mais qu'il renferme des particules solides ou rigides, qui étant frappées d'un coté communiquent l'impulsion dans un instant à l'autre coté, et que la propagation successive sur la quelle est fondé le calcul, n'a pas lieu dans ces particules solides? Je crois que cette explication pourrait être vérifiée par quantité d'expériences ou le son est transmis par d'autres corps que l'air. Nous savons que le son pénètre par tous les corps, pourvu qu'ils ne soient pas trop épais: on entend parler à travers des murailles, et on ne saurait dire que la communication se fasse par les particules d'air renfermées dans les pores de la muraille; la propagation du son se fait plutôt par la substance de la muraille. Il me semble que tous les corps sont par rapport au son la même chose que les corps transparens par rapport à la lumière; et comme tous les corps s'ils sont assez minces, sont transparens, et que réciproquement, les corps transparens, s'il, sont trop épais perdent leur transparence; il en est de même de tous les corps à l'égard du son; tous, s'ils ne sont pas trop épais, transmettent les sons, les uns pourtant plus aisément que les autres. Je souhaiterais qu'on fit plus d'expériences sur cette matière, et qu'on examinat surtout si le son en traversant un autre corps ne souffre pas quelque réfraction. Je vois bien que la chose serait sujette à de grandes difficultés, puisque nous ne pouvons pas aussi aisément juger de la direction du son que de celle de la lumière.

La question que notre Académie vient de proposer pour l'année 1762 est relative à cette matière. On demande une explication mathématique de la manière dont la représentation du son se fait dans l'organe de l'ouie, explication semblable ou analogue à celle dont on fait usage pour la représentation des objets visibles au fond de l'oeil. Il faut bien que les rayons quasi sonores, qui partent d'un point sonore, soient réunis en un seul point dans la cavité de l'oreille et qu'ils y représentent une espèce d'image ou simulacre, sans quoi il serait impossible que nous distinguassions tant de sons différens. Or une telle réunion de rayons senores, qui sont divergens en entrant dans l'oreille, ne saurait arriver, sans une espèce de réfraction. Voici donc à quoi se réduit notre question. C'est à montrer que les rayons sonores sont assujettis à quelque réfraction sous quelques circonstances. Quelques expériences pourraient nous fournir bien des lumières là-dessus; l'angle d'un bastion, par exemple, pourrait y servir. Si (Fig. 82) quelqu'un en A criait bien fort, un autre en B devrait juger suivant quelle direction il entendrait le son. Or ayant bien développé les circonstances sous lesquelles la direction du son souffre quelque changement, on ne manquera pas de trouver de pareilles circonstances dans la structure de l'oreille. Puissiez-vous vous résoudre, Monsieur, à travailler sur cette question; je doute fort que tout autre que vous soit capable de travailler là dessus.

Quoique la diminution des ébranlemens transmis à de grandes distances suive la raison des distances je crois pourtant que la force du son que nous appercevons soit proportionnelle réciproquement au carré des distances. Chaque particule d'air étant ébranlée, se meut par un certain espace qui détermine son excursion, et tant cet espace que sa plus grande vitesse même qu'elle y acquiert est réciproquement proportionnel à la distance. (Si je ne me trompe, car j'oublie aisément ces sortes de circonstances et je n'ai pas le temps de consulter mes calculs.) Or il me semble que la force avec laquelle une telle particule frappe sur l'organe dépend conjointement et de son excursion et de sa vitesse, ce qui produirait la raison inverse des carrés.

Vous aurez vu sans doute la photométrie de M. Lambert, ou il prouve incontestablement que la force des lumières décroit en raison inverse du carré des distances; mais il parle de la force et non pas de la vitesse ou de l'excursion de chaque particule, et partant je ne trouve aucune contradiction entre ses expériences et nos calculs.

Ce que vous me marquez, Monsieur, sur les ébranlemens de l'air dans un tuyau conoïdal, où vous supposez même l'air hétérogène, est extrêmement profond; et quoiqu'il ne puisse servir à nous éclairer sur la réfraction, vous pourrez connoitre par là pour les cas ou l'équation est résoluble, s'il n'y a pas aussi des ébranlemens répandus en arrière; cela prouverait que dans toutes les réfractions, ou lorsqu'un rayon passe d'un milieu dans un autre, il se fait toujours quelque réflexion.

Pour les formules que vous avez trouvées pour la figure d'un corps qui sur la même surface ait la plus grande solidité, ou p et q doivent être des fonctions de x et y telles, que cette formule $pdx + pdy$ devienne intégrable, j'ai remarqué que l'autre condition se réduit à ce que cette autre formule

$$\frac{pdy - qdx}{r(1 + p^2 + q^2)} - \frac{ydx}{a}$$

soit aussi intégrable; mais cela n'avance de rien. Au reste la solution générale doit être telle que fesant $r = 0$ l'équation entre x et y donne une figure quelconque même décrite au hasard et sans aucune continuité.

J'ai l'honneur d'être avec la plus parfaite considération

Monsieur

Votre très humble et très obéissant serviteur

Berlin ce 24 juin 1760.

L. Euler.

*

8.

Monsieur,

Je dois être infiniment flatté de la distinction toute particulière dont la nouvelle Académie royale des sciences vient de m'honorer, en accordant une place dans ses mémoires à mes faibles recherches sur la propagation du son que j'avais pris la liberté de vous envoyer. Je connois tout le prix de cette distinction et j'en suis plus vivement touché, ce que je vous supplie, Monsieur, de témoigner à l'illustre Académie, et de lui présenter mes très humbles remerciments en l'assurant de ma plus haute vénération et de mon attachement le plus inviolable. Mais je ne sens aussi que trop que c'est uniquement à vous que je suis redevable de cette glorieuse distinction; je vous en suis infiniment obligé de même que des deux exemplaires du premier recueil académique que vous aurez bien voulu m'envoyer. Vous ne douterez pas que je ne l'aie parcouru avec la plus grande avidité et je fus tout à fait surpris de l'excellence et de la richesse des mémoires que ce recueil renferme. Vous en particulier, Monsieur, vous y avez véritablement prodigué vos profondes découvertes; tout autre en aurait en abondamment de quoi fournir à plusieurs Académies et à plusieurs volumes, pendant que vous y avez ramassé en quelques monceaux des sciences entières et accomplies, dont la moindre particule aurait routé à d'autres les plus pénibles recherches. Vous ne craignez pas de vous épuiser pour les volumes suivans puisque vos ressources sont inépuisables; je suis tout stupéfait quand je pense seulement que les volumes suivans ne brilleront pas moins de nouvelles découvertes quoique je ne puisse pas encore comprendre sur quelles matières elles rouleront. Mais je vous avoue franchement que je ne suis quasi qu'ébloui de l'abondance et de la profondeur de vos recherches et bien d'autres souhaiteront avec moi que vous preniez la peine de traiter successivement plus en détail tous les sujets particuliers que vous n'avez fait jusqu'ici qu'envelopper dans la plus grande généralité.

Quelle satisfaction n'aurait pas M. de Maupertius s'il était encore en vie, de voir son principe de la moindre action, porté au plus haut degré de dignité, dont il est susceptible!

Dans vos autres recherches, il s'agit principalement d'une branche tout à fait nouvelle de l'analyse qui mériterait bien d'être développée avec tous les soins possibles. C'est la résolution de cette espèce d'équations

$$\frac{d^2r}{dt^2} = P\frac{d^2r}{dx^2} + Q\frac{dr}{dx} + Rr$$

dont l'intégrale complète renferme par sa propre nature des fonctions indéterminés, et même discontinues, contre les prétentions de M. d'Alembert, qui cependant sera bien embarrassé des réponses solides que vous lui avez faites quoique je doute fort qu'il s'y rende. Avant toute chose il faudrait bien chercher des méthodes plus propres à résoudre ces équations. Il paroit que des transformations convenables peuvent beaucoup y contribuer. En voici un exemple que j'applique au cas le plus simple.

$$\frac{d^2r}{dt^2} = a\frac{d^2r}{dx^2}.$$

Au lieu des variables t et x j'introduirai ces deux autres p et q telles que $p = \alpha x + \beta t$ et $q = \gamma x + \delta t$. Pour cet effet, considérant une fonction quelconque v de t et de x, puisque

$$dv = \frac{dv}{dt}\,dt + \frac{dv}{dx}\,dx$$

et par les nouvelles variables

$$dv = dp\,\frac{dv}{dp} + dq\,\frac{dv}{dq},$$

je substitue pour dp et dq leurs valeurs et j'aurai:

$$dv = \alpha dx \frac{dv}{dp} + \beta dt \frac{dv}{dp} + \gamma dx \frac{dv}{dq} + \delta dt \frac{dv}{dq} = dx \left[\alpha \frac{dv}{dp} + \gamma \frac{dv}{dq}\right] + dt \left[\beta \frac{dv}{dp} + \delta \frac{dv}{dq}\right]$$

d'où il s'ensuit pour les substitutions dont j'ai besoin,

$$\frac{dv}{dt} = \beta \frac{dv}{dp} + \delta \frac{dv}{dq} \quad \text{et} \quad \frac{dv}{dx} = \alpha \frac{dv}{dp} + \gamma \frac{dv}{dq}, \quad \text{donc:}$$

$$\frac{dr}{dt} = \beta \frac{dr}{dp} + \delta \frac{dr}{dq} \quad \text{et} \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \beta^2 \frac{d^2r}{dp^2} + 2\beta\delta \frac{d^2r}{dpdq} + \delta^2 \frac{d^2r}{dq^2}$$

$$\frac{dr}{dx} = \alpha \frac{dr}{dp} + \gamma \frac{dr}{dq} \quad \text{et} \quad \frac{d^2r}{dx^2} = \alpha^2 \frac{d^2r}{dp^2} + 2\alpha\gamma \frac{d^2r}{dpdq} + \gamma^2 \frac{d^2r}{dq^2}.$$

Maintenant je pose:

$$\beta^2 - \alpha^2 a = 0 \quad \text{et} \quad \delta^2 - \gamma^2 a = 0 \quad \text{ou} \quad \beta = \alpha\sqrt{a} \quad \text{et} \quad \delta = -\gamma\sqrt{a}$$

pour avoir cette équation:

$$2(\beta\delta - \alpha\gamma a) \frac{d^2r}{dpdq} = 0 \quad \text{ou bien} \quad \frac{d^2r}{dpdq} = 0.$$

A présent M. d'Alembert ne saurait disconvenir que l'intégration de cette formule en ne prenant que p variable ne donne:

$$\frac{dr}{dq} = \varphi' : q$$

et faisant ensuite varier q

$$r = \varphi : q + \psi : p = \varphi : (x - t\sqrt{a}) + \psi : (x + t\sqrt{a})$$

ou les fonctions sont absolument indéterminées et dépendent entièrement de notre volonté, de sorte que la construction générale puisse se faire par deux courbes décrites à plaisir; l'appliquée de l'une donnant $\varphi : (x - t\sqrt{a})$ pour l'abscisse $x - t\sqrt{a}$ et celle de l'autre $\psi : (x + t\sqrt{a})$ pour l'abscisse $x + t\sqrt{a}$.

Mais si l'on demandait une intégrale complète pareille pour le cas ou a serait une quantité négative $-b$ e ne vois pas comment on pourrait la représenter par des courbes arbitraires, puis pu'on ne saurait y assigner es appliquées qui répondent à des abcisses imaginaires.

La réduction aux arcs de cercle en posant:

$$x = v\cos\varphi \quad \text{et} \quad t\sqrt{b} = v\sin\varphi$$

ui donnerait:

$$r = A + Bv\cos\varphi + Cv^2\cos 2\varphi + \ldots.$$
$$+ 4v\sin\varphi + 6v^2\sin 2\varphi + \ldots.$$

uelque soit le nombre des termes qu'on prenne, ne saurait jamais produire une solution générale en sorte ue posant $t = 0$ il en résulte entre r et x une relation donnée exprimée par quelque courbe décrite à volonté.

Pour le problème des isopérimètres pris dans sa plus grande étendue c'est à vous que nous sommes re-evables de sa plus parfaite solution et je suis bien surpris de voir avec quelle adresse vous l'avez étendu à es surfaces et même à des polygones. Vous conviendrez que ces recherches profondes mériteraient un déve-ppement plus détaillé. Il est facheux que la solution du cas ou l'on demande entre tous les solides de la ême capacité celui, dont la surface est la plus petite, conduise à une équation presqu'absolument intraitable: n voit bien que les surfaces sphériques et cylindriques y sont comprises sans être en état de les en conclure. es corps ont des bizarreries qui ne se trouvent pas dans les surfaces: quoique tous les cotés d'un polygone t même leur ordre soient donnés, la figure est encore susceptible d'une infinité de déterminations; mais dans n polyèdre, dès qu'on connoît toutes les hèdres (faces), avec leur ordre, le corps est entièrement déterminé.

De plus on ne saurait assigner deux courbes différentes qui aient pour toutes les abcisses des arcs égaux; ais on peut toujours trouver une infinité de surfaces différentes ou les élémens $dxdy\sqrt{1+p^2+q^2}$ soient les êmes. Ainsi les surfaces coniques dont l'axe est perpendiculaire à la base, conviennent avec une surface plane; et les corps exprimés par ces équations $ar = xy$ et $2ar = x^2 + y^2$ ont leurs surfaces égales puisque $p^2 + q^2$ est le même de part et d'autre, on trouve même aisément une infinité d'autres surfaces de même nature ou l'on peut introduire des fonctions arbitraires et discontinues. Il est plus difficile de trouver des corps dont la surface convienne à celle de la sphère. Il s'agit de trouver une équation intégrable $dr = pdx + qdy$ telle que l'on ait

$$p^2 + q^2 = \frac{x^2 + y^2}{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Je peux bien définir toutes les fonctions possibles pour p et q mais je n'en peux tirer aucune dont l'équation entre x et r devienne algébrique. C'est encore un sujet qui demande la nouvelle branche de l'analyse qui roule sur les fonctions de deux ou plusieurs variables, étant donné de certains rapports entre leurs différentielles.

A l'égard du problème du mouvement d'un corps attiré vers deux points fixes, en raison inverse du carré des distances, j'ai trouvé moyen de construire la courbe que le corps décrit lors même qu'elle n'est pas dans un même plan, et j'ai observé une infinité de cas ou la courbe devient algébrique, outre ceux de l'ellipse et de l'hyperbole dont les foyers tombent aux deux points fixes.

J'ai l'honneur d'être avec la plus haute considération

Monsieur

Votre très humble et très obéissant serviteur

Berlin le 9 novembre 1762. L. Euler.

9.

Monsieur,

La gracieuse déclaration que vous venez de me faire de la part de la société royale de Turin devait sans doute faire sur mon esprit la plus vive impression; aussi suis-je pénétré de la plus respectueuse reconnoissance: ce que je vous prie de lui temoigner, avec la plus forte assurance, que je saisirai avec le plus grand empressement toutes les occasions ou je serai capable de rendre quelque service à cette illustre société, à laquelle je prend la liberté de présenter les pièces ci-joints, dont deux aussi roulent sur le mouvement des cordes. M. d'Alembert m'a aussi fait quantité d'objections sur ce sujet. Mais je vous avoue qu'elles ne me paroissent pas assez fortes pour renverser notre solution. Le grand génie me parait un peu trop enclin à détruire tout ce qui n'est pas construit par lui-même. Quand la figure initiale de la corde n'est pas telle qu'il prétend qu'elle devrait être, je ne saurais me persuader que son mouvement fût différent de celui que notre solution lui assigne; et si M. d'Alembert soutient que dans ce cas le mouvement ne saurait être compris sous la loi de continuité, je lui accorde très volontiers cette remarque, mais je soutiens à mon tour, que ma solution donne ce mouvement discontinu. Car les équations différentielles à trois ou plusieurs variables ont pour propriété essentielle, que leurs intégrales renferment des fonctions arbitraires qui peuvent aussi bien être discontinues que continues.

Après cette remarque je vous accorde aisément, Monsieur, que, pour que le mouvement de la corde soit conforme à la lois de continuité, il faut que dans la figure initiales les $\frac{d^2y}{dx^2}$ $\frac{d^4y}{dx^4}$ $\frac{d^6y}{dx^6}$ etc. soient $= 0$ aux deux extrémités: mais quoique ces conditions n'aient pas lieu, je crois pouvoir soutenir que notre solution donnera néanmoins le véritable mouvement de la corde, car dans ces cas il y aura bien quelqu'erreur dans la détermination du mouvement des éléments extrêmes de la corde, mais par cette même raison, l'erreur sera infiniment petite et partant nulle.

Je n'ai plus assez présentes à l'esprit toutes les circonstances de ce problème, pour oser prononcer plus hardiment là dessus: mais il me semble qu'on pourrait combattre les opinions les mieux constatées par des objections semblables à celles avec lesquelles M. d'Alembert combat notre solution. Je dirais par exemple que la formule $\int ydx$ ne saurait donner l'aire d'une courbe APM (Fig. 83) à moins qu'on n'ait $\frac{dy}{dx}=0$ au commencement A où $y=0$. Car puisque dans chaque élément de l'aire qui est veritablement $= ydx + \frac{1}{2}dxdy$, on néglige le petit trinangle $\frac{1}{2}dxdy$, cela ne saurait plus être pratiqué au commencement A où $y=0$, et partant le premier membre $ydx=0$, attendu à là le second membre $\frac{1}{2}dxdy$ pourait être infiniment plus grand que le premier à moins qu'on n'eût $\frac{dy}{dx}=0$. Puisque donc, malgré cette objection, la formule $\int ydx$ exprime toujours la véritable aire de la courbe, je crois aussi que notre solution sur les cordes donne toujours le véritable mouvement, quoique le premier et le dernier élément soient assujettis à un grand inconvénient ou même à une contradiction apparente. M. d'Alembert témoigne partout un trop grand empressement à rendre douteux tout ce qui a été soutenu par d'autres, et il ne permettra jamais qu'on fasse des objections semblables contre ses propres recherches.

J'avais déjà reçu le projet de la nouvelle édition des ouvrages de Leibnitz, et je pense que M. Formey aura déjà remarqué à l'éditeur qu'on vient de decouvrir à Hanovre quantité d'ouvrages manuscrits de ce grand homme, dont on a nouvellement publié les remarques sur Locke. Je ne saurais dire autre chose, sur la fameuse controverse touchant le calcul différentiel que ce que j'en ai dit dans la préface de mon calcul différentiel.

Le XIV^{e} volume de nos mémoires est sous presse, de même que mon ouvrage sur la mécanique qni s'imprime à Rostock. J'ai achevé, il y a longtemps, mon ouvrage sur le calcul inégral, mais il n'y a pas d'espérance qu'il soit publié de sitôt, faute de libraires. L'Académie de Russie vient de publier le IX^{e} volume de ses nouveaux commentaires.

J'avais aussi depuis longtemps achevé un traité sur la Dioptrique dont le résultat se trouve dans le XIII^{e} volume de nos mémoires: mais comme on vient de découvrir de nouvelles espèces de verre, qui causent une réfraction beaucoup plus grande que le verre ordinaire, je suis actuellement occupé à refondre mon ouvrage et à l'appliquer à toutes les diverses espèces de verre, parce que par ce moyen, on peut procurer aux instruments dioptriques un beaucoup plus haut degré de perfection. Je suis extrèmement ravi que le rétablissement de la paix me procure l'avantage de recommencer votre correspondance, qui m'a toujours fourni les éclaircissements les plus importants, et je me flatte d'en retirer à l'avenir un profit plus grand encore.

J'ai l'honneur d'être avec la plus parfaite considération,

Monsieur

votre très humble et très obéissant serviteur

L. Euler.

Berlin le 16 février 1765.

10.

Monsieur et très cher Confrère,

Je dois commencer par vous demander mille pardons de ce que j'ai differé si longtemps de répondre à la lettre obligeante dont vous avez-bien voulu m'honorer. Je suis infiniment charmé de ce que notre illustre société a si bien reçu les mémoires que j'avais pris la liberté de vous envoyer, et je suis bien impatient de voir bientôt le troisième volume de vos ouvrages, pour y voir vos profondes recherches sur cette nouvelle partie de l'analyse, dont les premiers principes même ont été inconnus avant que vous en ayez entrepris le développement avec le plus heureux succès: je me flatte que la présente foire de Leipzig me procurera ce présent précieux. Pour justifier mon long silence je dois vous informer, Monsieur, que depuis longtemps je me trouve dans le plus grand embarras, qui m'a presqu'entièrement empêché de m'appliquer à aucune recherche, et j'avais honte de vous écrire une lettre tout à fait vide de recherches Geométriques: et à l'heure qu'il est, je n'en suis pas en état, de grandes raison m'ayant determiné à solliciter ici mon congé pour retourner à Pétersbourg ou m'appelle la vocation la plus avantageuse de l'Impératrice. Vous savez sans doute que l'Académie de Russie est depuis quelques temps fort tombée en decadance; mais maintenant sa Majesté Impériale a résolu de retablir cette Académie dans son ancien lustre et de lui donner même plus d'éclat. Elle y a destiné un fonds de 60,000 Roubles par an. Dans cette vue sa Majesté veut bien m'honorer de sa haute confiance, en m'appelant à diriger et exécuter ce grand dessein, où il s'agit principalement d'engager de grands hommes dans toutes les sciences de venir s'établir à Pétersbourg et d'y travailler conjointement à l'avancement des sciences. Vous comprendrez aisement, Monsieur, que vous avez été le premier que j'ai proposé à sa Majesté Impériale et je m'estimerais infiniment heureux, si je pouvais vous persuader d'accepter cette vocation qui sera toujours pour vous aussi avantageuse qu'honorable. Je sais bien que le grand éloignement et le climat rude vous causera d'abord de l'aversion; mais comme je connais parfaitement cet endroit, y ayant séjourné pendant quatorze ans, et que j'y retourne avec le plus grand empressement, je puis vous assurer que la ville de Pétersbourg renferme à la fois tous les agrements qu'on ne trouve que séparement dans les autres lieux et qu'on y a des moyens de se garantir du froid, de sorte qu'on y est beaucoup moins incommodé que dans les pays plus chauds.

Je vous prie donc, Monsieur, de faire des réflexions sur cette proposition et de m'en marquer votre sentiment au plutôt, avant que je parte d'ici, ce qui pourrait bien encore traîner quelques mois.

J'ai l'honneur d'être avec la plus parfaite considération et le plus inviolable attachement,

Monsieur,

votre très humble et très obéissant serviteur

Berlin le 3 mai 1766. L. Euler.

---

11 *).

A St.-Pétersbourg, ce 9 janvier 1767 st. v.

Monsieur et très cher ami,

J'espère que vous m'excuserez de ce que j'ai manqué de répondre à la lettre dont vous m'aviez honoré, encore de Turin. La grande distraction que mon voyage et mon nouvel établissement m'ont causée en est une raison plus que suffisante. Quelque glorieux qu'il soit pour moi de vous avoir pour successeur à l'Académie de Berlin, j'aurais souhaité que vous eussiez été en état d'écouter les propositions que l'Académie Impériale se proposait de vous faire, et je crois que vous y auriez trouvé beaucoup plus d'avantages et d'agrément. Cependant, je souhaite de tout mon coeur que votre séjour à Berlin soit comblé de toutes sortes de prosperité et qu'il vous mette en état de continuer vos profondes recherches pour l'avancement des sciences. J'attends avec la dernière impatience le troisième volume des Mémoires de l'Académie de Turin et je crains beaucoup qu'il

*) Hae litterae, ut et sequentes e Petropoli datae, scriptae sunt ab iisdem Euleri discipulis, qui ex Adversariis lectori jam cogniti sunt: filio scilicet Joanne Alberto, J. A. Lexellio, W. L. Krafftio et Nicolao Fuss.

ne soit le dernier, tout à cause de votre absence, que parce que M. Cigna est aussi disposé à quitter: je n'ai pas manqué d'en parler à notre Académie, où tout dépend des arrangements qu'on doit encore faire pour la mettre sur un bon pied; et jusque là on n'a pu encore penser qu'à remplir les places, qui étaient actuellement vacantes, dont aucune n'aurait pu convenir à M. Cigna; mais aussitôt qu'on pourra lui donner une plus grande extension, on ne manquera pas de faire attention aux mérites de cet habile homme.

Je suis extrêmement ravi que mon dernier ouvrage sur la Mécanique ait mérité votre approbation, mais je suis fâché de n'avoir pas été en état de vous en présenter un exemplaire; car à peine ai-je trouvé un libraire qui ait voulu se charger de l'imprimer; je fus même obligé de renoncer à un certain nombre d'exemplaire pour les présenter à mes amis; mais le libraire n'avait pas tort, puisqu'il n'en a fait imprimer que cinq cents exemplaires et que suivant toute apparence, il n'en debitera pas cent.

Dès mon arrivée ici, l'Académie Impériale a bien voulu se charger de l'impression de mon ouvrage sur le calcul intégral, qui est déjà avancé assez bien; mais comme il y aura trois volumes *in quarto* il faudra attendre encore plus d'un an, avant que tout soit achevé.

Le troisième volume renferme la nouvelle partie du calcul intégral dont le public sera toujours redevable à votre sagacité, et j'espère que par vos soins, cette partie que je n'ai fait qu'ébaucher, sera bientôt porté à un plus haut point de perfection.

Tant la faiblesse de ma vue que mon emploi actuel, qui m'oblige de passer tous les matins à la Direction de l'Académie, me mettent absolument hors d'état de continuer mes recherches sur cette matière; mais à l'aide de mon fils Albert, je serai toujours en état de profiter des éclaircissements, que vous voudrez bien me communiquer tant sur ce sujet que sur tous les autres auxquels vous vous appliquerez; je vous en supplie même, avec le plus grand empressement, dans la confiance que vous êtes déjà suffisamment convaincu, que personne ne saurait faire plus de cas que moi, de l'importance de vos découvertes. Je vous prie donc, Monsieur, de me conserver toujours votre amitié et votre affection et d'être assuré, que je serai toujours, avec la plus parfaite considération et le plus inviolable attachement,

Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur

L. Euler.

12.

St.-Pétersbourg ce 5 (16) février 1768.

Monsieur,

Votre lettre du 29 décembre de l'année passée m'a été remise à peu près en même temps que j'ai reçu le dernier volume des mémoires de l'Académie de Berlin, dans lequel je me suis d'abord fait lire votre excellent mémoire sur le tautochronisme, parce que cette matière m'a autrefois tenu fort au coeur et que j'ai aussi fait une analyse de la méthode de M. Fontaine, que vous trouverez dans le Tome X de nos Commentaires. Mais votre méthode est beaucoup plus ingénieuse et la lecture m'en a causé un vrai plaisir, quoique l'espérance d'y trouver des tautochrones pour toutes les hypothèses possibles de résistance n'ait pas été entièrement remplie. J'en ai d'abord découvert la source dans la formule $\frac{X}{A}$, à une fonction quelconque de laquelle vous égalez le temps pour un arc indéfini, ou bien à une fonction de dimension nulle des quantités X et A. Mais vous conviendrez aisément, que la supposition d'une telle fonction apporte une très grande limitation à la solution, attendu, qu'on pourrait imaginer une infinité d'autres expressions également propres à représenter le temps, comme $\frac{X'}{A'}$, $\frac{X''}{A''}$, et qu'on pourrait supposer le temps égal à une fonction quelconque de toutes ces formules ensemble, mais l'exécution ménerait à des calculs presque insurmontables. J'ai aussi remarqué déjà dans le II^e volume de ma Mécanique, que les cas, où la resistance serait comme le cube, ou quelque puissance plus haute de la vitesse, ne sauraient être résolus par de telles fonctions de dimension nulle, mais qu'il faut recourir à des fonctions de plusieurs dimensions et je crois y avoir indiqué la véritable route pour arriver à la solution de ces cas, route qui cependant est trop embarrassée, pour que j'ai pu en faire l'application à d'autres cas que celui ou la vitesse est par elle même extremement petite.

J'ai vu aussi que les trois Méthodes de M. d'Alembert, dans le même volume de Mémoires, sont assujetties à la même restriction. Au reste je crois devoir avertir que feu M. Bernoulli n'a trouvé la tautochrone pour la résistance proportionnelle au carré de la vitesse, qu'après que je lui en eus communiqué ma solution: et il n'a jamais dit, qu'il en avait fait le premier la découverte.

Je suis extrêmement ravi, Monsieur, que nos recherches sur le mouvement d'un corps attiré par deux autres, de forces fixes, aient mérité votre attention; mais vous n'en avez vu que ce qui a été inséré dans les mémoires de Berlin et qui regarde principalement les courbes algebriques, que ma solution renferme. J'ai encore composé, sur ce sujet, deux autres mémoires, dont l'un se trouve dans le X^e vol. de nos Commentaires et l'autre dans le XI^e. Dans le dernier j'ai aussi réussi à determiner le mouvement du dit corps, lorsqu'il ne se meut pas dans le même plan et je suis extrêmement curieux d'apprendre à quel égard vous avez donné une plus grande étendue à ce problème. Si vous avez reussi à donner à l'un des deux centres de force un mouvement autour de l'autre, ne fût il que circulaire et uniforme, je le regarderai comme la decouverte la plus importante dans l'astronomie.

L'impression de mon Calcul intégral avance assez passablement, le premier tome est déja achevé et je tacherai de vous l'envoyer au plutôt, peut être accompagné du second: il y aura trois volumes en tout.

Je n'ai reçu qu'un exemplaire du III^e volume, des Mémoires de Turin, et je en ai déja presenté si je ne me trompe, mes très humbles rèmerciements; comme je suis hors d'état de lire et d'ecrire moi-même, je suis d'autant plus curieux de profiter des écrits des autres, et principalement de vos recherches qui sont toujours marquées d'un très grand degré de profondeur. Je vous prie donc de me conserver toujours votre amitié et votre bienveillance et d'être assuré que je ne cesserai jamais d'être avec une très respectueuse considération,

Monsieur,

votre très humble et très obéissant serviteur

L. Euler.

Mes compliments empressés à mon très digne ami M. le professeur Beguelin.

Monsieur Bernoulli aura bien la bonté de faire parvenir l'incluse à son adresse et nous vous prions, Monsieur, de lui présenter nos civilités.

13.

Monsieur et très-cher Confrère,

Je suis extrêmement ravi, que vous avez reçu avec tant de bonté mon ouvrage sur le calcul intégral; j'ai taché d'y ramasser tout ce que j'ai observé de remarquable sur ce sujet. J'espère vous envoyer au plutôt la III[e] partie de cet ouvrage; elles vous appartient presqu'uniquement et je ne doute pas que vous ne la portiez bientôt à un plus haut degré de perfection.

M. Formey m'a envoyé les feuilles du dernier volume des Mémoires de Berlin, qui contiennent les excellentes pièces dont vous me parlez dans votre lettre. Comme je ne suis pas en état de lire moi-même, j'ai prié notre habile M. Lexell de m'en faire la lecture, que j'ai entendu avec la plus grande avidité. J'ai admiré non seulement la profondeur de vos recherches, mais aussi et surtout leur multiplicité, qui aurait fourni à tout autre dequoi remplir une douzaime d'excellens Mémoires différents. Vous savez, Monsieur, que j'ai beaucoup travaillé sur cette espèce d'Analyse, et que j'en connais parfaitement toutes les difficultés, et partant j'ai vû avec la plus grande satisfaction que vous en avez surmonté quelques unes, très heureusement. La méthode que vous employez pour résoudre l'équation $A = pp \pm Bqq$ est d'autant plus ingenieuse qu'elles ne suppose rien qui ne soit fondé que sur l'induction. J'ai été curieux d'appliquer d'abord vos méthodes à des exemples qui ont pour la plupart très bien réussi; mais l'exemple suivant m'a causé quelque embarras; il s'agit de résoudre en nombres entiers cette équation

$$101 = pp - 13qq.$$

Selon votre méthode il faut donc chercher un nombre α plus petit que $\frac{101}{2}$, tel que $\alpha\alpha - 13$ soit divisible par 101, j'ai trouvé $\alpha = 35$ et de là $A' = 12 = p'^2 - 13.q'^2$, pendant que $A = 101$ et $B = 13$; d'où l'on tire $p' = 5$ et $q' = 1$: donc selon votre méthode on trouverait:

$$p = \frac{\alpha p' \mp Bq'}{A'} = \frac{35.5 \mp 13}{12.} \text{ et } q = \frac{\alpha q' \mp p'}{A'} = \frac{35 \mp 5}{12};$$

et partant ces nombres n'étant pas entiers on devrait conclure que ce cas n'est pas possible; cependant on satisfait à cette question en prenant $p = 123$ et $q = 34$, ce qui me faisait croire que votre méthode était insuffisante.

Mais en écrivant ceci, je vois que je n'ai pas assez bien observé les préceptes que vous donnez: car puisque $A' = 12$ est divisible par le carré 4, il faut poser $\frac{12}{4} = 3 = tt - 13uu$ ce qui donne $t = 4$ et $u = 1$, d'où l'on tire $p' = 8$ et $q' = 2$, et alors on aura

$$p = \frac{35.8 \mp 13.2}{12.} = \frac{140 \mp 13}{6.}, \text{ et } q = \frac{35.2 \mp 8}{12.} = \frac{35 \mp 4}{6};$$

or ces formules ne sauraient non plus donner des nombres entiers. Cependant je vois bien qu'on parviendrait à ma solution si on prenait $p' = 47$ et $q' = 13$ parsque $12 = 47^2 - 13.13^2 = 2209 - 2197$, car on tirerait de la:

$$p = \frac{35.47 \mp .13.13.}{12.} \text{ et } q = \frac{35.13 \mp 47}{12.},$$

ou les signes superieures donnent $p = 123$ et $q = 34$. Mais quelle raison nous conduit à supposer

$$p' = 47 \text{ et } q' = 13\,?$$

J'ai aussi fort admiré votre méthode d'employer les nombres irrationnels et même les imaginaires dans cette espèce d'Analyse attachée uniquement aux nombres rationnels. Il y a déjà quelques années que j'ai eu des idées semblables, mais je n'ai encore rien donné là-dessus ni dans nos Commentaires, ni dans les Mémoires de Berlin; cependant j'ai publié ici une algèbre complète en langue russe, j'y ai developpé cette matière fort au long et j'ai fait voir que pour résoudre l'équation

$$xx + nyy = (pp + nqq)^{\lambda},$$

on n'a qu'à résoudre celle-ci

$$x + y\sqrt{-n} = (p + q\sqrt{-n})^{\lambda}.$$

Cet ouvrage s'imprime actuellement aussi en allemand, en deux volumes in 8°, et quand je vous expédierai le III^e volume du calcul intégral j'y ajouterai un exemplaire de cette algèbre, soit en Russe, soit en Allemand.

Mais je n'y ai pas poussé mes recherches au delà des racines quarrées et l'application aux racines cubiques et ulterieures vous a été réservée uniquement. C'est de là que j'ai tiré cette formule très remarquable

$$x^3 + ny^3 + nnz^3 - 3nxyz$$

dont les trois facteurs sont

$$x + y\sqrt[3]{n} + z\sqrt[3]{n^2};$$

d'où l'on voit qu'on peut toujours aisément déterminer les lettres $x.\ y.\ z.$ pour que cette formule devienne un quarré, ou un cube, ou un quarré-quarré, au quelque puissance plus haute. Au reste pour juger si l'équation $A = pp \pm Bqq$ est possible ou non, j'ai trouvé cette règle pour les cas ou A est un nombre premier.

«Otez du nombre A un multiple quelconque de $4B$ et toutes les fois que le reste est un nombre premier «a, l'équation proposée sera possible si celle-ci $a = pp \pm Bqq$ l'est; de plus, si le reste $A - 4nB$ devient un «nombre abb tel, que a soit un nombre premier; ou même l'unité, alors la possibilité ou l'impossibilité de «l'équation $a = pp - Bqq$ déclare la nature de l'équation proposée.»

Ainsi ayant l'équation $109 = pp - 7.qq$, puisque $109 - 4.7 = 81$ où $a = 1$ $b = 9$, je forme cette équation $1 = pp - 7.qq$, qui étant possible, prouve la possibilité de la proposée; et dans l'exemple rapporté ci-dessus, $101 = pp - 13qq$, puisque $101 - 4.13 = 49$ et partant $a = 1$, le jugement se réduit à cette équation $1 = pp - 13qq$, qui est possible sans doute; mais je dois avouer, à ma confusion, que je ne saurais démontrer cette règle; et quand même on en trouverait une démonstration, cela ne servirait en rien à la solution actuelle de l'équation $A = pp - Bqq$.

J'attend avec la plus grande impatience le IV^e volume des Mémoires de Turin, que vous aurez la bonté, Monsieur, de m'envoyer, ne pouvant douter qu'il ne soit rempli de vos très excellentes recherches; je vous en présente d'avance mes remerciments les plus empressés ayant l'honneur d'être avec la plus parfaite consideration,

Monsieur,

Votre très humble serviteur

L. Euler.

à St. Pétersbourg, ce 16 (27) janvier 1770.

Voici, Monsieur, et très honoré Confrère, un théorème de la plus grande importance et un problème très difficile à résoudre.

Theorema. Si formula $mxx + nyy$, casu $x = a$ et $y = b$, prebeat numerum primum α, tum omnes numeri primi in formula $\alpha \pm 4mnp$, quin etiam in hac formula generaliori $\alpha qq \pm 4mnp$ contenti, simul erunt numeri formae $mxx + nyy$.

NB. Demonstratio adhuc desideratur.

Problema. Envenire duos numeros quorum productum, tam summa quam differectia sive auctum sive minutum, fiat quadratum. $xy + x + y = \square$; $xy - x - y = \square$; $xy + x - y = \square$; $xy - x + y = \square$.

Solutio. Quaerantur duo numerorum paria p, q et r, s, ut formulae

$$2pq(pp - qq)(pp + qq) \text{ et } 2rs(rr - ss)(rr + ss)$$

teneant rationem quadrati ad quadratum. Tum enim numerorum quaesitorum

$$\text{alter erit} = \frac{(pp + qq)(rr + ss)}{2pq(rr - ss)}.$$

$$\text{alter vero} = \frac{(pp + qq)(rr + ss)}{2rs(pp - qq)}.$$

Conditio praescripta impletur sumendo $p = 12$, $q = 1$; et $r = 16$, $s = 11$; tum erit enim

$$\frac{2pq(pp - qq)(pp + qq)}{2rs(rr - ss)(rr + ss)} = \frac{1}{36} = \square.$$

Hinc ergo numeri quaesiti erunt $\frac{13\ 29^2}{2^3 \cdot 9^2}$ et $\frac{5 \cdot 29^2}{2^5\ 11^2}$.

Il y a quelques temps, Monsieur, que j'ai trouvé une solution complète du problème suivant:

Il s'agit de trouver trois fonctions x. y. z. des deux variables t et u, telles que posant

$$dx = Pdt + pdu;\ dy = Qdt + qdu:\ dz = Rdt + rdu;$$

on satisfasse aux conditions suivantes

$$\text{I.} \quad P^2 + Q^2 + R^2 = 1,$$

$$\text{II.} \quad p^2 + q^2 + r^2 = 1,$$

$$\text{III.} \quad Pp + Qq + Rr = 0;$$

Or la nature des différentielles demande encore les conditions suivantes:

$$\text{I.} \quad \left(\frac{dP}{du}\right) = \left(\frac{dp}{dt}\right),$$

$$\text{II.} \quad \left(\frac{dQ}{du}\right) = \left(\frac{dq}{dt}\right),$$

$$\text{III.} \quad \left(\frac{dR}{du}\right) = \left(\frac{dr}{dt}\right),$$

Comme une considération tout à fait singulière m'a conduit à la solution de ce problème, que j'aurais d'ailleurs cru impossible; je crois que cette découverte pourra devenir d'une grande importance dans la nouvelle partie du Calcul Intégral dont la géometrie vous est redevable.

L. Euler.

14.

Monsieur et très honoré confrère,

Votre prompte reponse sur les remarques que j'avais eu l'honneur de vous communiquer m'a causé bien du plaisir et je vous en suis infiniment obligé. Je me suis fait lire toutes les opérations que vous avez faites sur la formule $101 = pp - 13qq$, et je suis entierement convaincu de leur solidité; mais étant hors d'état de lire et d'écrire moi même, je dois vous avouer que mon imagination n'a pas été capable de saisir le fondement de toutes les réductions que vous avez été obligé de faire et moins encore de fixer dans mon esprit la signification de toutes les lettres que vous y avez introduites. Il est bien vrai que des recherches semblables ont fait autrefois mes delices et m'ont couté bien du temps; mais maintenant je ne saurais plus en entreprendre que de celles que je suis capable de développer dans ma tête, et souvant je suis obligé de recourir à un ami, pour exécuter les calculs que mon imagination projette.

Pour ce qui regarde le problème de deux nombres dont, le produit augmenté ou diminué de leur somme ou de leur différence produise des quarrés, il m'a été autrefois proposé à Berlin par un Capitaine M. de Happe, qui me dit l'avoir reçu d'un ami de Leipzig, qui s'était longtemps occupé inutilement à en trouver une solution et que lui même y avait épuisé ses forces sans aucun fruit. Il m'a donc demandé, si je croyois ce problème possible ou non. Je lui repondis d'abord que ce problème me paraissait d'une nature singulière et qu'il surpassait même les règles connues de l'Analyse de Diophante; en quoi je ne crois pas m'être trompé. Cependant après quelques essais, j'ai trouvé la solution que j'ai eu l'honneur de vous communiquer; je croyais presque que c'était l'unique qu'on fut en état d'en donner. Mais depuis que j'ai eu l'honneur de vous écrire, ayant encore fixé mes recherches sur ce problème, j'ai découvert une route qui fournit une infinité de solutions. Voici de quelle manière je m'y suis pris.

Posant les deux nombres cherchés A et B, les premiers efforts fournissent d'abord ces formules

$$A = \frac{(pp + ss)(qq + rr)}{4pqrs}, \quad B = \frac{(pp + ss)(qq + rr)}{(pp - ss)(qq - rr)};$$

mais il est nécessaire que cette formule

$$\frac{(pp + ss)(qq + rr)}{2pqrs(pp - ss)(qq - rr)}$$

devienne un quarré, ce qui est sans doute extrêmement difficile et au dessus de la méthode ordinaire de Diophante. Cependant en employant les substitutions suivantes

$$p = mm + (m - n)^2; \quad q = mm + mn - nn = s \text{ et } r = m(m - 2n)$$

cette formule après en avoir oté les facteurs quarrés se réduit à celle-ci

$$\frac{5mm - 6mn + 2nn}{2n(2m + n)}$$

qu'il est aisé de rendre quarrée; car faisant $n = 2m - l$, elle devient

$$\frac{mm - 2ml + 2ll}{(4m - 2l)(4m - l)}$$

dont le numérateur multiplié par le denominateur donne ce produit

$$16m^4 - 44m^3l + 58mmll - 28ml^3 + 4l^4$$

qui doit être un quarré, et dont la résolution est fort aisée.

Quoique cette solution paraisse très particulière, vû qu'au lieu de quatre lettres p, q, r, s, cette formule n'en contient que deux; j'ai pourtant lieu de croire qu'elle renferme toutes les solutions possibles.

Je serais fort curieux, Monsieur, d'apprendre votre sentiment sur les deux théorèmes suivants que je crois vrais sans pouvoir les démontrer.

I. Outre le cercle il n'y a point de courbe algébrique dont chaque arc soit égal à un arc de cercle.

II. Il n'y a pas non plus de courbe algébrique dont chaque arc soit égal à un logarithme.

Vous voyez bien qu'il ne s'agit pas ici des courbes algébriques dont la rectification dépende ou des arcs de cercle ou des logarithmes.

Je reviens au problème, dont je vous ai parlé dans ma lettre précédente, ou il s'agit de déterminer les trois quantités x. y. et z par les deux variables t et u ensorte qu'en posant

$$dx = ldt + \lambda du; \quad dy = mdt + \mu du; \quad dz = ndt + \nu du;$$

les trois conditions suivantes soient remplies, savoir

$$1^{\circ}. \quad ll + mm + nn = 1$$

$$2^{\circ}. \quad \lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = 1$$

$$3^{\circ}. \quad l\lambda + m\mu + n\nu = 0.$$

J'en avais bien trouvé une solution complète, mais par une méthode extrêmement indirecte, et je croyois presque qu'il n'y avait pas de méthode directe qui pût conduire à sa solution. Mais, afin que vous ne pensiez pas que c'est là une spéculation entièrement stérible, j'ai l'honneur de vous dire que le problème suivant m'y a conduit: «Trouver tous les solides dont la surface puisse être développée sur un plan», comme cela à lieu pour tous les corps cylindriques et coniques. Depuis quelques jours je suis tombé sur la solution suivante, qui me parait assez directe;

J'introduis une nouvelle variable ω et j'en cherche trois fonctions p, q et r, telles que

$$1^{\circ}. \quad pp + qq + rr = 1, \text{ et}$$

$$2^{\circ}. \quad dp^2 + dq^2 + dr^2 = d\omega^2,$$

ce qui n'a aucune difficulté; ensuite je fais

$$l = p \sin\omega + \frac{dp}{d\omega}\cos\omega;$$

$$m = q \sin\omega + \frac{dq}{d\omega}\cos\omega;$$

$$n = r \sin\omega + \frac{dr}{d\omega}\cos\omega;$$

$$\lambda = p \cos\omega + \frac{dp}{d\omega}\sin\omega;$$

$$\mu = q \cos\omega + \frac{dq}{d\omega}\sin\omega;$$

$$\nu = r \cos\omega + \frac{dr}{d\omega}\sin\omega;$$

Il est clair que les trois conditions prescrites sont remplies; il ne reste donc que de rendre integrables les trois formules différentielles. Pour cet effet, je remarque que

$$dl = d\omega \cos\omega \left(p + \frac{ddp}{d\omega^2}\right)$$

$$dm = d\omega \cos\omega \left(q + \frac{ddq}{d\omega^2}\right)$$

$$dn = d\omega \cos\omega \left(r + \frac{ddr}{d\omega^2}\right)$$

$$d\lambda = -d\omega \sin\omega \left(p + \frac{ddp}{d\omega^2}\right)$$

$$d\mu = -d\omega \sin\omega \left(q + \frac{ddq}{d\omega^2}\right)$$

$$d\nu = -d\omega \sin\omega \left(r + \frac{ddr}{d\omega^2}\right)$$

de sorte que $\frac{d\lambda}{dl} = \frac{d\mu}{dm} = \frac{d\nu}{dn} = -\operatorname{tang}\omega$. Maintenant transformons les formules proposées ensorte que

$$x = lt + \lambda u - \int(tdl + ud\lambda) = lt + \lambda u - \int(t - u \operatorname{tang}\omega)\, dl;$$
$$y = mt + \mu u - \int(tdm + ud\mu) = mt + \mu u - \int(t - u \operatorname{tang}\omega)\, dm;$$
$$z = nt + \nu u - \int(tdn + ud\nu) = nt + \nu u - \int(t - u \operatorname{tang}\omega)\, dn$$

puisque l, m et n sont des fonctions de la seule variable ω, toutes ces trois formules deviendront intégrables, si l'on égale la formule $t - u \operatorname{tang}\omega$ à une fonction quelconque de ω, que nous désignerons par Ω. De là on tire $t = \Omega + u \operatorname{tang}\omega$; de sorte que le calcul roule maintenant sur les deux variables u et ω, dont les coordonnées x. y. z. deviennent des fonctions.

Permettez moi, Monsieur, que je vous parle d'un problème qui me parait fort cirieux et digne de toute attention. Dans un carré divisé en seize cases, il s'agit d'inscrire dans ces cases, seize nombres tels,

A	B	C	D
E	F	G	H
I	K	L	M
N	O	P	Q

que premièrement les sommes des quarrés de chacune des bandes horizontales, ensuite aussi la somme des quarrés pris par les bandes verticales, soient égales entre elles et outre cela aussi la somme des quarrés par les diagonales; ce qui donne déjà dix conditions à remplir; mais il faut de plus remplir les conditions suivantes.

11°. $AE + BF + CG + DH = 0$, 12°. $AI + BK + CL + DM = 0$; etc.

et ainsi, joignant deux à deux les bandes horizontales; ce qui donne six conditions; enfin il faut aussi remplir celles-ci

17°. $AB + EF + IK + NO = 0$; 18°. $AC + EG + IL + NP = 0$ etc.

en combinant deux à deux les bandes verticales, ce qui donne aussi six conditions; de sorte qu'il faut remplir en tout 22 conditions différentes, tandis qu'on n'a que seize quantités inconnues. Cependant ce problème ne laisse pas d'être infiniment indéterminé et j'ai réussi d'en trouver la solution en général dont j'ajoute ici un exemple particulier.

+ 68	− 29	+ 41	− 37
− 17	+ 31	+ 79	+ 32
+ 59	+ 28	− 23	+ 61
− 11	− 77	+ 8	+ 49

J'ai l'honneur d'être avec la plus parfaite considération,

Monsieur

Votre très humble et très obéissant serviteur

à St. Pétersbourg, ce 9 (20) mars 1770. L. Euler.

(Répondu Lagr.)

P. S.

Lorsque Monsieur le Directeur voudra bien répondre à cette lettre, on le prie de donner sa réponse ou au professeur Formey, ou de l'envoyer sous l'adresse du secrétaire de l'Académie Impériale des Sciences.

15.

Monsieur et très honoré Confrère,

Comme je suis hors d'état d'écrire moi même, et que les occasions de se servir d'une autre main se présentent rarement, vous me pardonnerez, si j'ai différé si long tems à répondre à l'obligeante lettre dont vous m'avez honoré. D'ailleurs depuis environ un an. la théorie de la lune m'a tellement occupé que je n'ai presque pu penser à autre chose. Trois habiles calculateurs ont bien voulu m'assister pendant tout ce tems; quoique nous ayons rencontré mille obstacles, nous les avons surmonté, presque tous, assez heureusement, de sorte que nos travaux sur cette matière se trouvent actuellement déjà sous presse. Jamais recherche n'a demandé autant de calculs pénibles et autant d'adresse dans l'exécution; il s'en faut cependant de beaucoup que cette matière soit entièrement épuisée; nous devons nous contenter, si les tables que nous en avons tirées s'accordent mieux encore avec le ciel que celles de MM. Mayer et Clairaut et si leur usage est beaucoup plus facile.

Malgré ces pénibles recherches, je n'ai pas manqué de profiter de quelques momens pour étudier vos excellens mémoires, qui m'ont été communiqués par M. Formey; et d'abord, ce qui m'a frappé le plus et que je puis pas assez admirer, c'est la beauté et l'étendue infinie de votre théorème général, savoir: lorsque

$$x = t + \varphi(t) + \frac{1}{2}d.\varphi t^2 + \frac{1}{6}dd.\varphi t^3 + \frac{1}{24}d^3\varphi t^4 + \text{etc.}\ldots$$

Si l'on désigne par $\psi(x)$ une fonction quelconque de x et par ψt une fonction semblable de t on aura toujours

$$\psi x = \psi t + \varphi t\ \psi' t + \frac{1}{2}d\ \varphi t^2.\psi' t + \frac{1}{6}dd\ \varphi t^3.\psi' t + \frac{1}{24}d^3.\varphi t^4.\psi' t + \text{etc.}$$

en omettant les divisions par les puissances de dt.

Ce Théorème me paraît déjà de la dernière importance, sans même avoir égard à l'équation $t = x - \varphi x$, dont il fournit la solution et dont vous vous servez avec le plus grand succès, pour résoudre toutes sortes d'équations. J'avais déjà composé, avant mon départ de Berlin, un mémoire sur le même sujet, à l'occasion d'une excellente pièce de M. Lambert insérée dans les actes helvétiques. Cette idée me parut d'abord susceptible d'une beaucoup plus grande étendue, que j'ai taché de développer dans ce mémoire, qui actuellement se trouve imprimé dans le XV^{e} volume des nos mémoires ou commentaires. Mais vous avez, Monsieur, poussé cette recherche beaucoup plus loin, à l'aide de votre admirable théorème. Après y avoir réfléchi tant soit peu, j'ai reconnu que sa vérité est indépendante de la résolution des équations et des rapports qui règnent entre les racines. J'avais formé le dessein d'en chercher une démonstration directe, tirée des premiers principes généraux de l'analyse, mais j'y ai d'abord rencontré de trop grands obstacles.

Notre habile académicien, M. Lexell y a bientôt réussi parfaitement et il en a trouvé une démonstration qui répondait entièrement à mes souhaits. C'est dommage que ce beau théorème soit tellement caché entre vos nombreuses recherches, Monsieur, que peu de monde l'y observera et en remarquera toute l'importance. Pour moi, je le crois de beaucoup préférable à mon théorème général sur l'intégrabilité, que j'avais tiré de la théorie des isopérimètres et que vous avez jugé digne, Monsieur, d'insérer dans les mémoires de Berlin, avec une note touchant M. de Condorcet à cette occasion, j'ai aussi l'honneur de vous marquer que M. Lexell a pareillement donné une très belle démonstration de ce même théorème, que vous lirez dans le XV^{e} volume de nos Commentaires.

Vous avez bien voulu dire à M. Formey, que les extraits des lettres de M. D'Alembert, insérés dans les mémoires de Berlin, ne sont rien moins que ce que porte le titre, mais que ce grand homme vous les avait adressé, Monsieur, exprès pour les publier dans cette forme, quoiqu'à mon avis, elles ne renferment que des observations assez légères. Comme les dernières lettres que j'ai eu l'honneur de vous adresser, Monsieur, contiennent quelques articles qui ont mérité votre approbation, il me semble que vous pourriez également les faire insérer dans vos mémoires sous le titre d'extraits, sans que j'ai besoin de l'y mettre moi même à la tête.

Ne doutant pas que vous n'ayez, Monsieur, poussé encore plus loin vos premières recherches sur le problème de deux nombres dont tant la somme que la différence étant ajoutée ou retranchée du produit de ces mêmes nombres produise des nombres quarrés, je serais fort curieux d'apprendre si vous en avez découvert une solution plus générale que la mienne, à laquelle je suis parvenu par bien des détours.

On expédiera d'ici, avec les premiers vaisseaux, le troisième volume de mon calcul intégral, ainsi que le troisième volume de ma dioptrique, qui traite de la construction la plus parfaite des microscopes. Vous verrez aussi le XIV^{e} volume de nos commentaires, divisé en deux parties dont la dernière est presque uniquement remplie des recherches sur la parallaxe du soleil déduite des observations du dernier passage de vénus sur le disque du soleil, que M. Lexell a bien voulu exécuter d'après les idées que je lui avais communiquées. Ce même académicien a aussi composé un traité à part sur la comète de 1769 qui vient de paraître il y a quelques mois. Vous voyez, Monsieur, que je profite amplement de la belle occasion que M. Lexell me fournit en me prêtant ses yeux et sa main.

J'ai l'honneur d'être avec la plus haute considération,

Monsieur,

votre très humble et très obéissant serviteur

à St. Pétersbourg, ce 20 (31) mai 1771.

L. Euler.

Intercallamus hic epistolam Ill. Lexellii ob arctissimum nexum, quem cum ipsius Euleri litteris habet.

Lettre de **A. J. Lexell.**

Monsieur,

Ayant appui par la lettre que notre illustre M. **Euler** a reçue de vous et qu'il a bien voulu me communiquer, que vous seriez curieux de voir la démonstration que j'ai donnée de votre très élégant théorême, qui se trouve dans le tome XXIV[e] des mémoires de Berlin; et M. **Euler** m'ayant ordonné de vous communiquer en même temps quelques-unes des démonstrations qu'il a trouvées pour ce théorême: je profiterai de cette occasion, pour vous présenter, Monsieur, les hommages que je dois vous offrir, comme à un des plus grands mathématiciens de notre siècle et pour vous témoigner les sentiments d'admiration et de respect que vos sublimes recherches m'ont inspirés.

Avant que de donner les démonstrations dont je viens de parler, je remarquerai que les deux premières sont de M. **Euler** et que la troisième est celle que j'ai trouvée.

Outre ces deux démonstrations M. **Euler** en a encore trouvé quelques autres, mais celles que vous recever ici m'ont paru les plus remarquables.

Démonstration 1.

Puisque

$$t = x - P$$

on aura

$$1 = \frac{dx}{dt} - \frac{dx}{dt}P',$$

donc

$$\frac{dx}{dt}Q' - Q' = \frac{dx}{dt}P'Q' = \frac{dx}{dt}R',$$

Q marquant une fonction quelconque de x. Soient p, q, r, etc. des fonctions de t et P, Q, R des fonctions semblables de x; faison

$$Q = q + A + B + C + D + \text{etc.}$$

où A, B C, D sont des fonctions qui outre q, q', q'', contiennent des fonctions déterminées de t. on aura donc

$$Q' = q' + \left(\frac{dA}{dq}\right) + \left(\frac{dB}{dq}\right) + \left(\frac{dC}{dq}\right) + \text{etc.}$$

car en supposant $Q' = q' + A' + B' + C' + \text{etc.}$, on a

$$\left(\frac{dA}{dq}\right) = A'; \ \frac{dB}{dq} = B'; \ \text{etc.}$$

mais en prenant la différentielle complète de Q, on aura

$$\frac{dx}{dt}Q' = q' + \left(\frac{dA}{dq}\right) + \left(\frac{dB}{dq}\right) + \left(\frac{dC}{dq}\right) + \text{etc.}$$

$$+ \left(\frac{dA}{dt}\right) + \left(\frac{dB}{dt}\right) + \left(\frac{dC}{dt}\right) + \text{etc.}$$

d'où l'on tire

$$\frac{dx}{dt}Q' - Q' = \frac{dx}{dt}R' = \left(\frac{dA}{dt}\right) + \left(\frac{dB}{dt}\right) + \left(\frac{dC}{dt}\right) + \text{etc.}$$

supposons maintenant

$$R = r + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \text{etc.}$$

il s'en suivra que

$$\frac{dx}{dt}R' = r' + \frac{d\mathfrak{A}}{dt} + \frac{d\mathfrak{B}}{dt} + \ldots \text{ etc.}$$

par conséquent

$$r' + \frac{d\mathfrak{A}}{dt} + \frac{d\mathfrak{B}}{dt} + \text{ etc.} = \left(\frac{dA}{dt}\right) + \left(\frac{dB}{dt}\right) + \left(\frac{dC}{dt}\right) + \left(\frac{dD}{dt}\right) + \text{ etc.}$$

En comparant les membres de cette équation, on trouve

$$1^\circ.\ \left(\frac{dA}{dt}\right) = r' = p'q',$$

donc

$$A = pq' \quad \text{et} \quad \mathfrak{A} = pr' = pp'q';$$

$$2^\circ.\ \frac{dB}{dt} = \frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \frac{d.pp'q'}{dt};$$

donc $dB = d..pdp.q'$ et $B = \frac{1}{2}d.ppq'$; donc $\mathfrak{B} = \frac{1}{2}d.ppr' = \frac{1}{2}d.ppp'q' = \frac{1}{1.2.3}d\,d.p^3q'$;

$$3^\circ.\ \left(\frac{dC}{dt}\right) = \frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \frac{1}{1.2.3}d^3.p^3q',$$

donc

$$C = \frac{1}{1.2.3}dd.p^3q' \quad \text{et} \quad \mathfrak{C} = \frac{1}{1.2.3}dd.p^3r' = \frac{1}{1.2.3.4}d^3p^4q'; \text{ etc.}$$

Ainsi on obtiendra

$$Q = q + pq' + \frac{1}{2}d.ppq' + \frac{1}{1.2.3}dd.p^3q' + \frac{1}{1.2.3.4}d^3.p^4q' + \text{ etc.}$$

en omettant tous les dénominateurs affectés de dt.

Je ne sais si j'ai bien saisi le sens et la force de cette démonstration; mais j'avoue qu'elle me parait un peu douteuse.

Démonstration 2.

Supposons

$$\psi x = \psi t + P\psi' t + d.Q\psi' t + dd.R\psi' t + d^3.S\psi' t + \text{ etc.}$$

donc pour le cas $\psi x = x$, $\psi t = t$, et $\psi' t = 1$, on aura

$$x = t + P + dQ + ddR + d^3S + d^4T + \text{ etc.}$$

or, puisque

$$x - t = \varphi(x) \quad \text{et} \quad \varphi(x) = \varphi t + P\varphi' t + dQ\varphi' t + dd.R\varphi' t + d^3S\varphi' t + \text{ etc.};$$

on aura

$$P + dQ + ddR + d^3S + \text{ etc.} = \varphi t + P\varphi' t + d.Q\varphi' t + dd.R\varphi' t + \text{ etc.}$$

donc

$$P = \varphi t,\quad dQ = P\varphi' t;\quad ddR = d.Q\varphi' t;\quad d^3S = dd.R\varphi' t;\ \text{etc.}$$

ou

$$P = \varphi t;\quad Q = \frac{1}{2}\varphi t^2;\quad R = \frac{1}{1.2.3}\varphi t^3;\ \text{etc.}$$

Démonstration 3.

On a, par les principes de l'analyse,

$$\psi t = \psi x - \varphi x.\psi' x + \varphi x^2.\frac{d\psi' x}{1.2dx} - \varphi x^3.\frac{dd\psi' x}{1.2.3dx^2} + \text{ etc.}$$

de même

$$\varphi t\psi' t = \varphi x\psi' x - \varphi x\cdot\frac{d(\varphi x\psi' x)}{dx} + \varphi x^2\frac{dd(\varphi x\psi' x)}{1.2\,dx^2}$$

on aura donc

$$\begin{array}{rclcccccl}
\psi t & = & \psi x - \varphi x\psi' x & + & \varphi x^2\cdot\dfrac{d\psi' x}{1.2dx} & - & \varphi x^3\cdot\dfrac{dd\psi' x}{1.2.3dx^2} & + & \varphi x^4\dfrac{d^3\psi' x}{1.2.3.4\,dx^3} - \text{etc.}\\
+\ \varphi t\psi' t & = & +\ \varphi x\psi' x & - & \varphi x\dfrac{d(\varphi x\psi' x)}{dx} & + & \varphi x^2\dfrac{dd(\varphi x\psi' x)}{1.2dx^2} & - & \varphi x^3\dfrac{d^3(\varphi x\psi' x)}{1.2.3\,dx^3} + \text{etc.}\\
+\ \dfrac{d\varphi t^2\psi' t}{1.2dt} & = & & + & \dfrac{d(\varphi x^2\psi' x)}{1.2dx} & - & \varphi x\dfrac{dd(\varphi x^2\psi' x)}{1.2dx^2} & + & \varphi x^2\cdot\dfrac{d^3(\varphi x^2\psi' x)}{1.2.1.2.\,dx^3} - \text{etc.}\\
+\ \dfrac{dd\ \varphi t^3\psi' t}{1.2.3dt^2} & = & & & & + & \dfrac{dd(\varphi x^3\psi' x)}{1.2.3dx^2} & - & \varphi x\cdot\dfrac{d^3(\varphi x^3\psi' x)}{1.2.3\,dx^3} + \text{etc.}\\
+\ \dfrac{d^3.\ \varphi t^4\psi' t}{1.2.3.4.dt^3} & = & & & & & & + & \dfrac{d^3(\varphi x^4\psi' x)}{1.2.3.4dx^3} - \text{etc.}\\
\text{etc.} & & & & & & & & \text{etc.}
\end{array}$$

Or du côté droit tous les termes placés dans les mêmes lignes verticales s'entredétruisent, parce qu'on a généralement

$$y^m d^{m-1}z - my^{m-1}d^{m-1}yz + \frac{m(m-1)}{1.2}y^{m-2}d^{m-1}y^2z\ \ldots\ldots \pm d^{m-1}y^mz = 0$$

nous aurons par conséquent

$$\psi x = \psi t + \varphi t\psi' t + \frac{1}{1.2}\frac{d\varphi t^2\psi' t}{dt} + \text{etc.}$$

Dans le mémoire que j'ai composé sur ce théorême, j'ai aussi considéré cette équation plus générale $t = x - P$, ou P est une fonction quelconque de x et t; et j'ai trouvé qu'on aura encore

$$\psi x = \psi t + Q\psi' t + \frac{d\ Q\psi' t}{1.2\,dt} + \text{etc.},$$

Q denotant une fonction dans laquelle se change P en y mettant a pour t et t pour x, et en introduisant de nouveau après la différentiation t au lieu de a.

Il n'y a que fort peu de temps que j'ai trouvé des formules assez belles à ce qui me semble, pour les différences finies des fonctions à deux ou plusieurs variables.

Soit z une fonction quelconque de deux variables x et y, et supposons x augmenté de p et y de q de manière qu'on ait $x' = x + p$, et $y' = y + q$; soit de plus z' fonction de x', y' de la même manière que z l'est de x, y; on aura

$$\begin{aligned}
z' = z + p\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{1}{2}pp\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) &+ \frac{1}{1.2.3}p^3\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) + \text{etc.}\\
+ q\left(\frac{dz}{dy}\right) + \frac{2}{2}pq\left(\frac{ddz}{dxdy}\right) &+ \frac{3}{1.2.3}p^2q\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right) + \text{etc.}\\
+ \frac{1}{2}qq\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) &+ \frac{3}{1.2.3}pq^2\left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right) + \text{etc.}\\
&+ \frac{1}{1.2.3}q^3\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right) + \text{etc.}
\end{aligned}$$

si on supposait que z fut une fonction de trois variables x, y, u; il ne serait pas plus difficile de trouver la valeur de z'.

Dans le tome XV^e de nos commentaires, nouvellement imprimé, se trouve, parmi d'autres pièces de M. Euler la solution qu'il a donné de ce problème curieux: trouver deux nombres x et y tels que $xy \pm (x+y) = \square$ et $xy \pm (x-y) = \square$ il a aussi inséré dans le même tome une dissertation que j'avais donnée sur les caractères d'intégrabilité, dont le principal objet est de démontrer le beau théorème de Mr. Euler. Quoique la démonstration que j'en ai donnée, me sembloit fort exacte, lorsque j'étais occupé à écrire cette pièce, j'ai pourtant reconnu qu'elle n'est pas tout à fait concluante; c'est pourquoi je lui en ai substitué une autre, dans un mémoire qui sera imprimé comme une suite du précédent dans le tome XVI. Ayant appris que Mr. de Condorcet a déjà traité le même sujet, je dois craindre que mes petites recherches n'en deviennent tout à fait superflues. Je serais fort curieux de savoir, de quelle manière M. de Condorcet a demontré ce théorème, s'il a employé les principes du calcul des variations, comme l'avait fait M. Euler, ou s'il a déduit les démonstrations des principes du calcul différentiel.

Je souhaiterais aussi d'apprendre s'il a considéré les caractères d'intégrabilité pour les formules intégrales doubles ou triples telles que $\iint v dx\, dy$ ou $\iiint v dx\, dy\, dz$. Si vous vouliez bien, Monsieur, me faire la grace de m'en instruire, ~~comme aussi de me faire connaître votre sentiment sur les petites productions dont je viens~~ de parler, je la regarderai comme un honneur des plus singuliers qui me soient arrivés de ma vie.

Quoique la santé de Mr. Euler se retablisse de jour en jour, il n'a pas encore pu avoir l'honneur de vous écrire; il m'a recommandé seulement de vous témoigner qu'il est extrêmement sensible aux sentimens d'amitié et d'affection que vous venez, Monsieur, de lui témoigner dans votre dernière lettre.

Je finis en vous assurant des sentimens de respect et d'attachement, avec lesquels j'ai l'honneur d'être

Monsieur

Votre très humble et très obéissant serviteur

St. Pétersbourg, ce 5 mars 1772. A. J. Lexell.

P. S.

Voici encore un problème analytique, fort curieux, de M. Euler, qu'il a trouvé en traitant des corps solides dont les surfaces peuvent être deployés sur des plans:

«Trouver six quantités l, m, n, λ, μ, ν telles que les formules

$$ldx + \lambda dy\,,\ mdx + \mu dy\,,\ ndx + \nu dy$$

«soient intégrables et qu'on ait

$$ll + mm + nn = 1\,,\quad \lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu = 1\,,\quad l\lambda + m\mu + n\nu = 0.»$$

J'en ai trouvé cette solution sur une surface sphérique, soit décrite (Fig. 84) une ligne courbe quelconque MO, soit POQ un grand cercle qui touche MO en O, faisons $PO = MO$ et $PO \pm QO = 90^0$. Soient de plus trois points A, B, C, tellement situés que les arc AB, AC, BC soient égaux chacun à 90^0; joignons AP, BP, CP; AQ, BQ, CQ. A présent nommant ω l'arc MO, soit s une quantité variable indépendante de ω, il faudra faire

$$x = \varphi\omega + s \sin\omega \quad \text{et} \quad y = \psi\omega + s\cos\omega$$

$\varphi\omega$ et $\psi\omega$ sont des fonctions quelconques de ω; et les quantités λ, μ, ν seront égales aux cosinus des arcs AP, BP, CP. de même que l, m, n le seront aux cosinus des arcs AQ, BQ, CQ.

16.

St. Pétersbourg, ce 24 7bre (5 8bre) 1773.

Monsieur et très honoré confrère,

Ayant enfin reçu la traduction françoise de mon algèbre, j'ai l'honneur de vous témoigner ma très parfaite reconnaissance de la peine que vous vous êtes donnée d'y ajouter vos très profondes recherches sur l'analyse indéterminée; et je vous prie de vouloir bien présenter tant à M. Bernoulli qu'aux libraires mais très humbles remercimens.

J'ai lu avec la plus grande satisfaction les excellens mémoires dont vous venez d'enrichir le recueil de l'académie royale de Berlin. Les belles démonstrations que vous y donner du théorême de M. Waring m'ont causé un très grand plaisir; j'en ai aussi trouvé une démonstration fondée sur des principes tout à fait différens.

Soit $2p+1$ le nombre premier dont il s'agit, il est certain qu'il y a toujours une infinité de nombres a, tels que les puissances 1, a, a^2, a^3 ...... jusqu'à a^{2p-1}, étant divisées par $2p-1$, produisent des restes tous différens entre eux, de sorte que a^{2p} soit la première puissance après l'unité qui reproduise le reste 1; d'où il s'ensuit que la puissance a^p donne -1 pour reste; puisque tous les restes mentionnés sont inégaux entre eux leur nombre étant $2p$, tous les nombres $1, 2, 3, 4 \ldots. 2p$ y seront compris. Soit maintenant M le produit de tous ces nombres $1, 2, 3, 4 \ldots 2p$, il est clair que ce produit M étant divisé par $2p+1$ laissera le même reste que le produit de toutes les puissances ci-dessus; or ce produit est évidemment $a^{p(2p-1)}$, que je représente par cet autre $a^{2p(p-1)}a^p$, dont le premier facteur $a^{2p(p-1)}$ étant une puissance de a^{2p} laissera l'unité pour reste; mais l'autre facteur a^p donnera le reste -1; d'où il est clair que le reste qui provient de cette puissance entière sera $=-1$; de sorte que le produit M doit aussi donner le même reste. De là il s'ensuit que la formule $M+1$ sera divisible par le nombre proposé $2p+1$.

Or pour ce qui regarde le nombre a; il faut qu'il soit tel, que la formule $xx-a$ ne puisse jamais devenir divisible par le nombre premier $2p+1$; ainsi, par rapport à chaque nombre premier, tous les nombres se partagent en deux classes, la première renferme ceux, que je nommerai b, d'où la formule $xx-b$ peut devenir divisible par $2p+1$; l'autre classe comprend les nombres a dont je viens de parler. Pour trouver dans chaque cas ces deux classes de nombres indiquées par les lettres a et b, j'ai trouvé par hazard une règle très facile, qui mérite d'autant plus d'attention, que je ne suis pas en état d'en donner une démonstration rigoureuse.

Pour cet effet, il faut diviser les nombres premiers en deux classes, l'une de la forme $4n-1$, l'autre de la forme $4n+1$. Soit donc premièrement le nombre premier proposé de la forme $4n-1$, j'en forme une progression contenue dans ce terme général, laquelle sera par conséquent

$$n,\quad n+2,\quad n+6,\quad n+12,\quad n+20,\quad n+30,\quad n+42,\quad n+56,\quad n+72,\quad \text{etc.}$$

et je puis démontrer que tous les termes de cette série sont compris dans la classe des nombres marqués par b, de sorte qu'une formule $xx-b$ puisse devenir divisible par $4n-1$; ou bien tous ces nombres sont tels que la formule $b^{2n-1}-1$ soit toujours divisible par $4n-1$ ou un de ses multiples. Mais pour ce que je ne puis pas encore démontrer, c'est que non seulement tous les termes de cette progression, mais encore tous les diviseurs de chacun, appartiennent à la classe des nombres b; et en effet on observera toujours, que si d est diviseur de quelqu'un de ces termes, on rencontrera dans la même progression un terme de la forme dkk qui est équivalent du nombre d.

Soit, par exemple, le nombre premier proposé $4n-1=71$; partant $n=18=2.3^2$ et la progression sera

$$18,\ 20,\ 24,\ 30,\ 38,\ 48,\ 60,\ 74,\ 90,\ 108,\ \text{etc.}$$

l'on voit d'abord que les nombres de la classe b sont

$$2,\ 3,\ 5,\ 19,\ 37,\ 87.$$

Pour le nombre 2, la chose est claire, puisqu'il se trouve déjà dans le premier terme, multiplié par le carré 9, et le nombre 3 se trouve multiplié par le carré 16 dans le terme 48; ensuite le second terme 20 renferme le nombre 5 multiplié par le quarré 4.

Pour les nombres premiers de la forme $4n+1$, je forme d'abord la progression au moyen de cette formule $n-x-xx$; cette progression sera

$$n,\ n-2,\ n-6,\ n-12,\ n-20,\ n-30,\ n-42,\ n-56,\ n-72,\ \text{etc.}$$

et lorsque ces termes deviennent négatifs, on n'a qu'à les traiter comme positifs, puisque si b est un tel nombre, non seulement la formule $xx-b$ mais aussi celle $xx+b$, pourra devenir divisible par $4n+1$. Ici la même propriété a lieu, non seulement tous les termes de cette progression mais encore tout leurs diviseurs fournissent des nombres de la classe b, et tous les nombres qui ne s'y trouvent pas sont ceux qui constituent la classe a. Ainsi prenant, par exemple, $4n+1=89$, ou bien $n=22$, la progression sera

$$22,\ 20,\ 16,\ 10,\ 2,\ 8,\ 20,\ 34,\ 50,\ 68,\ 88,\ 110,\ 134,\ 160,\ \text{etc.}$$

d'ou l'on voit d'abord que la classe des nombres b contient

$$2,\ 11,\ 17,\ 67,\ \text{etc.}$$

Le nombre 2 se trouve lui même dans la série. Pour le nombre 11 en prenant $x=33$, le terme de la progression sera $1100=11.10^2$. Mais il est très remarquable que cette belle propriété n'a lieu que lorsque le nombre $4n-1$ ou $4n+1$ est premier; car prenant, par exemple, $4n-1=35$, où $n=9$, la progression sera

$$9,\ 11,\ 15,\ 21,\ 29,\ 39,\ 51,\ 65,\ 81,\ 99,\ 119,\ 141,\ 165,\ \text{etc.};$$

ici quoique 3 divise plusieurs de ces termes, il ne s'en trouvera cependant aucun qui ait la forme $3KK$, il en est de même des nombres 5, 7 et d'autres qui sont multipliés par 3. Je suis persuadé que la considération de ces circonstances pourra conduire à des découvertes très importantes.

Vous aurez vû, Monsieur, dans mon algèbre, que le problème de trouver 4 nombres dont les produits 2 à 2, en y ajoutant l'unité, deviennent des nombres quarrés, m'a fort embarrassé, je n'ai même pû assigner en général des nombres satisfaisans, quoique je me sois presque souvenu que ce problème a été résolu par Ozanam; mais l'occasion de faire des recherches là-dessus m'a manqué. Depuis, j'ai trouvé cette solution assez générale.

Prenant à volonté deux nombres m et n, tels que $mn+1=ll$, les quatres nombres cherchés seront

$$I.\ m,\quad II.\ n,\quad III.\ m+n+2l,\quad IV.\ 4l\,(l+m)\,(l+n),$$

où le nombre l peut être pris négatif ou positif. Peut être cette solution se trouve-t-elle dans l'algèbre d'Ozanam.

Mais je n'aurais jamais cru que l'analyse fut suffisante pour étendre cette question à 5 nombres, et je fus très agréablement surpris ces jours-ci, lorsque je rencontrai les cinq nombres suivans

$$A=1,\quad B=3,\quad C=8,\quad D=120\quad \text{et}\quad E=\frac{777480}{(2879)^2}$$

qui satisfont aux dix conditions prescrites, de la manière suivante:

$$I.\ AB + 1 = 2^2,\quad II.\ AC + 1 = 3^2,\quad III.\ AD + I = 11^2,\quad IV.\ BC + 1 = 5^2,$$
$$V.\ BD + 1 = 19^2,\quad VI.\ CD + 1 = 31^2,\quad VII.\ AE + 1 = \left(\frac{3011}{2879}\right)^2,$$
$$VIII.\ BE + 1 = \left(\frac{3259}{2879}\right)^2,\quad IX.\ CE + 1 = \left(\frac{3809}{2879}\right)^2,\quad X.\ DE + 1 = \left(\frac{10079}{2879}\right)^2.$$

et de là je suis parvenu à donner une solution assez générale, mais par une méthode très indirecte que je ne saurais expliquer clairement. Car, ayant établi par les formules données les quatre premiers nombres A, B, C, D, je fais

$$A + B + C + D = p,\quad AB + AC + AD + BC + BD + CD = q,$$
$$ABC + ABD + ACD + BCD = r,\qquad ABCD = s,$$

et alors le cinquième nombre sera

$$E = \frac{4r + 2p\,(s+1)}{(s-1)^2}.$$

Voici une propriété fort remarquable de ces nombres; on aura toujours $1 + q + s = \frac{1}{4}\,pp$. Cette matière parait bien digne d'être mise dans tout son jour, mais je m'y sens incapable.

La résolution de la formule $axx + 1 = yy$ m'a causé autrefois bien de la peine par rapport au nombre a qui demande de très grands nombres pour x et y, comme 61 et 109; mais je viens de trouver un théorème qui conduit d'abord à la solution de ces cas et d'autres semblables.

Connaissant pour le nombre a, les valeurs de r et de s telles que $arr - 4 = ss$, que l'on prenne $p = rs$ et $q = ss + 2$, ensuite $x = \frac{1}{2}\,p^2\,(q^2 - 1)$ et $y = \frac{1}{2}\,q\,(q^2 - 3)$ et l'on aura certainement $axx + 1 = yy$; où il faut remarquer, que puisque r est par sa nature un nombre impair, les deux expressions de x et y donneront des nombres entiers. Ainsi pour le cas de $a = 61$ on aura d'abord $r = 5$, $s = 39$, et de là on tire les grands nombres x et y rapportés dans ma table. M. Lexell et moi venons de remettre à M. le chevalier Triquet quelques mémoires pour les actes de l'académie royale de Turin; il m'a assuré avant son départ que vous y serez incessamment rappellé et que le roi regnant veut remettre son Académie dans son premier état florissant Dans ce cas l'académie de Berlin serait bien à plaindre.

Vous voyez, Monsieur, que je vous ai découvert mon coeur tout entier; et je vous prie de me continuer l'honneur de votre amitié, en vous assurant que je serai toujours avec le plus inviolable attachement,

Monsieur,

votre très humble et très obéissant serviteur

Leonard Euler.

17.

Domino celeberrimo de la Grange,

S. P. D.

Leonardus Euler.

Sequens theorema attentione Geometrarum haud indignum, et Analysin prorsus singularem postulare videtur

Theorema demonstrandum.

Si formula differentialis $\frac{(x-1)\,dx}{\log x}$ ita integretur, ut facto $x = 0$ integrale evanescat, tum vero statuatur $x = 1$, ejus valor aequalis est logarithmo binarii, ubi quidem logarithmi hyperbolici sunt intelligendi.

(Reçu le 26 janvier 1775; répondu le 10 février.)

18.

A St. Pétersbourg, ce 23 mars 1775.

Monsieur et très honoré confrère,

Il est bien glorieux pour moi d'avoir pour successeur à Berlin le plus sublime géomètre de ce siècle, et il est certain que je n'aurais pu rendre à l'académie un plus grand service qu'en prenant mon congé; et à cet égard je puis me vanter d'avoir une grande supériorité sur vous, vû que vous ne lui sauriez jamais rendre un tel service.

J'ai parcouru avec la plus grande avidité les excellens mémoires dont vous avez enrichi les derniers volumes de Berlin et de Turin; je n'ai pu assez admirer l'adresse et la facilité avec laquelle vous y traitez tant d'objets épineux qui m'ont coûté bien de la peine. Tel est le mouvement d'un corps attiré vers deux points fixes; et surtout l'intégration de cette équation différentielle

$$\frac{m dx}{\sqrt{(A + Bx + Cxx + Dx^3 + Ex^4)}} = \frac{n dy}{\sqrt{(A + By + Cyy + Dy^3 + Ey^4)}}.$$

toutes les fois, que les deux nombres m et n sont rationnels.

Cette recherche renferme encore une autre branche, lorsqu'on y ajoute des numérateurs semblables, où il s'agit de trouver un rapport entre les variables x et y tel, que la somme ou la différence de deux formules pareilles devienne algébrique.

J'en ai tiré autrefois la solution de cette question: Le quart d'une ellipse ABC (Fig. 85) étant donné, y trouver deux points P et Q tels, que l'arc PQ soit précisement la moitié de l'arc AB. Cette matière me parait avoir beaucoup encore *in recessu*.

Ce que vous me marquez, Monsieur, à l'occasion du petit théorème $\int \frac{(x-1)\,dx}{\log x} = \log 2$ en prenant $x = 1$, m'a beaucoup rejoui, et j'ai vu avec la plus grande satisfaction, que vous avez d'abord pénétré tout le mystère, et que vous avez poussé toutes ces recherches beaucoup plus loin que je ne l'avais fait dans quelques mémoires composés sur ce sujet. J'ai été frappé surtout de cet excellent théorème

$$\int \frac{(x^n - x^m)dx}{(1 + x^r)\,\log x} = \log\left(\frac{\operatorname{tang} \frac{(n+1)\pi}{2r}}{\operatorname{tang} \frac{(m+1)\pi}{2r}}\right)$$

en prenant l'intégrale depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$; de la vérité du quel je me suis d'abord convaincu par des séries infinies, qui m'ont fait connaître, que cette intégrale $\int \frac{x^n dx}{(1 + x^r)\,\log x}$ depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$, est toujours égale à $\log. \operatorname{tang} \frac{(n+1)\pi}{2r}$, après avoir trouvé que $\int \frac{dz}{(1 + zz)\,\log z}$ depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \infty$ est toujours égale à 0. Comme vous aurez tiré sans doute, ce beau théorème de celui-ci que $\int \frac{x^{n-1}dx}{1 + x^r}$, depuis $x = 0$, jusqu'à $x = \infty$ est égal à $\frac{\pi}{r \sin \frac{n\pi}{r}}$ je suis curieux d'apprendre où s'en trouve la démonstration; car quoi qu'il me soit connu depuis plus de quarante ans, je n'en ai pu néanmoins trouver une démonstration formelle que depuis peu de temps, et je ne l'ai pas encore publiée j'attends avec beaucoup d'impatience, de voir les profondes recherches que vous aurez communiquées sur ce sujet à l'académie royale de Berlin.

Le paradoxe dont vous me parlez, mérite sans doute toute l'attention des géomètres: il consiste en ce que la différence entre ces deux formules intégrales $\int \frac{dy}{\log y}$ et $\int \frac{dz}{\log z}$, comprises entre les mêmes limites 0 et 1 soit égale à $\log \frac{n+1}{m+1}$; le dénouement de ce paradoxe se trouve sans doute, en ce que l'une et l'autre intégrale devient infiniment grande, où leur égalité n'empêche pas que leur différence soit indéterminée; comme cela arrive dans ces formules plus simples $\int \frac{dy}{y}$ et $\int \frac{dz}{z}$ prises depuis 0 jusqu'à l'infini, où la différence peut devenir égale à une quantité quelconque; aussi en prenant $y = az$ on aura sans doute $\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dz}{z} = \log a$.

Je suis tombé ces jours ci sur un problème de mécanique, qui m'a beaucoup tourmenté, quoiqu'il paraisse fort simple au premier coup d'oeil. Il s'agit de trouver le mouvement avec lequel une barre descend en glissant sur un axe cylindrique, comme (Fig. 85) le représente. L'analyse m'a d'abord conduit à deux équations différentio-différentielles, assez semblables à celles qui expriment le mouvement d'un corps attiré vers deux points fixes; mais jusqu'ici je n'en ai pu tirer qu'une seule équation intégrale, en négligeant même le frottement: et si l'on en voulait tenir compte, je ne vois d'autre ressource que de suivre le mouvement de la barre quasi pas à pas; et c'est sur ce pied que j'ai developpé un cas déterminé.

En parcourant le dernier volume des mémoires de Berlin, je ne fus pas peu surpris, qu'il puisse encore être question d'un satellite de Venus, et même d'un tel, qui renverserait tous les principes de l'astronomie; je n'aurais pas crû non plus que le principe de la raison suffisante osât encore paraître sur le théâtre.

Je suis entièrement convaincu, qu'à moins que vous réussissiez à retrouver les démonstrations perdues de Fermat, elles resteront perdues à jamais. Tous mes soins à cet égard ont été inutiles jusqu'ici, sans en exclure ceux que j'ai pris pour prouver, que cette égalité $x^n \pm y^n = z^n$ est toujours impossible, à moins que l'exposant n ne soit au-dessous de 2. Nous avions cru autrefois que cette impossibilité s'étendait plus loin à ces formules:

$$a^3 \pm b^3 = z^3;$$

$$a^4 \pm b^4 \mp c^4 = z^4;$$

$$a^5 \pm b^5 \pm c^5 \pm d^5 = z^5;$$

etc.

Mais il n'y a pas long-temps que j'ai été convaincu que la seconde n'est pas impossible; car j'ai trouvé quatre nombres a, b, c, d, tels, que $a^4 + b^4 = c^4 + d^4$.

Vous recevrez en peu de temps le XVIIIème volume de nos commentaires; la première partie du tome XIXème est déjà imprimée. J'y ai donné une idée pour étendre la table des nombres premiers jusqu'au delà d'un million, et j'ai même donné tous les nombres premiers entre 1000000 et 1002000; un tel ouvrage demanderait un volume in 4°, de la même épaisseur que nos commentaires.

Je finis, Monsieur, ayant l'honneur d'être avec les sentiments du plus parfait dévouement,

Monsieur et très-honoré confrère,

Votre très humble et très obéissant serviteur

L. Euler.

P. S.

Permettez-moi, Monsieur, d'ajouter encore deux théorèmes qui me paraissent vrais, quoique je n'en ai pu trouver encore la démonstration.

Théorème 1.

Il n'y a point de courbe algébrique dont un arc quelconque soit égal au logarithmique d'une fonction quelconque.

Théorème 2.

Hormis le cercle, il n'y a point de courbe algébrique dont un arc quelconque soit égal à un arc de cercle.

FINIS TOMI PRIORIS.

Fig. 76.
Pag. 556.

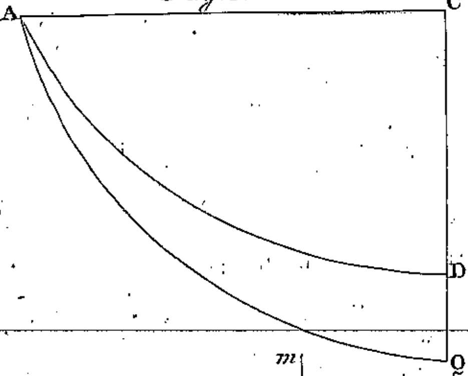

Fig. 77.
Pag. 559.

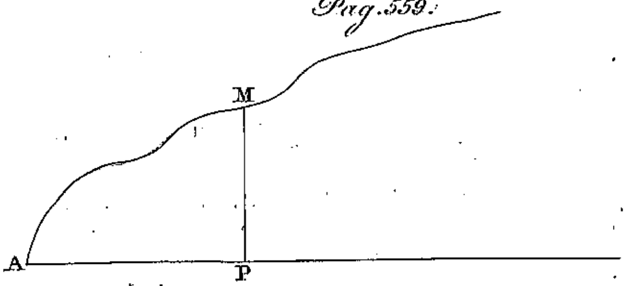

Fig. 78.
Pag. 559.

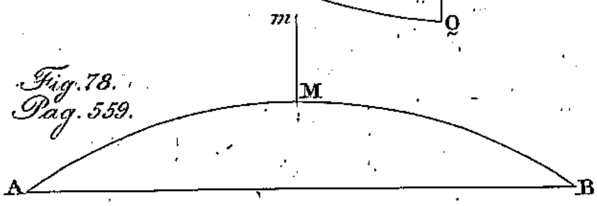

Fig. 79.
Pag. 559.

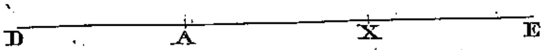

Fig. 80.
Pag. 560.

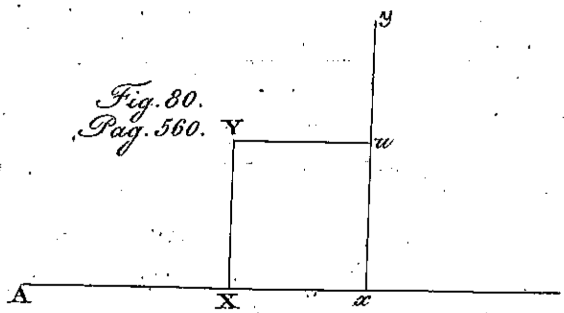

Fig. 81.
Pag. 560.

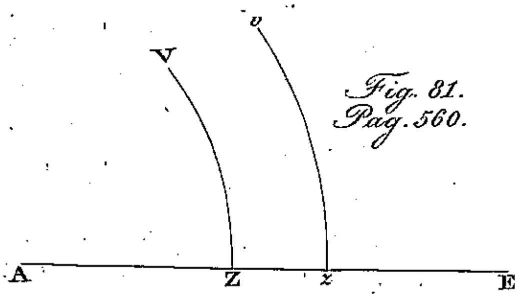

Fig. 82.
Pag. 563.

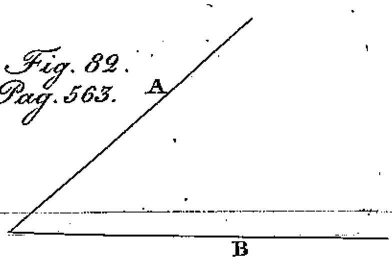

Fig. 83.
Pag. 567.

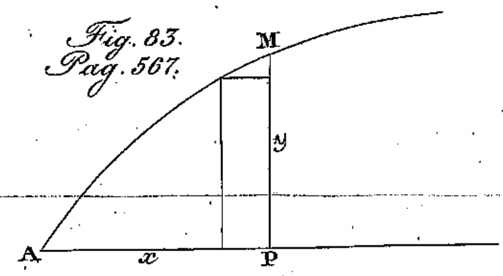

Fig. 84.
Pag. 582.

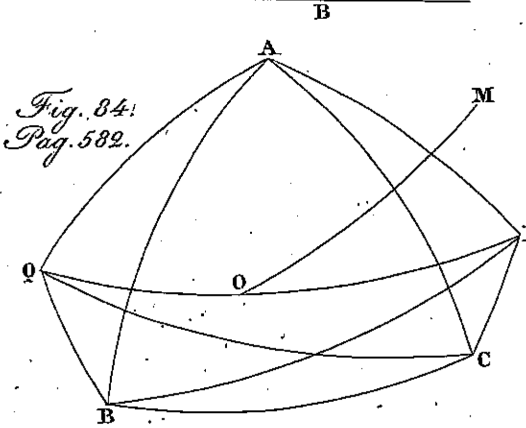

Fig. 85.
Pag. 586.

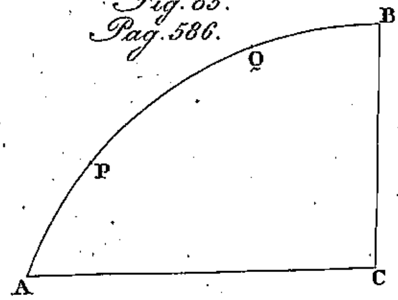

Fig. 86.
Pag. 587.