1862

# Sex litterae ad Nicolaum Bernoullium II, Basileensem J. U. D. datae 1742 ad 1745

Leonhard Euler

# XXIV.

## Supplementum editi A. MDCCCXLIII Commercii epistolici

(Correspondance mathém. et phys. St.-Pétersb. 1843. 8°. T. I. II),

varias ipsius Ill. Euleri litteras, postea detectas, ac hucusque ineditas, continens.

---

### A. Sex litterae ad Nicolaum Bernoullium II, Basileensem, J. U. D.*) datae 1742 ad 1745.

#### 1.

Viro Consultissimo atque Amplissimo Nicolao Bernoulli S. P. D. Leonhardus Euler.

Cum acutissimum ingenium Tuum semper plurimum sum veneratus, tum me Tibi, Vir Celeberrime, maxime obligatum agnosco, quod non solum olim insigni me benevolentia sis complexus, sed etiam mea qualiacunque inventa mathematica digna judicaveris, quae examini Tuo exquisitissimo subjiceres. Ne igitur graveris gratiarum actionem debitam, etsi sero, tamen ex animo officii plenissimo profectam benevole accipere, vehementer etiam atque etiam rogo. Ad hoc peropportunam occasionem mihi praebuit Vir Clarissimus Hagnauer J. U. D. qui hinc in Patriam reversus a me litteras commendatorias petiit ad universitatis nostrae proceres, praecipue Jureconsultos: quem itaque Virum Tibi, Vir Consultissime, tantum commendo, quantum mea commendatio valere potest.

Profundissima Tua investigatio summae seriei $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+$ etc. quam sextanti quadrati ipsius $\pi$, denotante $1:\pi$ rationem diametri ad peripheriam, aequalem inveneram, non solum me maximo affecit gaudio, sed etiam universa Academia Petropolitana auctoritatem Commentariorum plurimum amplificari est arbitrata, si illud schediasma Tuum insereretur: id itaque Tomo IX esse insertum aegre haud feres, cujus Classis Mathematica, cum Petropoli abirem, jam typis erat expressa. Sine dubio jam inspexisti methodum meam, qua summas hujusmodi serierum altioris cujusque potestatis paris definivi, quamque ex divisoribus aequationis infiniti gradus derivavi. Interim tamen fateri cogor, nisi consensum summarum illarum cum veritate aliunde essem expertus, me non ausum fuisse eas pro veris venditare. Cum enim aequationis illius infinitae

$$x = s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \text{ etc.}$$

inter arcum circuli $s$ ejusque sinum $x$, a posteriori infinitas radices ipsius $s$ cognoscerem, dubius tamen haerebam, an ista aequatio non alias radices imaginarias, praeter assignatas, involveret, quod si usu veniret, summae inventae cum veritate consistere non possent. Quamquam autem nunc quidem demonstrare possum, hanc expressionem

*) Filium Nicolai, summorum geometrarum Jacobi et Johannis fratris, auctorem tractatus *De Arte conjectandi in jure*, natum d. 10 Octobr. 1687, mortuum d. 29 Novembr. 1759.

$$s-\frac{s^3}{6}+\frac{s^5}{120}-\frac{s^7}{5040}+\text{ etc.}$$

(quoniam ad hoc binomium

$$\frac{\left(1+\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n-\left(1-\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n}{2\sqrt{-1}}$$

reducitur, existente $n$ numero infinito, atque hujusmodi binomiorum omnes divisores assignari possunt), esse productum ex his factoribus

$$s\left(1-\frac{ss}{\pi\pi}\right)\left(1-\frac{ss}{4\pi\pi}\right)\left(1-\frac{ss}{9\pi\pi}\right)\left(1-\frac{ss}{16\pi\pi}\right)\text{ etc.}$$

unde in genere hujus seriei

$$1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\text{ etc.}$$

summa, si $m$ fuerit numerus par, exhiberi potest. Tamen huic methodo aliam magis genuinam, a me nuper detectam, praefero, quam sublimi judicio Tuo, Vir Amplissime, omni observantia submitto.

Quaesivi per solitas integrationis regulas integrale hoc

$$\int\frac{x^{p-1}dx}{1+x^q},$$

idque partim a logarithmis partim a quadratura circuli ita pendere deprehendi, ut si addatur

$$\int\frac{x^{q-p-1}dx}{1+x^q},$$

in integrali summae partes a logarithmis pendentes se mutuo destruant, eae vero, quae quadraturam circuli postulant, duplicentur. Investigavi igitur integrale hujus formulae

$$\int\frac{x^{p-1}+x^{q-p-1}}{1-x^q}\cdot dx$$

ita sumtum, ut evanescat posito $x=0$; quo facto, posui $x=1$, atque inveni integrale hoc casu ad hunc valorem

$$\frac{\pi}{q\sin A\frac{p\pi}{q}}$$

reduci, ubi $\pi$ denotat circumferentiam circuli cujus radius $=1$, in quo eodem circulo sinum arcus $\frac{p\pi}{q}$ accipi oportet. Simili modo demonstravi integrale hujus formae

$$\int\frac{x^{p-1}-x^{q-p-1}}{1-x^q}\cdot dx$$

eodem casu, quo post integrationem ponitur $x=1$, abire in

$$\frac{\pi\cos A\frac{p\pi}{q}}{q\sin A\frac{p\pi}{q}}.$$

Quodsi ergo illae formulae per series integrentur, atque tum ponatur $x=1$, prodibunt duarum harum serierum summae:

$$\frac{\pi}{q\sin A\frac{p\pi}{q}}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q-p}-\frac{1}{q+p}-\frac{1}{2q-p}+\frac{1}{2q+p}+\frac{1}{3q-p}-\frac{1}{3q+p}-\frac{1}{4q-p}+\text{ etc.}$$

$$\frac{\pi\cos A\frac{p\pi}{q}}{q\sin A\frac{p\pi}{q}}=\frac{1}{p}-\frac{1}{q-p}+\frac{1}{q+p}-\frac{1}{2q-p}+\frac{1}{2q+p}-\frac{1}{3q-p}+\frac{1}{3q+p}-\frac{1}{4q-p}+\text{ etc.}$$

Si igitur ponam $\frac{p}{q}=z$, quicunque valor tribuatur ipsi $z$, semper hae summae erunt veritati consentaneae:

$$\frac{\pi}{\sin A\pi z}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}-\frac{1}{1+z}-\frac{1}{2-z}+\frac{1}{2+z}+\frac{1}{3-z}-\text{etc. et}$$

$$\frac{\pi\cos A\pi z}{\sin A\pi z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+z}-\frac{1}{2-z}+\frac{1}{2+z}-\frac{1}{3-z}+\text{etc.}$$

Cum veritate ergo consensus manebit, si differentientur quoties libuerit. Quare cum sit

$$d.\sin A\pi z=\pi dz\cos A\pi z,\quad \text{et}\quad d.\cos A\pi z=-\pi dz\sin A\pi z,$$

prodibunt, divisione per $dz$ utrinque facta, sequentes series

$$\frac{\pi\pi\cos A\pi z}{(\sin A\pi z)^2}=\frac{1}{zz}-\frac{1}{(1-z)^2}-\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{1}{(2-z)^2}+\frac{1}{(2+z)^2}-\frac{1}{(3-z)^2}-\quad\text{etc. et}$$

$$\frac{\pi\pi}{(\sin A\pi z)^2}=\frac{1}{zz}+\frac{1}{(1-z)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{1}{(2-z)^2}+\frac{1}{(2+z)^2}+\frac{1}{(3-z)^2}+\text{etc.}$$

Inventis hoc modo summis serierum reciprocorum quadratorum, secunda differentiatio ad summas cuborum deducet, atque reperietur

$$\frac{\pi^3}{2\sin A\pi z}+\frac{\pi^3(\cos A\pi z)^2}{(\sin A\pi z)^3}=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{(1-z)^3}-\frac{1}{(1+z)^3}-\frac{1}{(2-z)^3}+\frac{1}{(2+z)^3}+\quad\text{etc. et}$$

$$\frac{2\pi^3\cos A\pi z}{(\sin A\pi z)^3}=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{(1-z)^3}+\frac{1}{(1+z)^3}-\frac{1}{(2-z)^3}+\frac{1}{(2+z)^3}-\text{etc.}$$

sicque ulterius pergendo ad summas quarumvis altiorum potestatum progredi licet.

Si haec, Vir Celeberrime, examine Tuo digna judices, id Te maxime rogo, ut me responsione dignari velis, quam vel Magnificus Vir Patruus Tuus, vel Filius ejus Celeb. ad me expedire haud gravabitur. Sin autem mihi sperare liceret, Tuo commercio directe frui, me Tibi devinctissimum agnoscerem. Unicum adhuc Te, Vir Celeberrime, rogatum velim, quoniam novi Claris. Wenzium Tibi familiarem esse, ut ex ipso sciscitieris, utrum meam professionem Petropolitanam vacantem accipere non dubitaret: equidem jam de hoc nil certi polliceri audeo, quia nondum mihi constat, quantum praesentes perturbationes Academiam affecerint. De cetero, si maluerit in aliqua Universitate Regia provinciam Juris vel Matheseos obire, mihi persuasum habeo, me ejus commendatione apud nostros Academiarum Protectores magnam gratiam esse initurum. Me autem potissimum Tuo favori ac patrocinio plurimum commendo. Vale, Vir Amplissime, mihique fave. Dabam Berolini d. 16. Januarii A. 1742.

(Responsionem vide *Corresp. T. II. p.* 681.)

**2.**

Viro Consultissimo atque Celeberrimo N. B S. P. D. L. E.

Nihil gratius mihi esse poterat, quam litteras meas per D^rem Hagenauer ad Te datas tam benevole a Te esse acceptas, mihique tam luculentum insignis Tui erga me favoris testimonium comparasse. Quamvis autem profundissimae Tuae meditationes de summatione seriei

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\text{etc.}$$

pariter ac de integratione formulae differentialis

$$\frac{x^{p-1}\pm x^{q-p-1}}{1\pm x^q}\cdot dx$$

summo me gaudio affecerint, tamen vehementer doleo Te, aliis negotiis tantopere obrutum, tam parum temporis ad res in mathesi absconditissimas excolendas impendere posse, neque nisi rogatum, cum otium fueris nactus, quicquam suscipere solere. Quod si autem rogationes tantum apud Te, Vir Amplissime, valent, equidem de scientiae amplificatione maxime mereri videar, si Te frequenter rogarem, id quod lubentissime facerem, nisi Tibi rogator importunus videri vererer. Ego vero Te rogare non cessabo, quoniam tanta praemia in scientiae augmentum redundant, et ob hanc causam confido Te institutum hoc meum non aegre laturum, tantumque rogationi meae tribues, quantum voles et quantum otium permittet: ego certe quicquid a Te impetravero, lautissimi muneris loco habebo.

Quod igitur primum ad methodum Tuam summandi seriem

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\text{ etc.}$$

attinet, quam Petropoli sum nactus, atque ob summum acumen communi Academiae suffragio Commentariis inserendam curavi, equidem nihil omnino invenire potui, quod contra eam objici posset, neque adeo causa erat nobis dubitandi num publicationem aegre sis laturus? Majoris autem erat momenti objectio, quae mihi facta est contra meam methodum ex serie

$$0=s-\frac{s^3}{6}+\frac{s^5}{120}-\text{ etc.}$$

petitam, quam etsi statim praevideram, tamen aliter initio tueri non potui, nisi monstrando, summas hac via inventas cum summis, quas varii approximandi modi suppeditant, apprime convenire. Omnino autem cunctae objectiones tolli mihi videbantur, si demonstrari posset, aequationem infinitam

$$0=s-\frac{s^3}{6}+\frac{s^5}{120}-\text{ etc.}$$

alias radices in se non complecti, nisi quas natura circuli indicaret. Quodsi enim fuerit

$$s-\frac{s^3}{6}+\frac{s^5}{120}-\text{ etc.}=s\left(1-\frac{ss}{\pi\pi}\right)\left(1-\frac{ss}{4\pi\pi}\right)\left(1-\frac{ss}{9\pi\pi}\right)\text{ etc.},$$

seu $1-\frac{ss}{6}+\frac{s^4}{120}-\text{ etc.}=\left(1-\frac{ss}{\pi\pi}\right)\left(1-\frac{ss}{4\pi\pi}\right)\left(1-\frac{ss}{9\pi\pi}\right)\text{ etc.}$

certe coëfficiens secundi termini $-\frac{1}{6}$ aequalis esse debet summae coëfficientium ipsius $ss$ in singulis factoribus, seu

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{\pi\pi}+\frac{1}{4\pi\pi}+\frac{1}{9\pi\pi}+\text{ etc.}$$

atque coëfficiens tertii termini $+\frac{1}{120}$ aequalis erit summae factorum ex binis terminis seriei

$$\frac{1}{\pi\pi},\ \frac{1}{4\pi\pi},\ \frac{1}{9\pi\pi},\ \text{ etc.};$$

hincque si hujus seriei duplum subtrahatur a quadrato seriei

$$\frac{1}{\pi\pi}+\frac{1}{4\pi\pi}+\text{ etc.}$$

remanebit series quadratorum singulorum terminorum

$$\frac{1}{\pi^4}+\frac{1}{4^2\pi^4}+\frac{1}{9^2\pi^4}+\text{ etc.}=\frac{1}{36}-\frac{2}{120}=\frac{1}{90},\ \text{ seu }\ \frac{\pi^4}{90}=\frac{1}{1}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\text{ etc.}$$

Sin autem expressio

$$1-\frac{ss}{6}+\frac{s^4}{120}-\text{ etc.}$$

praeter hos factores indicatos, alios factores in se complecteretur, id quod in serie pro ellipsi mihi usu venire videtur, tum hoc ratiocinio nullae verae summationes obtineri possent. Quamobrem nulli dubio locus superesse mihi videbatur, si demonstraretur expressionem

$$s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \text{ etc.}$$

esse productum ex his factoribus

$$s\left(1 - \frac{ss}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{ss}{4\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{ss}{9\pi\pi}\right) \text{ etc.}$$

Demonstrationem autem hanc tandem ita sum adeptus, ut ostenderim hanc expressionem

$$1 - \frac{ss}{2} + \frac{s^4}{24} - \frac{s^6}{720} + \text{ etc.}$$

qua cosinus arcus $s$ exhiberi solet, esse productum ex his factoribus

$$\left(1 - \frac{4ss}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{4ss}{9\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{4ss}{25\pi\pi}\right) \text{ etc.}$$

natum. Cum enim sit

$$1 - \frac{ss}{2} + \frac{s^4}{24} - \frac{s^6}{720} + \text{ etc.} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n, \quad \text{si} \quad n = \infty:$$

atque generatim hujus binomii: $a^n + b^n$ omnes factores sint contenti in

$$aa - 2ab\cos A\,\frac{2k-1}{n}\pi + bb$$

siquidem pro $k$ omnes numeri integri substituantur: fiat

$$a = 1 + \frac{s\sqrt{-1}}{n} \quad \text{et} \quad b = 1 - \frac{s\sqrt{-1}}{n}, \quad \text{erit} \quad aa + bb = 2 - \frac{2ss}{nn} \quad \text{et} \quad 2ab = 2 + \frac{2ss}{nn},$$

hincque factor generalis formae

$$1 - \frac{ss}{2} + \frac{s^4}{24} - \frac{s^6}{720} + \text{ etc. erit } 1 - \frac{ss}{nn} - \left(1 + \frac{ss}{nn}\right)\cos A\,\frac{2k-1}{n}\pi,$$

seu ad formam $1 - pss$, cujusmodi omnes factores esse debent, reducto, erit

$$1 - \frac{ss}{nn}\left(\frac{1 + \cos A\,\frac{2k-1}{n}\pi}{1 - \cos A\,\frac{2k-1}{n}\pi}\right)$$

factor generalis illius expressionis, posito $n = \infty$. Quia vero est $n = \infty$, erit arcus $\frac{2k-1}{n}\pi$ infinite parvus, et idcirco

$$1 - \cos A\,\frac{2k-1}{n}\pi = \frac{(2k-1)^2\pi\pi}{2nn} \quad \text{et} \quad 1 + \cos A\,\frac{2k-1}{n}\pi = 2;$$

unde factor ille generalis fiet $1 - \frac{4ss}{(2k-1)^2\pi\pi}$. Quamobrem loco $k$ substituendo successive omnes numeros integros fiet

$$1 - \frac{ss}{2} + \frac{s^4}{24} - \frac{s^6}{720} + \text{ etc.} = \left(1 - \frac{4ss}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{4ss}{9\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{4ss}{25\pi\pi}\right) \text{ etc.}$$

ideoque $\frac{1}{2}$ = summae terminorum

$$\frac{4}{\pi\pi}, \frac{4}{9\pi\pi}, \frac{4}{25\pi\pi}, \text{ etc.};$$

$\frac{1}{24}$ = summae factorum ex binis his terminis; $\frac{1}{720}$ = summae factorum ex ternis, etc. unde summae potestatum cujusvis exponentis integri eorundem terminorum, seu seriei

$$1+\frac{1}{9^m}+\frac{1}{25^m}+\frac{1}{49^m}+\text{ etc.}$$

poterunt exhiberi. Possum itaque summas harum omnium serierum

$$1\pm\frac{1}{3^n}\pm\frac{1}{5^n}\pm\frac{1}{7^n}\pm\text{ etc.}$$

ac proinde etiam harum

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\text{ etc.}$$

invenire, si quidem $n$ sit numerus par. Sin autem $n$ fuerit numerus impar, nunquam affirmavi me series has ad summas revocasse, quod ideo moneo, quoniam vidi Te, Vir Amplissime, in ea versari opinione, quasi etiam summas hujus seriei, si $n$ sit numerus impar, assignare me posse putem. Hocque ipso dubium, quod circa alteram meam methodum attulisti, sponte evanescet. Praebet enim haec methodus utique pro omnibus potestatibus summas, at si exponentes fuerint impares, tum numeri tantum impares in denominatores ingrediuntur, atque signa alternatim sunt affirmativa et negativa. Scilicet omnes series, quas hoc modo summavi, in hac forma generali:

$$1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\left(+\frac{1}{5}\right)^n+\left(-\frac{1}{7}\right)^n+\left(+\frac{1}{9}\right)^n+\left(-\frac{1}{11}\right)^n+\text{ etc.}$$

continentur. Seriem ergo

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\text{ etc.}$$

adhuc ad summam revocare non potui, etiamsi jam pridem in hoc negotio elaboraverim; tantum quidem mihi constat ejus summam per $\pi^3$ exhiberi non posse, et suspicor fere $l2$ ejusve potestatem insuper ingredi. Multum quoque in hoc sum versatus, an summam seriei

$$x+\frac{xx}{4}+\frac{x^3}{9}+\frac{x^4}{16}+\frac{x^5}{25}+\text{ etc.}$$

aliis casibus praeter $x=\pm1$ eruere possem: unicum vero quo $x=\frac{1}{2}$ adhuc sum nactus, invenique esse

$$1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{32}+\text{ etc.}=\frac{\pi\pi}{12}-\frac{1}{2}(l2)^2.$$

Maxime autem sum admiratus operationes Tuas, per quas integrale formulae

$$\frac{x^{p-1}\pm x^{q-p-1}}{1\pm x^q}\,dx$$

cum in genere tum casu $x=1$, invenisti, quas sane difficillime comprehendere potuissem, nisi ipse tantopere in hac investigatione elaborassem. Si integranda sit formula differentialis $\frac{M}{N}dx$, in qua $M$ et $N$ functiones quascunque ipsius $x$ rationales denotent, praecipuum quaestionis caput in eo versatur, ut fractio $\frac{M}{N}$ in ejusmodi simpliciores resolvatur, quarum denominatores sint binomiales formae $\alpha+\beta x$, numeratores vero constantes. Quam resolutionem ita instituo: Sit $p+qx$ factor denominatoris $N$, nempe $N=(p+qx)S$; sitque pars fractionis $\frac{M}{N}$ ex hoc factore orta $=\frac{A}{p+qx}$, et pars altera reliqua $=\frac{P}{S}$,

$$\text{erit}\quad \frac{P}{S}=\frac{M}{N}-\frac{A}{p+qx}=\frac{M(p+qx)-AN}{N(p+qx)}=\frac{M-AS}{S(p+qx)},\quad\text{ideoque}\quad P=\frac{M-AS}{p+qx}.$$

Quare cum $P$ sit quantitas integra, erit $M-AS$ divisibilis per $p+qx$. Posito ergo

$$p+qx=0\quad\text{seu}\quad x=-\frac{p}{q},\quad\text{fiet}\quad M-AS=0,\quad\text{ideoque}\quad A=\frac{M}{S}=\frac{M(p+qx)}{N}.$$

Hujus autem fractionis, facto $x=-\frac{p}{q}$, tam numerator quam denominator evanescet; ex quo erit

$$A = \frac{(p + qx)\,dM + qMdx}{dN}.$$

Sit igitur $\frac{M}{N} = \frac{x^{p-1} \pm x^{q-p-1}}{1 \pm x^q}$; et denominator habeat factorem $1 + \alpha x$, qui praebeat fractionem integrantem $\frac{A}{1 + \alpha x}$; erit

$$A = \frac{(1 + \alpha x)\,dM + \alpha M dx}{dN},$$

posito $x = -\frac{1}{\alpha}$; ideoque erit

$$A = \frac{\alpha M dx}{dN} = \frac{\alpha\,(x^{p-1} \pm x^{q-p-1})}{\pm q x^{q-1}} = \frac{\alpha}{q}\left(\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^{p-q} \pm \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^{-p}\right).$$

Hoc igitur modo inventis pro singulis fractionibus integrantibus numeratoribus, integralis partes elicui, quae cum essent imaginariae, binis colligendis ad quadraturam circuli sum deductus. Videtur autem mihi omnis aequatio algebraica non solum radicum imaginariarum numerum parem habere, sed etiam has ipsas radices ita comparatas, ut binae in se multiplicatae productum reale praebeant, quae proprietas mihi quidem verissima videtur, etiamsi eam generaliter demonstrare non valeam. Theorema nempe ita se habet: Ut omnis expressio algebraica $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$ etc. quotcunque fuerit dimensionum, si non in factores simplices $p + qx$ omnes reales resolvi queat, ea saltem in factores trinomiales $p + qx + rxx$, qui omnes sint reales, semper resolubilis existat.

Probe autem agnosco, si aliunde demonstrari posset, esse

$$\sin A\,.\,\pi z = \pi z\,(1 - zz)\left(1 - \frac{1}{4}zz\right)\left(1 - \frac{1}{9}zz\right) \text{ etc.}$$

tum tanto apparatu integrationum non esse opus ad serierum memoratarum summas investigandas, sed eas immediate ex hac formula deduci posse. Inveni quidem jam pridem hanc ipsam expressionem pro $\sin A\,.\,\pi z$; at hoc ipsum ex summis illarum serierum jam cognitis concluseram: averem igitur methodum videre, qua ista pro sinu expressio independenter a seriebus his possit inveniri, quam ut mecum benevole communicare velis etiam atque etiam rogo. Usus autem sum his expressionibus

$$\sin A\,.\,\pi z = \pi z\,(1 - zz)\left(1 - \frac{1}{4}zz\right)\left(1 - \frac{1}{9}zz\right) \text{ etc.}$$

et

$$\cos A\,.\,\pi z = \left(1 - \frac{4}{1}zz\right)\left(1 - \frac{4}{9}zz\right)\left(1 - \frac{4}{25}zz\right) \text{ etc.}$$

ad logarithmos sinuum et cosinuum commode exhibendos, ipsis sinibus etiam incognitis. Dum autem haec scribo, video totum negotium huc reduci, ut demonstretur esse

$$\int \frac{x^{n-1}dx}{(1-x)^n} = \frac{\pi}{\sin A\,.\,n\pi}$$

si post integrationem ponatur $x = 1$, id quod mihi demonstratu facilius videtur. Inveni enim complures non inelegantes formularum differentialium, quae alias inter se comparari non possunt, relationes casu quo post integrationem ponitur $x = 1$. Sic productum harum duarum formularum

$$\int \frac{x^{2f-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}} \quad \text{et} \quad \int \frac{x^{2f+g-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$$

si in utraque ponatur $x = 1$, erit $= \frac{\pi}{4fg}$: hinc pro curva elastica erit productum

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \cdot \int \frac{xxdx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{\pi}{4}.$$

Simili modo hoc theorema latius patens

$$\int\frac{x^{a-1}dx}{(1-x^b)^{1-m}}\cdot\int\frac{x^{a+mb-1}dx}{(1-x^b)^{1-n}}=\int\frac{x^{a-1}dx}{(1-x^b)^{1-n}}\cdot\int\frac{x^{a+nb-1}dx}{(1-x^b)^{1-m}}$$

semper locum habet, si post integrationem ponatur $x=1$, quicunque numeri loco $a, b, m, n$, substituantur.

Cum ante aliquot annos considerassem modum ex secantibus arcum circuli vero proxime investigandi, incidi forte in expressionem, quae circumferentiam circuli $\pi$, cujus diameter $=1$, proxime praebeat, neque tamen, id quod magnopere mirum videbatur, absolute erat vera. Denotet $a$ numerum pro arbitrio assumtum integrum, ac ponatur

$$s=\frac{2a}{aa}+\frac{4a}{aa+1}+\frac{4a}{aa+4}+\frac{4a}{aa+9}+\ldots\ldots+\frac{4a}{aa+(a-1)^2}+\frac{2a}{aa+aa}$$

dico fore proxime

$$\pi=s+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1.3a^2}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2^2\,3.7.a^6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2^4.5.11.a^{10}}-\frac{35}{2}\cdot\frac{1}{2^6.7.15.a^{14}}+\frac{43867}{42}\cdot\frac{1}{2^8.9.19.a^{18}}$$
$$-\frac{854513}{6}\cdot\frac{1}{2^{10}.11\,23.a^{22}}+\frac{76977927}{2}\cdot\frac{1}{2^{12}.13.27.a^{26}}-\text{ etc.}$$

neque enim, etiamsi haec series in infinitum continuetur, ad veritatem pervenitur; sed tamen, quo major accipitur numerus $a$, eo propius valor ipsius $\pi$ reperitur. Caeterum fractiones illae, quae irregulares videntur: $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}$, est. sunt alternae ex hac fractionum serie

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{3}{10},\ \frac{5}{6},\ \frac{691}{210},\ \frac{35}{2},\ \frac{3617}{30},\ \frac{43867}{42},\ \frac{1222277}{110},\ \frac{854513}{6},\ \frac{1181820455}{546},\ \frac{76977927}{2},\ \text{etc.}$$

cujus seriei usum multifariam sum expertus in summatione serierum.

Ex his autem fractionibus formari possunt summae seriei

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\text{ etc.},$$

si $n$ fuerit numerus par quicunque. Hae namque summae ita progrediuntur

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{ etc.}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2^1\pi^2}{1.2\,3},\qquad 1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\text{ etc.}=\frac{1}{6}\cdot\frac{2^3\pi^4}{1.2.3.4.5}$$
$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\text{ etc.}=\frac{1}{6}\cdot\frac{2^5\pi^6}{1\,2\ldots.7},\qquad 1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\text{ etc.}=\frac{3}{10}\cdot\frac{2^7\pi^8}{1.2\ldots.9}.$$

Ope harum ergo fractionum summae istae ad potestatem 26 continuari possunt, atque ulterius continuari possent, si haec fractionum series magis produceretur. Legem autem progressionis harum fractionum non nimis difficilem inveni.

Deinde etiam hae fractiones occurrunt in expressione generali, qua summam cujusque seriei ex termino generali assignari docui. Sit enim series quaecunque proposita

$$\overset{1}{A}+\overset{2}{B}+\overset{3}{C}+\overset{4}{D}+\ldots\ldots+\overset{x}{X}=S$$

seriei scilicet, cujus terminus indici $x$ respondens est $=X$, summa erit

$$S=\int Xdx+\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}\cdot\frac{dX}{1.2.3.dx}-\frac{1}{6}\cdot\frac{d^3X}{1.2.3.4.5dx^3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{d^5X}{1.2\ldots7dx^5}-\frac{3}{10}\cdot\frac{d^7X}{1.2\ldots.9dx^7}+\frac{5}{6}\cdot\frac{d^9X}{1.2\ldots11dx^9}-\text{etc.}$$

Dum autem hic de lege progressionum sermo est, non possum, quin Te, Vir Excellentissime, consulam super serie quadam, quae in natura concinnam progressionis legem observare videtur, interim tamen ab aliis seriebus adhuc tractatis plurimum abhorret:

$$1+1n+2n^2+3n^3+5n^4+7n^5+11n^6+15n^7+22n^8+30n^9+42n^{10}+56n^{11}+\text{ etc.}$$

cujus quilibet coëfficiens indicat, quot variis modis exponens ipsius $n$ per additionem produci possit. Sic coëfficiens ipsius $n^5$ est 7, quia 5 septem diversis modis per additionem resultare potest, nempe

$$5 = \overset{1}{5} = 4 \overset{2}{+} 1 = 3 \overset{3}{+} 2 = 3 + \overset{4}{1} + 1 = 2 + \overset{5}{2} + 1 = 2 + 1 \overset{6}{+} 1 + 1 = 1 + 1 + \overset{7}{1} + 1 + 1.$$

Oritur autem haec series per divisionem, si unitas dividatur per

$$(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)(1-n^5) \text{ etc.}$$

quod productum, si actu evolvatur, dat hanc expressionem

$$1 - n - n^2 + n^5 + n^7 - n^{12} - n^{15} + n^{22} + n^{26} - n^{35} - \text{ etc.}$$

in quam quemadmodum exponentes progrediuntur ex natura seriei perspicere non potui, per inductionem autem conclusi alios exponentes non occurrere, nisi qui in formula $\frac{3xx \pm x}{2}$ contineantur; hocque ita, ut potestas ipsius $n$ habeat signum $+$, si ejus exponens ex numero pari pro $x$ substituto nascatur.

Deinde etiam nuper ad hoc theorema sum deductus: Si fuerit

$$s = 1 + \frac{a}{n+1} + \frac{aa}{2n+1} + \frac{a^3}{3n+1} + \frac{a^4}{4n+1} + \frac{a^5}{5n+1} + \text{ etc.}$$

erit

$$\frac{ss}{2} = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{aa}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + \frac{a^3}{3n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3n+1}\right) + \text{ etc.}$$

cujus veritas quidem per probationem, sed tamen difficulter elucet. Demonstrationem vero nonnisi per differentiationem et integrationem adornare possum. Posito enim $a = x^n$, quia est

$$s = 1 + \frac{x^n}{n+1} + \frac{x^{2n}}{2n+1} + \frac{x^{3n}}{3n+1} + \text{ etc.}$$

sit $$z = \frac{1}{2} + \frac{x^n}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{x^{2n}}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + \text{ etc.}$$

erit $$xxz = \frac{xx}{2} + \frac{x^{n+2}}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{x^{2n+2}}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + \text{ etc.}$$

ergo $$\frac{d.xxz}{dx} = x + x^{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + x^{2n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + x^{3n+1}(1 + \text{etc.}) \text{ etc.} = \frac{x + \frac{1}{n+1}x^{n+1} + \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \frac{1}{3n+1}x^{3n+1} + \text{etc.}}{1-x^n} = \frac{sx}{1-x^n}.$$

At ob $$sx = x + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \text{ etc.},$$

erit $$\frac{d.sx}{dx} = 1 + x^n + x^{2n} + \text{ etc.} = \frac{1}{1-x^n}, \quad \text{seu} \quad \frac{dx}{1-x^n} = d.sx.$$

Ergo $$d.xxz = \frac{sxdx}{1-x^n} = sxd.sx,$$

et integrando $$xxz = \frac{1}{2}(sx)^2 = \frac{ssxx}{2}, \quad \text{ergo} \quad z = \frac{ss}{2}.$$

De Clar. Wenzio ab Academia Petropolitana nihil etiamnum accepi, neque enim Imperatrix adhuc restaurationem Academiae confecit; et Curatores Regiarum Academiarum, qui me rogarunt ut ipsis viros in mathesi versatos indicarem, ex hoc tempore nihil amplius requisiverunt: dabo autem operam ut Ipsi mea commendatione utilis esse possim. Vale, Vir Amplissime, mihique favere perge. Berolini die 1 Septembr. 1742.

(V. respons. *Corresp. T. II. p.* 690.)

3.

Viro Celeberrimo atque Amplissimo N. B. S. P. D. L. E.

Quantopere me non solum delectent, sed etiam erudiant litterae Tuae acutissimis meditationibus refertae, verbis Tibi, Vir Celeberrime, vix exprimere possum; quamobrem quo majores Tibi debeo gratias, eo magis Te oro atque obsecro, ut ne graveris litteras meas frequentiores benigne accipere, meque profundissimis Tuis responsionibus exhilarere. Qua quidem petitione id tantum vereor, ne Tibi importunus videar, hincque rogationem meam repeto, ut plus mihi non tribuas, quam otium concesserit, Tibique persuadeas, etiam ea, quae Tibi levissima videantur, apud me plurimum ponderis habere.

Ac primo quidem non satis capio rationem, cur neges seriem

$$s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \text{etc.}$$

aequalam aestimari posse sinui arcus $s$, vel producto

$$s\left(1 - \frac{ss}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{ss}{4\pi\pi}\right) \text{ etc.}$$

nisi simul *ejus convergentia demonstretur.* Cum enim haec series

$$s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \text{etc.}$$

per legitimam integrationem inventa sit $= \sin. s$, haec certe ejus erit summa, sive sit convergens sive divergens: sicque altera illa series $s - \frac{s^3}{6c^4} +$ etc. mibi quidem recte videtur sinum arcus elliptici $s$ denotare, etiamsi sit divergens. Longe alia autem est quaestio, si quaeratur an series

$$s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \text{etc. aequivaleat producto } s\left(1 - \frac{ss}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{ss}{4\pi\pi}\right) \text{ etc.},$$

hic enim non sufficit monstrasse

$$1 - \frac{ss}{\pi\pi},\ 1 - \frac{ss}{4\pi\pi},\ \text{etc. esse divisores expressionis } s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \text{etc.},$$

sed simul doceatur necesse est, eam alios divisores seu factores praeter hos assignatos non continere. Ita alterius expressionis ex ellipsi natae

$$s - \frac{s^3}{6c^4} + \text{etc. concedo factores esse } s,\ 1 - \frac{ss}{\pi\pi},\ 1 - \frac{ss}{4\pi\pi},\ \text{etc.},$$

sed nego in his formulis omnes omnino illius expressionis factores contineri; scilicet meo judicio praeter hos factores alii inerunt, ut $1 + \alpha ss$, $1 + \beta ss$, etc., ita ut sit

$$s - \frac{s^3}{6c^4} + \text{etc.} = s\left(1 - \frac{ss}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{ss}{4\pi\pi}\right) \text{ etc. } \ldots\ (1 + \alpha ss)(1 + \beta ss) \text{ etc.},$$

atque ob hos factores incognitos perperam inde concluderetur

$$\frac{1}{6c^4} = \frac{1}{\pi\pi} + \frac{1}{4\pi\pi} + \text{etc.},$$

cum ex natura aequationum revera sit

$$\frac{1}{6c^4} = \frac{1}{\pi\pi} + \frac{1}{4\pi\pi} + \frac{1}{9\pi\pi} + \text{etc.} \ldots - \alpha - \beta - \gamma - \text{etc.},$$

neque hic, si $\alpha, \beta, \gamma$, etc. essent cognitae, absurdum sequeretur ullum. Atque hoc modo non divergentia seriei $s - \frac{s^3}{6c^4} +$ etc., sed ignoratio plurium, ac fortasse infinitorum factorum in causa est, cur non similia consectaria circa summationem serierum inde deduci queant. Quod caeterum haec series

$$s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \text{ etc.}$$

aequalis sit producto

$$s\left(1 - \frac{ss}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{ss}{4\pi\pi}\right) \text{ etc.}$$

jamdudum mihi constitit, ejusque demonstrationem habui cum innixam theoremati Cotesiano, tum secus; sed ita tamen, ut ipsa demonstratio mea hujus theorematis veritatem evinceret. Rogare itaque Te volui, Vir Celeberrime, annon magis popularem atque ex solis calculi integralis principiis petitam habeas demonstrationem? video autem Te simili modo hanc transformationem ex factoribus binomii

$$\left(\left(1 + \frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n\right) : 2\sqrt{-1}$$

elicere, sine subsidio theorematis Cotesiani, quo ego sum usus idem subsidium vitans. Habeo enim methodum universalem factores trinomiales, seu duarum dimensionum ex qualibet expressione proposita eliciendi, quae simili fere negotio absolvitur, quo vulgo aequationes algebraicae tractari solent. Sit quantitas

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ etc.}$$

cujus quaeritur divisor trinomialis, quem quia potissimum ad ejusmodi divisores respicio, qui divisores simplices imaginarios involvant, pono $f - 2x\sqrt{fg}\,.\cos\varphi + gxx$, quo nihilo aequali posito, si brevitatis ergo fiat

$x = \sqrt{\frac{f}{g}}$, fit $x = \alpha\cos\varphi \pm \frac{\alpha}{\sqrt{-1}}\sin\varphi$, $x^2 = \alpha^2\cos 2\varphi \pm \frac{\alpha^2}{\sqrt{-1}}\sin 2\varphi$, $x^3 = \alpha^3\cos 3\varphi \pm \frac{\alpha^3}{\sqrt{-1}}\sin 3\varphi$,

et generaliter

$$x^n = \alpha^n \cos n\varphi \pm \frac{\alpha^n}{\sqrt{-1}}\sin n\varphi.$$

Quodsi ergo hi valores ambigui in quantitate proposita substituantur, ea evanescere debebit: fiet ergo ob signorum ambiguitatem tam $0 = A + B\alpha\cos\varphi + C\alpha^2\cos 2\varphi +$ etc., quam $0 = B\alpha\sin\varphi + C\alpha^2\sin 2\varphi +$ etc., ex quibus duabus aequationibus saepe satis expedite coëfficiens $\alpha$ et angulus $\varphi$ definiri possunt, ita ut omnes divisores trinomiales innotescant. Sit v. g. proposita haec quantitas $a^n + x^n$, cujus factor trinomialis assumatur $f - 2x\sqrt{fg}\,.\cos\varphi + gxx$, seu $\alpha\alpha - 2\alpha x\cos\varphi + xx$. Habebuntur ergo hae duae aequationes $0 = a^n + \alpha^n\cos n\varphi$ et $0 = \alpha^n \sin n\varphi$, seu $\sin n\varphi = 0$, unde erit $n\varphi = 2i\pi$ vel $n\varphi = (2i-1)\pi$, denotante $\pi$ arcum 180°. Priori casu fit $\cos n\varphi = +1$, posteriori $\cos n\varphi = -1$; ex quo prior aequatio fit $0 = a^n - \alpha^n$,

$$\text{ideoque} \quad \alpha = a \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{(2i-1)\pi}{n};$$

quamobrem formulae $a^n + x^n$ divisor erit

$$aa - 2ax\cos\frac{(2i-1)\pi}{n} + xx,$$

sumendo pro $i$ numerum integrum quemcunque. Cum Tibi ante scripsissem, Vir Celeberrime, omnem expressionem algebraicam quotcunque dimensionum, si in factores simplices reales resolvi nequeat, eam saltem semper in factores trinomiales $\alpha + \beta x + \gamma xx$ reales resolubilem esse, expresse addidi me perfecte demonstrationis compotem non esse, sed tamen de hac propositione tam certum esse, ut de ejus veritate non dubitem. Demonstrationem tamen habeo rigorosam, si summa potestas quaternarium non excedat, quare cum exemplum quantitatis $x^4 - 4x^3 + 2xx + 4x + 4$ huc pertineat, a priori certus eram, eam in duos factores quadraticos esse resolubilem, quos etiam ex radicibus aequationis $x^4 - 4x^3 + 2xx + 4x + 4 = 0$, quae sunt

$$I.\, x = 1 + \sqrt{(2 + \sqrt{-3})}, \quad II.\, x = 1 - \sqrt{(2 + \sqrt{-3})}, \quad III.\, x = 1 + \sqrt{(2 - \sqrt{-3})},$$
$$IV.\, x = 1 - \sqrt{(2 - \sqrt{-3})}$$

elicui. Sunt enim $I$ et $III$, itemque $II$ et $IV$ ita comparatae, ut earum tam summa quam productum fiat reale. Nam est

$$I + III = 2 + \sqrt{(2 + \sqrt{-3})} + \sqrt{(2 - \sqrt{-3})} = 2 + \sqrt{(4 + 2\sqrt{7})},$$

$$\text{et } I.III = 1 + \sqrt{(4 + 2\sqrt{7})} + \sqrt{7};$$

sicque expressio $x^4 - 4x^3 + 2xx + 4x + 4$ hos habet factores reales

$$xx - (2 + \sqrt{(4 + 2\sqrt{7})})\,x + 1 + \sqrt{7} + \sqrt{(4 + 2\sqrt{7})}$$

$$\text{et } xx - (2 - \sqrt{(4 + 2\sqrt{7})})\,x + 1 + \sqrt{7} - \sqrt{(4 + 2\sqrt{7})}.$$

Si ergo similis resolutio perpetuo succedat, certum quoque foret, quod affirmavi, omnem formulam differentialem rationalem $\frac{Mdx}{N}$ concessa circuli et hyperbolae quadratura integrari posse. Cum igitur illud theorema, quod circa resolutionem cujusque expressionis algebraicae rationalis in factores trinomiales reales proposueram, tanti sit momenti, magnopere Te rogo, ut nonnihil temporis in id impendere velis, vel ejus veritatem evicturus, vel falsitatem ostensurus. A Mathematicis Gallis ante aliquot annos celebratum est theorema analyticum, quod ab auctore mox Bouguerianum mox Fontanianum appellabatur. Declarabatur autem in eo singularis proprietas formularum differentialium duas variabiles continentium, quae quidem sint ortae per differentiationem alicujus quantitatis finitae, at theorema quidem variis modis proponi potest; sic autem enunciabo: Si ex differentiatione quantitatis finitae, seu functionis ipsarum $x$ et $y$, prodierit $Pdx + Qdy$, erit semper differentiale ipsius $Pdx$, posita sola $y$ variabili, aequale differentiali ipsius $Qdy$, posita sola $x$ variabili. Cum igitur de inventione hujus theorematis utilissimi inter se certarent, meque de eo certiorem facerent, statim quidem respondebam, hoc theorema jam pridem mihi notum fuisse, cum id jam in Tomo Comment. VII inter alia inseruissem, gloriam inventionis tamen non mihi, sed Tibi, Vir Amplissime, deberi. Memineram enim, Te olim, cum de trajectoriis orthogonalibus disceptaretur, verum hujus theorematis fundamentum exhibuisse. Cum enim quaestio esset de differentiali ipsius $\int Pdx$, si praeter $x$ etiam $a$ (tanquam parameter) variabilis ponatur, Tu demonstrasti differentiale quaesitum fore $Pdx + da\int Rdx$, existente $Rda$ differentiali ipsius $P$ sumto $x$ constanti, quod jam est id ipsum theorema, de cujus inventione Domini Bouguer et La Fontaine inter se certabant, aliis tantum verbis expressum. Posito enim $\int Rdx = Q$, ut differentiale quaesitum sit $Pdx + Qda$, erit differentiale ipsius $Pdx$ (posito $a$ variabili tantum) $= Rdadx$, et differentiale ipsius $Qda$ (posito $x$ variabili tantum) erit $= Rdadx$, quoque ob $Q = \int Rdx$. Consequuntur autem ex hoc theoremate, quod Tibi acceptum est referendum, plurima insignia subsidia in calculo integrali, quae Ipse vel jam nosti vel facile prospicies.

Plurimum autem me delectarunt, quae de partitione numerorum (sic enim appellabat hoc problema Clar. Naudaeus, qui id mihi primum jam Petropoli proposuerat) mecum communicare voluisti. Per solutionem enim hujus problematis deductus sum ad seriem $1 + 1n + 2n^2 + 3n^3 + 5n^4 +$ etc., cujus occasione mihi tam praeclara et profunda perscribis. Problema autem mihi geminum proponebatur: I. Invenire quot variis modis datus numerus $N$ in $n$ partes inter se inaequales dispertiri possit; vel quot variis modis datus numerus $N$ possit esse summa $n$ numerorum inaequalium inter se. Sic numerus 50 dispertiri potest in 7 partes inaequales inter se 522 modis diversis. Alterum problema ita se habebat: II. Invenire quot variis modis datus numerus $N$ dispertiri possit in $n$ partes, non exclusis partibus aequalibus. Sic numerus 50 in septem partes sive aequales inter se, sive inaequales distribui potest 8946 modis. Ad solutionem prioris problematis formo expressionem

$$(1 + mz)(1 + m^2z)(1 + m^3z)(1 + m^4z) \quad \text{etc.}$$

quae per multiplicationem actualem explicata dabit sequentes series

$$\begin{array}{l} +1+mz \quad +m^2z+m^3z+m^4z+m^5z+\text{etc.} \\ \quad +m^3z^2+m^4z^2+2m^5z^2+2m^6z^2+3m^7z^2+\text{etc.} \\ \quad +m^6z^3+m^7z^3+2m^8z^3+3m^9z^3+4m^{10}z^3+\text{etc.} \\ \quad +m^{10}z^4+m^{11}z^4+2m^{12}z^4+3m^{13}z^4+5m^{14}z^4+\text{etc.} \\ \quad \text{etc.} \end{array}$$

hic ex natura genesis coëfficiens numericus cujusque termini indicat, quot variis modis exponens ipsius $m$ in tot partes inaequales dispertiri possit, quot exponens ipsius $z$ contineat unitates. Est vero

$$(1+mz)(1+m^2z)(1+m^3z)(1+m^4z)\text{ etc.} = 1+\frac{mz}{1-m}+\frac{m^3z^2}{(1-m)(1-m^2)}+\frac{m^6z^3}{(1-m)(1-m^2)(1-m^3)}+\text{etc.}$$

quod ita ostendo. Sit $(1+mz)(1+m^2z)(1+m^3z)(1+m^4z)$ etc. $=1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4+$ etc. Jam loco $z$ scribatur $mz$ eritque $(1+m^2z)(1+m^3z)(1+m^4z)$ etc. $=1+\alpha mz+\beta m^2z^2+\gamma m^3z^3+\delta m^4z^4+$ etc. quae ergo per $1+mz$ multiplicata priorem seriem $1+\alpha z+\beta z^2+$ etc. reproducere debet, unde valores coëfficientium $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. determinantur. Cum igitur hoc pacto diversi exponentes ipsius $z$ segregentur, problema prius pro quovis partium numero solvetur. Scilicet $\frac{m}{1-m}$ si evolvatur in $1m+1m^2+1m^3+1m^4+$ etc. quilibet coëfficiens 1 ostendit exponentem ipsius $m$ unico modo ex una parte oriri, quod manifestum est. Simul vero indicat quemlibet numerum unico modo ex unitatibus meris produci posse. Expressio

$$\frac{m^3}{(1-m)(1-m^2)} = 1m^3+1m^4+2m^5+2m^6+3m^7+3m^8+\text{etc.}$$

hujus quilibet coëfficiens ostendit, quot variis modis exponens ipsius $m$ in duas partes inaequales dispertiri possit; simul vero indicat, quot variis modis idem numerus ternario multatus ex his binis numeris 1 et 2 formari possit. Atque factore ipsius $z^3$, qui est

$$\frac{m^6}{(1-m)(1-m^2)(1-m^3)},$$

evoluto in $1m^6+1m^7+2m^8+3m^9+4m^{10}+$ etc. coëfficiens cujuslibet termini ostendit, quot variis modis exponens ipsius $m$ dispertiri possit in tres partes inaequales, seu quot variis modis idem ipsius $m$ exponens senario multatus ex numeris 1, 2, 3, componi queat. Generatim ergo problema de numero $N$ in $n$ partes inaequales partiendo resolvetur per explicationem formae

$$\frac{m^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-m)(1-m^2)\dots(1-m^n)}.$$

donec ad terminum $\nu m^N$ perveniatur, cujus coëfficiens $\nu$ quaesitum partitionum numerum monstrabit. Hinc plura sequuntur compendia hos partitionum numeros expedite inveniendi, et ex jam cognitis simplicioribus componendi. Sic si haec scriptio $(N)^{(n)}$ sumatur ad numerum partitionum indicandum, quem numerus $N$ in $n$ partes inaequales admittit, erit $(N)^{(n)}=(N-n)^{(n)}+(N-n)^{(n-1)}$, unde quilibet numerus ex additione duorum jam cognitorum oritur. Est autem $(N)^{(1)}=1$, et si sit

$$N<\frac{n(n+1)}{2}, \text{ erit } (N)^{(n)}=0, \text{ sin autem } N=\frac{n(n+1)}{2}, \text{ erit } (N)^{(n)}=1.$$

Soluto hoc problemate priori solvitur et posterius, quo partitionum numerus in partes sive aequales sive inaequales postulatur. Evolvatur expressio

$$\frac{1}{(1-mz)(1-m^2z)(1-m^3z)(1-m^4z)\text{ etc.}}$$

et prodibit

$$\begin{array}{l} 1 + m z + m^2 z + m^3 z + m^4 z + m^5 z + m^6 z + \text{etc.} \\ + m^2 z^2 + m^3 z^2 + 2 m^4 z^2 + 2 m^5 z^2 + 3 m^6 z^2 + 3 m^7 z^2 + \text{etc.} \\ + m^3 z^3 + m^4 z^3 + 2 m^5 z^3 + 3 m^6 z^3 + 4 m^7 z^3 + 5 m^8 z^3 + \text{etc.} \\ + m^4 z^4 + m^5 z^4 + 2 m^6 z^4 + 3 m^7 z^4 + 5 m^8 z^4 + 6 m^9 z^4 + \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{array}$$

ubi coëfficiens cujusque termini indicat, quot variis modis exponens ipsius $m$ dispertiri possit in tot partes, quot exponens ipsius $z$ continet unitates. Singulae autem series horizontales seorsim inveniuntur ex eo, quod

$$\frac{1}{(1-mz)(1-m^2z)(1-m^3z)\text{ etc.}} = 1 + \frac{mz}{1-m} + \frac{m^2z^2}{(1-m)(1-m^2)} + \frac{m^3z^3}{(1-m)(1-m^2)(1-m^3)} + \text{etc}$$

quae aequalitas eodem quo ante modo ostenditur. Hinc si quaeratur, quot variis modis numerus $N$ in $n$ partes distribui possit, evolvatur expressio

$$\frac{m^n}{(1-m)(1-m^2)\ldots(1-m^n)}$$

donec perveniatur ad terminum $\nu m^N$, cujus coëfficiens $\nu$ quaesitum partitionum numerum indicabit. Cum igitur haec expressio eosdem praebeat coëfficientes numericos, quos praecedens, sequitur numerum $N$ tot modis in $n$ partes sive aequales sive inaequales distribui posse, quot modis numerus $N + \frac{n(n-1)}{2}$ in $n$ partes inaequales distribui queat. Atque si per hanc scriptionem $(N)^{(n)}$ indicetur modorum numerus, quibus numerus $N$ in $n$ partes sive aequales sive inaequales dispertiri possit, erit $(N)^{(n)} = (N-n)^{(n)} + (N-1)^{(n-1)}$, unde tabula, qua hi partitionum numeri continentur, expedite quousque lubuerit continuari potest. Utrumque ergo problema reducitur ad inventionem harum serierum

| | I | | II | | III | | IV | | V | | VI | | VII | | VIII | | IX | | X |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 1 | + | 1 | + | 1 | + | 1 | + | 1 | + | 1 | + | 1 | + | 1 | + | 1 | + | 1 |
| 2. | 1 | + | 1 | + | 2 | + | 2 | + | 3 | + | 3 | + | 4 | + | 4 | + | 5 | + | 5 |
| 3. | 1 | + | 1 | + | 2 | + | 3 | + | 4 | + | 5 | + | 7 | + | 8 | + | 10 | + | 12 |
| 4. | 1 | + | 1 | + | 2 | + | 3 | + | 5 | + | 6 | + | 9 | + | 11 | + | 15 | + | 18 |
| 5. | 1 | + | 1 | + | 2 | + | 3 | + | 5 | + | 7 | + | 10 | + | 13 | + | 18 | + | 23 |
| 6. | 1 | + | 1 | + | 2 | + | 3 | + | 5 | + | 7 | + | 11 | + | 14 | + | 20 | + | 26 |
| 7. | 1 | + | 1 | + | 2 | + | 3 | + | 5 | + | 7 | + | 11 | + | 15 | + | 21 | + | 28 |
| 8. | 1 | + | 1 | + | 2 | + | 3 | + | 5 | + | 7 | + | 11 | + | 15 | + | 22 | + | 29 |
| 9. | 1 | + | 1 | + | 2 | + | 3 | + | 5 | + | 7 | + | 11 | + | 15 | + | 22 | + | 30 |

etc.

Harum serierum plurimae leges progressionis dantur, uti attente eas inspicienti mox patebit. Continuavi autem eas facili negotio eousque, ut affirmare possim numerum 125 in 12 partes inter se inaequales distribui posse 64707 modis. Series autem $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 15 + 22 + 30 + 42 +$ etc. et inter horizontales est infinitesima et oritur terminis diagonaliter addendis. Observavi autem aliam proprietatem, cujus ope singulae series horizontales sine superiorum ope formari possunt ex seriebus quarum terminus generalis est

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1.2.3.4} \text{ etc.}$$

$$\begin{array}{rl} \text{nempe ex serie} & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \text{etc.} \\ \text{oritur} & 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + \text{etc.} \end{array}$$

ubi bini termini inferioris seriei additi dant terminum superioris. Et ex

$$\begin{array}{rl} & 1+3+6+10+15+21+28+ \text{ etc.} \\ \text{oriuntur I.} & 1+2+4+6+9+12+16+ \text{ etc.} \\ \text{II.} & 1+1+2+3+4+5+7+ \text{ etc.} \end{array}$$

ubi bini termini seriei I additi dant terminum superioris, et terni termini seriei II additi dant terminum seriei I. Ex serie

$$\begin{array}{rl} & 1+4+10+20+35+56+84+ \text{ etc.} \\ \text{oriuntur I.} & 1+3+7+13+22+34+50+ \text{ etc.} \\ \text{II.} & 1+2+4+7+11+16+23+ \text{ etc.} \\ \text{III.} & 1+1+2+3+5+6+9+ \text{ etc.} \end{array}$$

ubi bini termini seriei I additi dant terminum superioris, et terni termini seriei II additi dant terminum seriei I, et quaterni termini seriei III dant terminum seriei II.

Quod expressio $(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)$ etc. evoluta det seriem $1-n-n^2+n^5+n^7-$ etc., in qua alii exponentes non occurrunt nisi qui contineantur in $\frac{3xx \pm x}{2}$, per legitimam inductionem mihi equidem conclusisse videor; interim tamen demonstrationem nullo pacto invenire potui, etiamsi non parum temporis in id impenderem. Inveni autem expressionem $(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)$ etc. quoque in hanc seriem transmutari posse

$$1-\frac{n}{1-n}+\frac{n^3}{(1-n)(1-n^2)}-\frac{n^6}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)}+ \text{ etc.}$$

cujus adeo valor aequatur summae seriei $1-n^1-n^2+n^5+n^7-n^{12}-n^{15}+$ etc. Quare cum lex progressionis hujus seriei sit cognita, hinc alterius seriei $1+1n+2n^2+3n^3+5n^4+7n^5+$ etc. indoles ita describi poterit, ut sit recurrens, habens scalam relationis hanc

$$1+1+0+0-1+0-1+0+0+0+0+1+0+0+1+0+0+ \text{ etc.}$$

cujus ope facile continuatur. Quae mihi scripsisti, Vir Amplissime, de investigatione potestatum seriei

$$1+\frac{a}{n+1}+\frac{a^2}{2n+1}+\frac{a^3}{3n+1}+ \text{ etc.}$$

satis declarant, quantopere methodus Tua a priori procedens praestet alteri illi a posteriori, qua usus sum. Ex serie enim, quam pro cubo hujus seriei exhibuisti, difficillimum foret a posteriori ejus summam invenire; eo majores igitur Tibi habeo gratias, quo majorem fructum me ex ea methodo capturum spero. Caeterum occasione illius seriei $1-n-n^2+n^5+n^7-n^{12}-n^{15}+$ etc. mihi in mentem venit, quot veritates in mathesi soli inductioni acceptas referamus, praecipue circa proprietates numerorum. Cujusmodi sunt: omnem numerum esse summam quatuor pauciorumve quadratorum; item, omnem numerum primum formae $4n+1$ esse summam duorum quadratorum; item, summam duorum cuborum non posse esse cubum. Simile theorema quoque nuper occasionem praebente Cel. Goldbachio detexi: hanc expressionem $4nab-a-b$ quadratum esseopsse nunquam, siquidem litterae $a$, $b$, et $n$ numeros integros affirmativos designent.

Quae in superioribus litteris de investigatione factorum scripsi, non solum insignem habent usum in integratione formularum differentialium rationalium, sed etiam integrari possunt infinitae aequationes differentiales cujuscunque gradus, quae quidem continentur in hac forma

$$0=Ay+\frac{Bdy}{dx}+\frac{Cddy}{dx^2}+\frac{Dd^3y}{dx^3}+\frac{Ed^4y}{dx^4}+ \text{ etc.}$$

posito $dx$ constante. Ad valorem enim ipsius $y$ in quantitatibus finitis expressum inveniendum resolvatur haec aequatio algebraica $0=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+$ etc. in factores, et quilibet factor dabit partem valoris ipsius $y$ quaesiti, hoc modo

| si factor fuerit | erit integralis pars |
|---|---|
| $(f \pm z)$ | $\alpha e^{\mp fx}$, ubi $e$ est numerus, cujus logarithmus $= 1$ |
| $(f \pm z)^2$ | $(\alpha + \beta x)\, e^{\mp fx}$ |
| $(f \pm z)^3$ | $(\alpha + \beta x + \gamma xx)\, e^{\mp fx}$ |
| etc. | etc. |
| $ff - 2fz\cos\varphi + zz$ | $\alpha e^{fx\cos\varphi} \sin A\,.\,fx\sin\varphi + \mathfrak{A} e^{fx\cos\varphi} \cos A\,.\,fx\sin\varphi$ |
| $(ff - 2fz\cos\varphi + zz)^2$ | $(\alpha + \beta x)\, e^{fx\cos\varphi} \sin A\,.\,fx\sin\varphi + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x)\, e^{fx\cos\varphi} \cos A\,.\,fx\sin\varphi$ |

hujusmodi enim valores ex singulis factoribus orti conjiciantur in unam summam, sicque prodibit valor ipsius $y$ quaesitus, qui tot quantitates arbitrarias constantes complectetur, quoti gradus fuerit aequatio differentialis, uti integrationis natura postulat. Hinc expedite integrari potest aequatio differentialis quarti gradus $ydx^4 = a^4 d^4y$, qua exprimitur natura curvae, quam lamina elastica inter oscillandum (si fuerit muro infixa et ad motum vibratorium incitetur) induit. Cum enim sit

$$0 = y - \frac{a^4 d^4 y}{dx^4},$$

oritur haec aequatio resolvenda $0 = 1 - a^4 z^4$, cujus factores sunt $1 - az$, $1 + az$, $1 + a^2 z^2$, ex quibus obtinetur

$$y = \alpha e^{\frac{x}{a}} + \beta e^{-\frac{x}{a}} + \gamma \sin A\,.\,\frac{x}{a} + \delta \cos A\,.\,\frac{x}{a}$$

ob $\cos\varphi = 0$ et $\sin\varphi = 1$, unde sequitur tempora singularum vibrationum esse in ratione duplicata longitudinis laminarum, caeteris paribus.

His, cum spatium supersit, adjungam methodum facilem resolvendi omnis generis problemata, quae ad problema Isoperimetricum referri solent. Quaeratur scilicet inter omnes curvas ea, in qua expressio quaepiam integralis $\int MdN$ sit maxima vel minima, ubi $M$ et $N$ non solum ipsas coordinatas $x$, $y$, sed etiam earum differentialia quaecunque involvant. Ponatur $dy = pdx$, $dp = qdx$, $dq = rdx$, etc. atque formula integralis proposita abibit in ejusmodi expressionem $\int Zdx$, in qua $Z$ erit functio ipsarum $x$, $y$ et $p$, $q$, $r$, etc. Differentietur $Z$, atque sit $dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr +$ etc. et sumto $dx$ constante formetur hic valor

$$V = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.}$$

quem voco valorem differentialem formulae propositae integralis $\int Zdx$. Atque hic valor differentialis $V$ nihilo aequalis positus praebebit aequationem pro curva quaesita, in qua $\int Zdx$ erit maximum minimumve. Sic cum nuper mihi Celeb. Patruelis Tuus significasset in curvis elasticis $\int \frac{ds}{rr}$ minimum esse oportere, ubi $ds$ elementum curvae et $r$ radium osculi significabat, statim per hanc methodum problema resolvi. Sumtis enim $x$ et $y$ pro coordinatis curvae quaesitae, positoque $dy = pdx$ et $dp = qdx$, erit

$$ds = dx\sqrt{(1 + pp)} \quad \text{et} \quad r = \frac{(1 + pp)^{\frac{3}{2}}}{q}, \quad \text{unde fit } Z = \frac{qq}{(1 + pp)^{\frac{5}{2}}},$$

hincque differentiando

$$M = 0, \quad N = 0, \quad P = \frac{-5qqp}{(1 + pp)^{\frac{7}{2}}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{2q}{(1 + pp)^{\frac{5}{2}}};$$

ita ut sit $dZ = Pdp + Qdq$. Erit ergo valor differentialis

$$V = -\frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2}$$

et pro curva quaesita aequatio $0 = dPdx - ddQ$, quae integrata dat $Pdx - dQ = Adx$. Multiplicetur per $q$, ob $dp = qdx$, erit $Pdp - qdQ = Adp$; at ex aequatione $dZ = Pdp + Qdq$ est $Pdp = dZ - Qdq$, quo valore substituto habebitur $dZ - Qdq - qdQ = Adp$, quae denuo integrata dat

$$Z - Qq = Ap + B = \frac{qq}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2qq}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}} = \frac{-qq}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}}.$$

Erit ergo mutato constantium signo

$$q = (Ap + B)^{\frac{1}{2}} (1+pp)^{\frac{5}{4}} = \frac{dp}{dx},$$

ergo

$$dx = \frac{dp}{(Ap+B)^{\frac{1}{2}} (1+pp)^{\frac{5}{4}}} \quad \text{et} \quad dy = \frac{pdp}{(Ap+B)^{\frac{1}{2}} (1+pp)^{\frac{5}{4}}}$$

unde cognita jam aequatio pro curva elastica elicitur.

Si non absolute inter omnes curvas, sed tantum inter isoperimetras, vel eas, in quas certa quaedam expressio integralis $\int Z' dx$ aequaliter competit, quaeratur ea, in qua sit $\int Zdx$ maximum minimumve, tum eadem methodo quaerantur valores differentiales formularum $\int Z'dx$ et $\int Zdx$, qui sint $V'$ et $V$, erit $\alpha V' + \beta V = 0$ aequatio pro curva quaesita. Sic non impeditur haec mea methodus, etiamsi in formula integrali $\int Zdx$ praeter differentialia coordinatarum $x$ et $y$, quoque earum differentialia secundi, tertii, aliusve altioris ordinis insint, cujusmodi casus dubito an per solitas methodos resolvi possint. At vero si in $Z$ praeter quantitates $x, y, p, q, r$, etc. etiam formula quaepiam integralis, puta $\int \mathfrak{Z}dx$, insit, tum neque consueta methodus, neque haec, quam modo exposui, solutioni inservit, sed sequenti modo erit procedendum. Cum $Z$ sit functio quantitatum $x, y, p, q, r$, etc. et insuper quantitatis $\Pi = \int \mathfrak{Z}dx$, sit $dZ = Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq +$ etc. atque

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M}dx + \mathfrak{N}dy + \mathfrak{P}dp + \mathfrak{Q}dq + \text{ etc.}$$

Tum sumatur $\int Ldx$, cujus valor posito $x = a$ fiat $H$, sitque $H - \int Ldx = T$, erit differentialis valor quaesitus

$$= N - \mathfrak{N}T - \frac{d(P + \mathfrak{P}T)}{dx} + \frac{dd(Q + \mathfrak{Q}T)}{dx^2} - \text{ etc.}$$

De problematis autem huc pertinentibus notandum est, ea non instar priorum absolute resolvi posse, ut curvae portio quaecunque praescripta maximi minimive indole sit praedita; sed longitudo abscissae simul debet assignari, cui haec conditio satisfaciat. Sic si iste modo inventus valor differentialis ponatur $= 0$, aequatio prodibit non pro curva, quae inter omnes alias absolute habeat $\int Zdx$ maximum minimumve, sed quae inter alias omnes pro dato abscissae valore $x = a$ (cujus ratio jam est habita in $T$) maximum minimumve ipsius $\int Zdx$ valorem exhibeat. Quare si haec abscissae magnitudo $a$ immutetur, alia curva problemati satisfaciens reperitur; qua cautela in problematis prioris generis non erat opus. Ulterius processi, et casus evolvi, cum etiam $\mathfrak{Z}$ denuo formulam integralem $\pi = \int \mathfrak{Z}dx$ implicet. Proposita enim formula $\int Zdx$, si sit

$$dZ = Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \text{ etc.}$$

existente $\Pi = \int \mathfrak{Z}dx$, et $d\mathfrak{Z} = \mathfrak{L}d\pi + \mathfrak{M}dx + \mathfrak{N}dy + \mathfrak{P}dp + \mathfrak{Q}dq +$ etc. existente

$$\pi = \int \mathfrak{z}dx \quad \text{et} \quad d\mathfrak{z} = \mathfrak{m}dx + \mathfrak{n}dy + \mathfrak{p}dp + \mathfrak{q}dq + \text{ etc.}$$

Sumatur integrale $\int Ldx$, quod sit $= H$ casu quo $x = a$ (ubi $a$ est magnitudo abscissae $x$ illa determinata, cui maximus valor illius $\int Zdx$ respondere debet) sitque $H - \int Ldx = T$. Tum sumatur integrale $\int \mathfrak{L}Tdx$, quod fiat $= \mathfrak{H}$ posito $x = a$, sitque $\mathfrak{H} - \int \mathfrak{L}Tdx = \mathfrak{T}$. His praeparatis erit valor differentialis formae $\int Zdx$ hic

$$N + \mathfrak{N}T + \mathfrak{n}\mathfrak{T} - \frac{d(P + \mathfrak{P}T + \mathfrak{p}\mathfrak{T})}{dx} + \frac{dd(Q + \mathfrak{Q}T + \mathfrak{q}\mathfrak{T})}{dx^2} - \text{ etc.}$$

Ex his autem quousque libuerit ultra progredi, atque abstrusissima problemata resolvere licebit. Qua de methodo quid sentias, Vir Amplissime, etiam atque etiam rogo ut mihi indicare velis. Vale, Vir Celeberrime, mihique favera perge. Dabam Berolini d. 10 Novembr. 1742.

(Responsionem vide *Corresp. T. II. p.* 701.)

## 4.

Viro Celeberrimo atque Amplissimo N. B. S. P. D. L. E.

Quoniam ex litteris Tuis maximum semper fructum percipio, eo majores Tibi me debere gratias agnosco, quo minus Tibi suppetit otium ad litteras meas respondendi. Quamobrem Te, Vir Amplissime, etiam atque etiam rogo, ut frequentiores meas interpellationes benevole excusare velis.

Quod primum de seriebus divergentibus scribis, earum summas dari omnino non posse, quoniam licet in infinitum continuentur, tamen exhauriri nequeant, non mediocriter jam pridem dubitavi, atque etiamnum ambigo. Interim tamen hoc dubium mihi quidem eximi posse videtur, si ad distinctionem inter numerum infinitum determinatum, atque infinitum absolutum attendatur. Quamvis enim statui non possit

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots\ldots+x^{\infty},$$

quia hic numerus terminorum etsi infinitus, tamen tamquam definitus spectatur, atque adeo series revera terminari censetur; tamen sine errore mihi quidem statui posse videtur

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\quad\text{etc.}$$

in infinitum, hoc est seriei nusquam ullo termino constituto. Sic falsum foret

$$0=1-3+5-7+9-\ldots\ldots\pm(2\infty+1),$$

at omni finitionis idea etiam cogitatione sublata, sine errore affirmari potest esse $0=1-3+5-7+9-$ in infinitum. In hac autem opinione eo magis confirmor, quod nullus mihi adhuc obtigerit casus, in quo ejusmodi serierum summatio me in errorem deduxisset.

Quod nunc assertum meum circa radicum imaginariarum proprietatem non solum probas, sed etiam demonstrationem mecum communicare voluisti, maximas Tibi ago gratias. Concedo enim lubentissime, quod postulas, omnem radicem imaginariam aequationis quotcunque dimensionum, etiamsi forma ejus penitus sit incognita, tamen considerari posse tanquam functionem hujusmodi expressionum $a\pm\sqrt{-b}$. Interim tamen si quis de hac veritate dubitaret, fateor me nondum videre, quomodo hoc Tuum assumtum demonstrarem. Me quidem in hoc asserto non parum confirmavit singularis modus resolutionem aequationum altiorum graduum absolvendi, similis fere Cartesiano. Sit proposita aequatio $x^4+px^3+qxx+rx+s=0$, quam resolvi pono in has

$$xx+\alpha x+\beta=0 \quad\text{et}\quad xx+\gamma x+\delta=0.$$

Sint autem $\alpha$ et $\gamma$ radices hujus aequationis $zz+pz+u=0$, et $\beta$ cum $\delta$ radices hujus $zz+tz+s=0$, est enim $\alpha+\gamma=p$ et $\beta\delta=s$. Per has aequationes erit $\alpha\gamma=u$, $\beta+\delta=t$. Comparata vero aequatione proposita cum factoribus assumtis erit: $p=\alpha+\gamma$, $q=\beta+\delta+\alpha\gamma$, $r=\alpha\delta+\beta\gamma$ et $s=\beta\delta$, seu $q=t+u$; deinde ob $r=\alpha\delta+\beta\gamma$ erit eliminando $rr-prt+ppt+ttu-4su=0$. Sunt autem incognitae $t$ et $u$, quarum altera $u$ sublata dat $t^3-qtt-(pp-pr+4s)t-rr+4sq=0$. Definitur ergo incognita $t$ vel $u$ per aequationem cubicam, ideoque semper unus datur valor realis pro $t$ et pro $u$ Praevidere autem licebat has incognitas $t$ et $u$

per aequationem cubicam definiri debere, quia aequatio biquadrata tres tantum diversas resolutiones admittit. Sint enim $a$, $b$, $c$, $d$ radices quatuor, erunt tres ipsius $t$ valores hi: $ab + cd$, $ac + bd$, $ad + bc$. Simili modo si proponatur aequatio sexti gradus $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 +$ etc. $= 0$ ejusque factores ponantur

$$xx + \alpha x + \beta,\ xx + \gamma x + \delta,\ xx + \varepsilon x + \zeta,$$

atque ut ante $\alpha$, $\gamma$, $\varepsilon$ ponantur radices aequationis $z^3 + Azz + Bz + C = 0$, et patebit ex varia sex radicum combinatione quantitatem $C$ quindecim diversos valores induere posse, unde resolutio pendet ab aequatione $15^{ti}$ gradus. Generaliter vero resolutio aequationis $2n$ dimensionum pendebit ab aequatione $1.3.5\ldots\ldots(2n-1)^{mi}$ gradus, qui gradus cum sit impar, una semper dabitur resolutio realis. Neque vero hoc ratiocinium adhuc veritatem evincit; interim tamen viam ad demonstrationem apodicticam fortasse parare potest.

Plurimum autem Tibi, Vir Celeberrime, me obstrictum agnosco pro demonstratione elegantissimae Tuae constructionis trajectoriarum orthogonalium, quam in Actis Lips. 1719 publicaveras. Equidem jam pridem in illius demonstratione eruenda desudaveram, neque tamen alium casum elicui, praeter eum, quo

$$\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} \text{ fit functio ipsius parametri } a \text{ tantum.}$$

Quanquam enim quaesivi quantitatem $n$, per quam aequatio

$$0 = \frac{dy\,(1+pp)}{p} + qda$$

divisa integrabilis reddatur, tamen in mentem mihi non venit, in investigatione ipsius $n$ ipsam aequationem propositam in subsidium vocari posse. Hac igitur methodo Tua plurimae aequationes differentiales expedite integrari possunt. Sit enim proposita aequatio $0 = Pdx + Qdy$, in qua sint $P$ et $Q$ functiones quaecunque ipsarum $x$ et $y$, ita ut sit $dP = Kdx + Ldy$ et $dQ = Mdx + Ndy$. Quaeratur functio $R$, quae illam aequationem multiplicans reddat integrabilem, ita ut $0 = PRdx + QRdy$ integrationem admittat. Debebit ergo diff. $PRdx$, posito $x$ constante, aequari diff. $QRdy$, posito $y$ constanti. Sit $dR = Tdx + Vdy$, erit

$$PVdxdy + LRdxdy = QTdxdy + MRdxdy = -PTdx^2 + MRdxdy, \text{ ob } Qdy = -Pdx.$$

Ergo erit $Pdx\,(Tdx + Vdy) = Rdxdy\,(M - L) = PdxdR$, ideoque

$$\frac{dR}{R} = \frac{Mdy - Ldy}{P} = \frac{Mdy}{P} + \frac{Ldx}{Q} = -\frac{Mdx}{Q} - \frac{Ldy}{P} = -\frac{dQ}{Q} - \frac{dP}{P} + \frac{Ndy}{Q} + \frac{Kdx}{P}.$$

Quoties ergo ex his formulis functio $R$ definiri potest, aequatio proposita integrari poterit. Sit porposita aequatio $dy + yXdx + y^nVdx = 0$, in qua $X$ et $V$ sint functiones quaecunque ipsius $x$, erit $Q = 1$, $P = yX + y^nV$, ideoque

$$M = 0,\ N = 0,\ K = \frac{ydX}{dx} + \frac{y^n dV}{dx},\ L = X + nVy^{n-1}.$$

Quare erit

$$\frac{dR}{R} = \frac{Mdy}{P} + \frac{Ldx}{Q} = Xdx + nVy^{n-1}dx = Xdx - \frac{ndy}{y} - nXdx \quad \text{et} \quad lR = (1-n)\int Xdx - nly$$

$$\text{et } R = \frac{e^{(1-n)\int Xdx}}{y^n}.$$

Integrabilis ergo erit aequatio

$$\frac{e^{(1-n)\int Xdx}\,dy}{y^n} + \frac{e^{(1-n)\int Xdx}\,Xdx}{y^{n-1}} + e^{(1-n)\int Xdx}\,Vdx = 0$$

integrale enim est

$$+\frac{e^{(1-n)\int Xdx}}{(1-n)\,y^{n-1}} + \int e^{(1-n)\int Xdx}\,Vdx = \text{Const.}$$

Quae integratio etsi jam satis est cognita, tamen summam regulae Tuae utilitatem luculenter declarat. Vale Vir Amplissime, mihique favere perge. Dabam Berolini d. 14 Maii 1743.

(Responsionem vide *Corresp. T. II. p.* 708.)

## 5.

Viro Consultissimo et Excellentissimo N. B. S. P. D. L. E.

Quanquam desiderium meum a Te, Vir Excellentissime, proficiendi summum est, tamen tanta erga Te est veneratio mea, ut nisi otium Tibi suppetat, nullas a Te litteras exigam, quoties autem lubuerit mihi respondere, pro hoc insigni munere Tibi gratias maximas habeam. Exquisitissima sunt monita Tua, quae circa summas serierum divergentium affers, Tibique nunc prorsus assentior, eo modo, quo serierum convergentium summa sit quantitas quasi asymtota, ad quam, quo plures seriei termini actu colligantur, eo propius accedatur, ita ut tandem discrepantia omni assignabili quantitate minor evadat. Scilicet si habeatur series convergens quaecunque $a+b+c+d+$ etc., concipi potest Fig. 69. linea curva *abcde* etc. super axe *AS* ita descripta, ut ejus applicatae ad aequalia intervalla axis constitutae sint

$$Aa = a$$
$$Bb = a+b$$
$$Cc = a+b+c$$
$$Dd = a+b+c+d$$
$$\text{etc.}$$

quo facto manifestum est hanc curvam habituram esse asymtotam *TV* axi *AS* parallelam, cujus ab axe distantia veram seriei in infinitum continuatae summam repraesentabit. Sin autem series proposita fuerit divergens, quoniam hoc casu nulla datur asymtota axi parallela, nequidem hujusmodi serierum summas concipere licet, atque adeo ipsi ideae summae contradiceret, qui quantitatem finitam tanquam summam assignare vellet. Cum autem omnis expressio sive fracta, sive irrationalis, sive etiam transcendens in seriem infinitam evolvi queat, etiam vicissim concedendum est, proposita quacunque serie sive convergente sive divergente, dari expressionem quampiam finitam, ex cujus evolutione illa ipsa series oriatur. Quare si a naturali vocis *summae* significatione ita recedere velimus, ut cujusvis seriei summam appellemus non aggregatum omnium terminorum, sed valorem illius quantitatis finitae, ex cujus evolutione illa series resultet, non solum consuetum summandi modum, qui alias contradictionem involveret, tueri, sed etiam, quemadmodum summatio serierum divergentium in errorem non inducat, explicare poterimus. Quoniam igitur definitiones vocabulorum sunt arbitrariae (saltem nisi sibi ipsae pugnent), si hac definitione utar, ut dicam seriei cujusque summam esse valorem ejus expressionis finitae, ex cujus evolutione illa ipsa series oriatur, omnis dubitatio atque repugnantia funditus tolletur. Hocque adeo sensu sine ulla contradictione affirmare licebit esse $1-4+9-16+25-36+$ etc. $=0$, quia haec series oritur ex evolutione expressionis $\frac{1-1}{(1+1)^3}=0$; similique modo erit $1+2+4+8+16+$ etc. $=-1$. Ceterum vero notandum est, quoties series fuerit convergens, tum novam istam summae notionem cum consueta congruere, ex quo nulla confusio ex introductione hujus novae ideae erit metuenda. Hoc posito, quaestio non erit absurda, si quaeram summam hujus seriei maxime divergentis $1-2+6-24+120-720+$ etc.; desidero enim valorem quantitatis finitae, ex cujus evolutione ista series oriatur, et cum ista quantitas sit transcendens, sufficiet ejus valorem tantum proxime assignasse. Inveni autem hunc valorem seu summam fore $=0{,}40478$, sicque minorem quam semissem unitatis. Contra hunc concipiendi modum nihil aliud mihi quidem objici posse videtur, nisi quod ante demonstrari debeat, eandem seriem ex pluribus diversis expressionibus finctis oriri non posse, at vero hoc mihi extra dubium positum videtur.

Si concedatur, radices imaginarias aequationum considerari posse tanquam functiones binomiorum hujusmodi $a + \sqrt{-b}$, tum utique necessario sequitur, aequationes imparium dimensionum semper unam ad minimum habere radicem realem, ac proinde numerum radicum imaginariarum perpetuo esse parem. Verumtamen nondum perspicui quomodo, si posterius concedatur, vicissim et prius consequatur: posterius enim mihi demonstrari posse videtur, nullo habito respectu ad formas radicum imaginariarum. Sit enim proposita aequatio imparium dimensionum quaecunque $x^{2n+1} + \alpha x^{2n} + \beta x^{2n-1} +$ etc. $= 0$, ponoque

$$x^{2n+1} + \alpha x^{2n} + \beta x^{2n-1} + \text{ etc. } = z,$$

atque manifestum est, si statuatur $x = \infty$ fore $z = \infty$, sin autem ponatur $x = -\infty$, fore $z = -\infty$. Tribuendo igitur ipsi $x$ successive omnes possibiles valores inter limites $+\infty$ et $-\infty$ contentos, littera $z$ induet pariter omnes possibiles valores inter limites $+\infty$ et $-\infty$ contentos. Dabitur ergo valor loco $x$ substituendus, qui litterae $z$ valorem inducat $= 0$, isque propterea erit radix ipsius $x$ pro aequatione proposita. Cum igitur hoc summo rigore demonstrari possit, optarem, ut simili modo forma functionalis radicum imaginariarum, quam statuis, demonstrari vel ex hoc ipso fonte derivari posset.

Pro emendatione errorum, quos per festinationem in resolutione aequationis $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ commiseram, gratias ago. Ceterum, uti probe mones, realitas factorum trinomialium multo commodius methodo Cartesii, tollendo secundum terminum, docetur, atque adeo meo judicio hanc demonstrationem perfectissime absolvisti. Quanquam enim aequationes altiorum dimensionum, ad quas pervenitur, actu resolvi nequeant, tamen ad institutum sufficiebat ostendisse, illas aequationes semper habituras esse unam ejusmodi radicem realem, ex qua prodeant factores trinomiales reales, etiamsi hi rarissime assignari queant. Aequatio enim

$$x^{m.2^n} + px^{m.2^n - 1} + qx^{m.2^n - 2} + \text{ etc. } = 0$$

uti egregie mones, pro divisore habebit aequationem

$$x^{2^n} + \alpha x^{2^n - 1} + \beta x^{2^n - 2} + \text{ etc. } = 0,$$

ad quem inveniendum coëfficiens $\alpha$ determinabitur per aequationem tot dimensionum, quot hoc productum continet unitates

$$\frac{2^n.m}{2^n} \cdot \frac{2^n.m - 1}{2^n - 1} \cdot \frac{2^n.m - 2}{2^n - 2} \cdots \frac{2^n(m-1)+1}{1}.$$

Primum autem patet hoc productum semper exhibere numerum integrum; tum vero quaelibet fractio, siquidem $m$ est numerus impar, reducitur ad ejusmodi formam, ut tam numerator quam denominator fiat numerus impar, ex quo tota expressio evadet numerus impar, atque adeo valor $\alpha$, cum definiatur per aequationem imparium dimensionum, poterit esse realis: reliqua vero, quae hinc deducis, Vir Celeberrime, negotium, quod agitabam, prorsus conficiunt. Tota enim res perducitur ad resolutionem aequationis

$$x^{2^n} + qx^{2^n - 2} + rx^{2^n - 3} + \text{ etc. } = 0$$

in qua secundum terminum jam deesse pono. Quodsi ergo hujus bini factores ponantur

$$x^{2^{n-1}} + \alpha x^{2^{n-1} - 1} + \text{ etc. } \quad \text{et} \quad x^{2^{n-1}} - \alpha x^{2^{n-1} - 1} + \text{ etc. } = 0$$

quia est $\alpha$ aggregatum $2^{n-1}$ radicum prioris aequationis, definietur $\alpha$ per aequationem tot dimensionum, quot sunt unitates in hoc numero

$$2 \cdot \frac{2^n - 1}{2^{n-1} - 1} \cdot \frac{2^n - 2}{2^{n-2} - 2} \cdot \text{ etc.}$$

donec ultimus denominator sit $= 1$. Patet autem hunc numerum fore impariter parem, totidemque $\alpha$ habebit radices, quot unitates in isto numero continentur. Quia autem inter has radices quaelibet habet sui negativam, omnes potestates impares ipsius $\alpha$ in aequatione deerunt, ultimus vero terminus absolutus, propterea quod est factum ex omnibus valoribus ipsius $\alpha$, inter quos bini inter se sunt aequales et alter alterius negativus, erit quadratum negativum, cujus radix assignabilis erit per coëfficientes $q, r, s$, etc. Definietur ergo $\alpha$ per hujusmodi aequationem

$$\alpha^{2m} + f\alpha^{2m-2} + \ldots - uu = 0$$

quae semper unam saltem radicem habebit realem; quod sic ostendo: Ponatur $\alpha = \infty$, fietque illa expressio $\alpha^{2m} + f\alpha^{2m-2} + \ldots - uu = \infty$. Tum ponatur $\alpha = 0$, fietque eadem expressio $= -uu$. Tribuendis ergo ipsi $\alpha$ valoribus mediis inter 0 et $\infty$, expressio ipsa induet omnes valores possibiles medios inter $\infty$ et $-uu$; dabitur ergo valor loco $\alpha$ substituendus, qui reddet expressionis valorem $= 0$, isque erit radix ipsius $\alpha$. Casus tantum excipi debet, quo $m = 1$, sed non dubito, quin ista demonstratio ita adornari possit, ut nihil contra excipi queat.

Non perspicio, quam ob causam dubites, an hujus differentialis $PRdx + QRdy$ integrale exhiberi queat, etiamsi sit diff. $PRdx =$ diff. $QRdy$, illa scilicet differentiatione ponendo $x$, in hac vero $y$ constantem. Quodsi enim hoc criterium locum habuerit, integrale non solum mihi videtur assignari posse, sed etiam revera id saltem ope quadraturarum exhibere valeo. Integretur enim differentiale $PRdx$ spectando $y$ tanquam constantem, ita ut integrale evanescat ponendo $x = 0$, quod integrale sit $= Z$. Tum in differentiali $QRdy$ ponatur $x = 0$, atque id integretur, ponaturque integrale $= Y$; quo facto formulae differentialis $PRdx + QRdy$ integrale erit $= Z + Y$. Demonstratio per ea, quae Tu, Vir Excellentissime, docuisti, est facilis, namque differentiando $Z + Y$ Tua methodo, iterum prodit differentiale propositum. Jam dudum autem perspexi hanc speculationem penitus incidere in solutionem problematis: Data aequatione differentiali $dx = pdy$ incompleta, invenire ejus completam $dx = pdy + qda$, quod a Te primum fuisse solutum admonui D$^{\text{num}}$ Clairaut aliosque Geometras Gallos, qui hanc inventionem sibi vindicare voluerunt. Interim tamen non dubito, quin hic adhuc insignes proprietates lateant, quae si essent cognitae, ingens lumen in analysi accenderent, cujus rei, ut nullus dubitandi locus relinquatur, communicabo Tecum solutionem problematis cujusdam mechanici, cujus evolutio universa ad hoc genus pertinet, neque, antequam natura hujusmodi formularum differentialium completarum uberius examinetur, ad finem optatum perduci potest.

Problema hoc est: Catenae uniformis ac perfecte flexilis, si super plano horizontali politissimo jacens utcunque projiciatur, assignare situm, figuram et motum ad quodvis temporis momentum. *Solutio.* Fig. 70. Sumto in plano horizontali recta quacunque $OZ$ pro axe, pervenerit elapso tempore $t$ catena in situm $AMB$. Sit longitudo catenae $AMB = a$, positaque ejus portione quacunque $AM = s$, ducatur ad axem applicata $MP$, voceturque $OP = x$, $PM = y$. Perspicuum jam est $x$ et $y$ esse oportere functiones binarum variabilium $s$ et $t$, pariter ac angulum $AMP$ qui vocetur $= \varphi$. Sit igitur differentiando $dx = ds \sin\varphi + Mdt$ et $dy = ds \cos\varphi + Ndt$, quia posito $t$ constante esse debet $dx^2 + dy^2 = ds^2$. His positis erit primo, ponendo $t$ constans,

$$Oa = \alpha t + \beta - \int \frac{(a - s)\, ds \sin\varphi}{a}, \quad Aa = \gamma t + \delta - \int \frac{(a - s)\, ds \cos\varphi}{a}, \quad Ob = \alpha t + \beta + \int \frac{s ds \sin\varphi}{a}$$

$$\text{et } Bb = \gamma t + \delta + \int \frac{s ds \cos\varphi}{a},$$

posito post singulas has integrationes $s = a$. Porro, si fuerit posito $s$ constante $dM = Pdt$ et $dN = Qdt$, erit

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\int Pds}{\int Qds},$$

spectando in his integrationibus tantum $s$ tanquam variabilem. Aequationes has suppeditaverunt praecepta dynamica, iisque problema perfecte resolvitur, ita ut natura curvae $AMB$ in aequatione

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{\int P ds}{\int Q ds}$$

contineatur. Interim tamen hanc solutionem ad usum accommodare non possum, ita ut hinc motum catenae, si initio figuram quamcunque datam habuerit, ipsique datus motus impressus fuerit, reipsa determinare mihi liceret. Pendent autem $M$ et $N$ ac propterea quoque $P$ et $Q$ ab angulo $\varphi$, quia differentialia illa $dx$ et $dy$ exprimentia sunt completa. Deinde si $t$ constans sumatur atque elementum $ds$ invariabile statuatur, ultima aequatio evolvitur in hanc differentialem secundi gradus

$$Pdd\varphi\cos\varphi+2Pd\varphi^2\sin\varphi-Qdd\varphi\sin\varphi+2Qd\varphi^2\cos\varphi-dPd\varphi\cos\varphi+dQd\varphi\sin\varphi=0.$$

Hac igitur de re ut mihi sententiam Tuam aperire velis, etiam atque etiam rogo. Ceterum solutionem problematis huic affinis, quod mihi Celeb. Patruelis proposuit, quia spatium superest, judicio Tuo subjiciam. In locum catenae superioris problematis, substituit filum inertiae expers tribus aequalibus corpusculis ad aequalia intervalla positis onusti, cujus motus requiritur. Sint Fig. 71. intervalla corpusculorum $AB=BC=a$, atque tempore elapso $=t$ pervenerit filum propositum in situm $ABC$, unde ad rectam $OZ$ pro axe assumtam demittantur perpendicula $Aa$, $Bb$, $Cc$. Ponatur angulus $ABb=\zeta$ et angulus $BCc=\eta$, sitque $r=\zeta+\eta$ et $s=\zeta-\eta$, quibus positis ex theoria motus elicui has aequationes

$$dt=ds\sqrt{\frac{4-\cos^2 s}{2\alpha-\beta+\alpha\cos s}}\quad\text{et}\quad dr=\beta ds\sqrt{\frac{2-\cos s}{(2+\cos s)\ldots{}^*)}}.$$

Ope quadraturarum ergo ex tempore $t$ definiuntur quantitates $r$ et $s$, ex quibus porro erit

$$\zeta=\frac{r+s}{2}\quad\text{et}\quad\eta=\frac{r-s}{2}.$$

Denique vero

$$Oa=At+B-\frac{2}{3}a\sin\zeta-\frac{1}{3}a\sin\eta;\qquad Aa=Ct+D-\frac{2}{3}a\cos\zeta-\frac{1}{3}a\cos\eta;$$

$$Ob=At+B+\frac{1}{3}a\sin\zeta-\frac{1}{3}a\sin\eta;\qquad Bb=Ct+D+\frac{1}{3}a\cos\zeta-\frac{1}{3}a\cos\eta;$$

$$Oc=At+B+\frac{1}{3}a\sin\zeta+\frac{2}{3}a\sin\eta;\qquad Cc=Ct+D+\frac{1}{3}a\cos\zeta+\frac{2}{3}a\cos\eta.$$

Hoc idem problema resolvi quoque, si plura corpora filo fuerint alligata; tum autem separatio variabilium et constructio, uti hic, mihi nondum successit. Ceterum has qualescunque meditationes, ut benevole accipias etiam atque etiam rogo, mihique favere pergas. Vale. Dabam Berolini d. 4 Febr. 1744.

---

*Litterae, quibus* Bernoullius *ad* Euleri *epistolam supra datam respondit, cum in nostra collectione non reperiantur, etiam in* Commercio *(Correspondance) a nobis editio desunt. Sed ipsarum primum autographum, idque curiose scriptum, inter hasce exstat* Euleri *epistolas, quas Bibliotheca Basileensis ex hereditate* Bernoullii *acceptas conservat et nobiscum liberalissime communicare voluit. Ut jam nexus mutui hujus epistolarum commercii elucescat, pro argumenti gravitate, gratum lectoribus id fore confidimus, quod et responsionem* Bernoullianam *hoc loco damus, adjecto etiam postscripto, quod a* Bernoullio *serius* Eulero *missum est, in epistola* Danielis Bernoullii *inclusum.* **Editores.**

*) Vide infra responsionem Cel. Bernoullii.

Viro Celeberrimo Leonhardo Eulero S. P. D. N. B.

Ignosce quaeso quod nondum respondi ad ultimas Tuas litteras ante annum et quod excurrit scriptas. Repeto excusationem jam aliquoties a me allatam, cui et hoc addere debeo, quod per longam desuetudinem ita hebes factus sim, ut vix quicquam proficiam, quando Te in profundis Tuis meditationibus sequi volo. Ne autem diutius in mora sim, postulat donum, quod mihi nuper Dn. Bousquet jussu Tuo misit, consistens in egregio tractatu Tuo de Isoperimetris, pro quo Tibi maximas ago gratias. Hunc librum avide sed obiter inspexi in plagulis adhuc solutis, attente autem perlegam postquam illum a compactore ligatum recepi. Tantum jam perspexi, ut non possim non Tibi impense gratulari et applaudere de inventa elegantissima et genuina methodo hoc problema in latissimo sensu acceptum tractandi. Ego quoque olim observaveram, methodos ab aliis usurpatas in hoc deficere, quod restrictae sint ad eam hypothesin, quae supponit, minimam curvae particulam eadem qua integer arcus maximi vel minimi proprietate gaudere, quem defectum Tu optime supplevisti. Hac occasione Te rogare audeo (quod tacitum apud me servabo) quid sentias de priori solutione directa Patrui mei, quae extat in Commentariis Academiae Regiae A. 1706. Sane ea mihi videtur esse paralogistica, imo nulla. Casu incidit in solutionem veram problematis 1$^{\text{mi}}$, dum posuit $dt$ constantem, quemadmodum etiam casu inventurus fuisset veram solutionem problematis 2$^{\text{di}}$, si ibi non $dt$ sed $dx$ posuisset constantem. Analogiae, ad quas problemata 1 et 2 reduxit, non sunt verae proprietates curvae quaesitae, sed quibusvis curvis competunt, prout alia atque alia differentialis pro constanti adhibetur; vel potius nulli curvae competunt, quia hae analogiae dant aequationem ex terminis heterogeneis constantem. Deinde Taylorus recte objecit, inepte sumi angulos $OF\varphi$ et $O\varphi F$ pro dimidio angulo curvedinis in punctis $F$ et $\varphi$. Praeterea ipsa hypothesis, per quam duo elementa $FO + O\varphi$, et duo elementa $F\omega + \omega\varphi$ ponuntur isoperimetra, deducere videtur ad absurditates, ita ut non possit consistere cum inaequalitate seu variabilitate angulorum $OFJ$ et $\omega FJ$; mihi enim ex conditione Isoperimetri sequi videtur rationem $FJ$ ad $OJ$ sive angulum $OFJ$ fore constantem, contra hypothesin, quae supponit angulum $OFJ$ mutari posse in angulum $\omega FJ$. Altera Patrui solutio, ut et Hermanniana, quae ambae extant in Actis Lips. A. 1718, quoad fundamentum et methodum conveniunt cum Fratris Jacobi solutione, nec ab ea differunt, nisi quod in illis prolixus Jacobi calculus eleganti compendio concinnior redditus fuerit. Caeterum doleo Jacobum a Fratre nimis inique notatum fuisse, quod plures absurditates et contradictiones in solutione sua admiserit, cum tamen omnia quae Jacobus dixit sano sensu explicari, et apparentes contradictiones conciliari queant. Ex. gr. cum dixit, in omnibus aequationibus Tabulae suae litteras $p$ et $q$ augeri minuive posse quantitate quacunque constante $c$, id intelligendum est de maximis vel minimis $\int pdy$, $\int pdt$, $\int qdy$, etc. in quibus $p$ vel $q$ significant ipsas ordinatas curvarum, quarum areae debent esse vel maximae vel minimae, non vero de maximis vel minimis

$$\int\frac{dy}{p},\ \int\frac{dt}{p},\ \int\frac{dy}{q},\ \text{etc.}$$

cum enim illa transeant in haec ponendo $\frac{aa}{p}$, vel $\frac{aa}{q}$ pro $p$ et $q$, patet in his non $p$ vel $q$, sed $\frac{1}{p}$ aut $\frac{1}{q}$ posse augeri vel minui quantitate constante $c$. Neque etiam eadem assertio ita accipi debet, ac si aequationes, quae maximum aliquod vel minimum suppeditant, post talem mutationem semper etiam maximum vel minimum respective praebere debeant; possunt enim per talem mutationem maxima degenerare in minima, et vice versa; quamvis ipse Jacobus, sicut ejus frater, ex inadvertentia hoc non observaverit. Ex. gr. quamvis aequatio

$$dy = \frac{pdx}{\sqrt{(aa - pp)}}$$

praebeat maximum $\int pdy$, attamen haec aequatio

$$dy = \frac{pdx - cdx}{\sqrt{(aa - (p - c)^2)}}$$

potest praebere et maximun $\int pdy$, et minimum $\int pdy$, prout $p$ major est vel minor quam $c$. Sic quoque aequatio

$$dy = \frac{adx}{\sqrt{(bb + 2bp + pp - aa)}}$$

potest dare maximum $\int pdt$, etiamsi crescente $x$ decrescat $p$, quicquid contradicat Johannes, quotiescunque nempe $b - p$ est quantitas affirmativa. Ita etiam, quamvis aequatio

$$dy = \frac{qdt}{\sqrt{(aa + qq)}}$$

satisfaciat maximo $\int qdy$, tamen aequatio generalior

$$\frac{qdt \pm cdt}{\sqrt{(aa + qq \pm 2cq + cc)}} = dy$$

potest dare et maximum et minimum $\int qdy$, illud nempe si $q \pm c$ fuerit quantitas affirmativa, hoc si $q \pm c$ fuerit quantitas negativa. Ad has praedictas tres aequationes generales, quae exhibent maxima vel minima $\int pdy$, $\int pdt$, $\int qdy$, Patruus meus Jacobus potuisset reducere omnes 11 aequationes Tabulae suae. Sed satis de his. Attingam nunc paucis quaedam ex Tua ultima epistola. Gaudeo Te nunc mihi assentiri circa ea, quae dixeram de seriebus divergentibus. Gratum facies, si mihi indicabis ipsam formulam quantitatis transcendentis $= 0{,}40478$, ex cujus evolutione oritur series

$$1 - 2 + 6 - 24 + 120 - 720 + \text{ etc.}$$

Ipse modus concipiendi seriem divergentem, tanquam ortam ex evolutione quantitatis alicujus finitae, nil quicquam habet absurdi, ut contra eum aliquid objici possit, et si vel maxime eadem series ex pluribus diversis expressionibus finitis oriri posset, hinc non sequeretur ejusmodi concipiendi modum esse absurdum; sed hoc sequeretur, ejusmodi expressiones non posse appellari summam, seu valorem seriei divergentis, et hoc magis confirmaret sententiam meam, qua statuo, seriem divergentem nullum habere valorem.

Ego vicissim Tibi assentior in eo, quod attinet ad integrationem aequationis $PRdx + QRdy = 0$. Si paulo attentius considerassem ea, quae in penultima epistola ipse scripsi, non amplius dubitassem, sed facile vidissem, demonstrationem ibi a me allatam inverti posse. Verum quia aliquis haerere posset in sumtione integralis quantitatis $PRdx$ in casu $x = 0$, mallem ego hunc modum integrationis praescribere: Sit $S$ nota integrationis, quando $y$ ponitur constans, et $\sigma$ nota integrationis, quando $x$ ponitur constans. Distinguatur $PRdx$ in membra, in quibus $y$ non reperitur, et in ea, in quibus $y$ reperitur; vocentur illa $Xdx$, haec $pdx$. Pariter distinguatur $QRdy$ in membra, in quibus $x$ non reperitur, et in ea, in quibus $x$ reperitur; vocentur illa $Ydy$, haec $qdy$. Eritque

$$\int PRdx + \int QRdy = \int Xdx + \int Ydy + Spdx = \int Xdx + \int Ydy + \sigma qdy = \text{constanti.}$$

Quod autem sit $Spdx = \sigma qdy$; sic facile demonstro: Sit (Fig. 72.) $AE = CF = dx$, $BE = pdx$ posita constante; per consequens $AG = Spdx$. Sit $AC = FE =$ diff. $AG$ posita $x$ constante, diff. $AC$ positis $y$ et $dy$ constantibus $= DB - AC = DB - FE = DF - BE =$ diff. $BE$, seu diff. $pdx$ positi $x$ et $dx$

constantibus. Sed per hypothesin est quantitas $R$ ita comparata, ut diff. $pdx$ positis $x$ et $dx$ constantibus, debeat esse $=$ diff. $qdy$ positis $y$ et $dy$ constantibus, ergo $AC = qdy$, per consequens $\sigma qdy = AG = Spdx$.

Ad ea, quae dixisti de radicibus imaginariis nihil habeo quod reponam, nisi quod existimem, ideam quantitatis imaginariae sive impossibilis involvere ideam radicis quadratae quantitatis negativae, quia eae quantitates sunt impossibiles, quae neque affirmativae esse possunt neque negativae, quarumque quadrata aut ipsa sunt impossibilia, aut saltem negativa. Problemata, quae in fine subjunxisti de projecta catena vel filo tribus corpusculis onusto, nimis difficilia mihi visa sunt. Malo fundamentum solutionis ex Te discere, quam ingeniolum meum hebetatum eorundem examine diu torquere. Quod superest Deum O. M. rogo, ut luctum ex B. Parentis Tui obitu conceptum minuat, Teque cum Tuis quam optime valere jubeat. Dabam Basileae die 20 Apr. 1745.

P. S. d. 1 Maji 1745. Postquam misi nuperam epistolam, cupido me incessit examinandi solutionem Tuam problematis de filo tribus corpusculis onusto. Scribis Te ex theoria motus elicuisse has aequationes

$$dt = ds \sqrt{\frac{4 - \cos^2 s}{2\alpha^2 - \beta + \alpha\cos s}} \quad \text{et} \quad dr = \beta ds \sqrt{\frac{2 - \cos s}{(2 + \cos s)\ldots}};$$

reliqua in denominatore, quae a sigillo epistolae Tuae obtecta sunt, non possum legere. Mihi videtur has duas aequationes ita constituendas esse

$$dt = ds \sqrt{\frac{4 - (\cos s)^2}{2\alpha - \beta\beta + \alpha\cos s}} \quad \text{et} \quad dr = \beta ds \sqrt{\frac{2 - \cos s}{(2 + \cos s)(2\alpha - \beta\beta + \alpha\cos s)}},$$

ut sit
$$\alpha = \frac{dr^2}{dt^2}(2 + \cos s) + \frac{ds^2}{dt^2}(2 - \cos s), \quad \text{et} \quad \beta = \frac{dr}{dt}(2 + \cos s).$$

*Disquisitiones, quae jam sequuntur de problemate illo mechanico* **Joh. Bernoullii**, *in superiori epistola* **Euleriana** *memorato, manu ipsius* **Nicolai** *conscriptae leguntur in margine primi autographi, quod postscriptum illud jam ante ad* **Eulerum** *missum exhibet, et eo magis mentione dignae sunt, quod nunquam ad* **Eulerum** *pervenisse videntur.* **Editores.**

(Fig. 73.) $AB = BC = ab = bc = 1$

$AD = l, \quad BE = p$

$BD = m, \quad CE = q$

$ll + mm = 1 = pp + qq, \quad ldl = -mdm$

$pdp = -qdq$

angl. $ABD = \zeta$, angl. $BCE = \eta$

$$A\alpha = dx, \quad a\alpha = dy, \quad B\beta = dx + dl, \quad b\beta = dy + dm, \quad C\gamma = dx + dl + dp, \quad c\gamma = dy + dm + dq$$

tempus per $Aa, Bb, Cc = dt$. Ob motuum corporum $A, B, C$, et centri gravitatis tempusculo $dt$ uniformitatem est

$$\frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{3} \text{ h. e. } dx + \frac{2}{3}dl + \frac{1}{3}dp = Adt, \text{ hinc } x = At + B - \frac{2}{3}l - \frac{1}{3}p$$

$$\text{pariter } \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{3} \text{ h. e. } dy + \frac{2}{3}dm + \frac{1}{3}dq = Cdt, \text{ hinc } y = Ct + D - \frac{2}{3}m - \frac{1}{3}q$$

$$\text{velocitas secundum } AD = \frac{A\alpha}{dt} = \frac{dx}{dt} = \frac{Adt - \frac{2}{3}\,dl - \frac{1}{3}\,dp}{dt}, \quad \text{vis acceleratrix secundum } AD = al$$

$$\text{〃 〃 } AF = \frac{a\alpha}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{Cdt - \frac{2}{3}\,dm - \frac{1}{3}\,dq}{dt}, \quad \text{〃 〃 〃 } AF = am$$

$$\text{〃 〃 } C\gamma = \frac{C\gamma}{dt} = \frac{dx + dl + dp}{dt} = \frac{Adt + \frac{1}{3}\,dl + \frac{2}{3}\,dp}{dt}, \quad \text{vis retard. secundum } CG = bp$$

$$\text{〃 〃 } CH = \frac{c\gamma}{dt} = \frac{dy + dm + dq}{dt} = \frac{Cdt + \frac{1}{3}\,dm + \frac{2}{3}\,dq}{dt}, \quad \text{〃 〃 } CE = bq$$

Posita $dt$ constante est

$$\left.\begin{array}{ll} \text{incrementum velocitatis secundum} & AD = \dfrac{-\frac{2}{3}ddl - \frac{1}{3}ddp}{dt} = aldt \\ \text{〃 〃 〃} & AF = \dfrac{-\frac{2}{3}ddm - \frac{1}{3}ddq}{dt} = amdt \end{array}\right\} \text{hinc } \frac{2ddl + ddp}{2ddm + ddq} = \frac{l}{m} = \frac{-dm}{dl}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{decrementum 〃 〃} & C\gamma = \dfrac{-\frac{1}{3}ddl - \frac{2}{3}ddp}{dt} = bpdt \\ \text{〃 〃 〃} & CH = \dfrac{-\frac{1}{3}ddm - \frac{2}{3}ddq}{dt} = bqdt \end{array}\right\} \text{hinc } \frac{ddl + 2ddp}{ddm + 2ddq} = \frac{p}{q} = \frac{-dq}{dp}$$

Praecedentes aequationes reductae praebent

$$\left.\begin{array}{r} 2dlddl + dlddp + 2dmddm + dmddq = 0 \\ dpddl + 2dpddp + dqddm + 2dqddq = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 2mddl + mddp - 2lddm - lddq = 0 \\ qddl + 2qddp - pddm - 2pddq = 0 \end{array}\right\}$$

Priores duae additae et integratae praebent $dl^2 + dm^2 + dp^2 + dq^2 + dldp + dmdq =$ Const. seu $d\zeta^2 + d\eta^2 + (dldp + dmdq) =$ (ob $dl = md\zeta$, $dm = -ld\zeta$, $dp = qd\eta$, $dq = -pd\eta$) $d\zeta^2 + d\eta^2 + (pl + qm)\, d\zeta d\eta = d\zeta^2 + d\eta^2 + (d\zeta d\eta \cos(\zeta - \eta)) =$ Const. Ponendo

$$\zeta + \eta = r, \; \zeta - \eta = s, \quad \text{seu} \quad \zeta = \frac{r+s}{2}, \; \eta = \frac{r-s}{2},$$

habetur

$$\frac{2dr^2 + 2ds^2 + \cos s\,(dr^2 + ds^2)}{2} = \text{const.} \quad \text{h. e.} \quad dr^2\,(2 + \cos s) + ds^2\,(2 - \cos s) = \alpha dt^2.$$

Posteriores duae aequationes additae et integratae praebent

$$2mdl + mdp - 2ldm - ldq + qdl + 2qdp - pdm - 2pdq = 2mmd\zeta + mqd\eta + 2lld\zeta + lpd\eta + mqd\zeta + 2qqd\eta$$
$$+ lpd\zeta + 2ppd\eta = 2d\zeta + 2d\eta + (lp + mq)\,(d\zeta + d\eta) = (d\zeta + d\eta)\,(2 + \cos(\zeta - \eta)) = dr\,(2 + \cos s) = \text{Const.}\,\beta dt.$$

## 6.

Viro Celeberrimo atque Amplissimo N. B. S. P. D. L. E.

Etsi litterae Tuae, Vir Celeberrime, maximo gaudio me afficiunt, summumque mihi fructum afferunt, tamen quoniam non ignoro in aliis diversissimi generis studiis Tibi plurimum esse elaborandum, ne Tibi sim molestus, frequentiores a Te litteras exigere non ausim, sed hoc tantum a Te etiam atque etiam rogo, ut meas benevole accipere, ad easque non nisi cum satis otii fueris nactus, respondere velis. Gratissimum mihi fuit ex Te intelligere opusculum meum de Isoperimetris, vel potius Isodynamis Tibi non displicere; argumentum mihi quidem ita comparatum videtur, ut in eo non errare sit difficillimum. De solutione Celeb. Joh. Bernoullii, quae extat in Comment. Academiae Regiae Parisinae 1706, Tecum plane sentio, neque etiam dubito, quin ipse Auctor, si sententiam suam aperte declarare voluerit, sit dissensurus. Cum autem ejus defensionem semel tanto ardore suscepisset, mirum non est, quod errorem profiteri nunquam voluerit. Ob eandem autem causam omnes occasiones data opera evito, meam sententiam de ista solutione indicandi. Tibi autem, Vir Celeb., maximas gratias habeo, quod Tuum judicium cum tam egregiis animadversionibus mecum communicare volueris. Saepenumero certe difficillimum est dignoscere, utrum formulae cujuspiam inventae valor sit maximus an minimus, praesertim si plures quantitates indefinitae in eam ingrediantur. Tanta est enim affinitas inter maximum et minimum, ut eadem quantitas seu functio $V$, quae formulam $A+V$ reddat maximam, eadem hanc formulam solo signo mutato $A-V$ exhibeat minimam. Sic cum aequatio

$$dy=\frac{pdx}{\sqrt{(aa-pp)}}$$

praebeat maximum $\int pdy$, vicissim haec aequatio

$$dy=\frac{-pdx}{\sqrt{(aa-pp)}},$$

quae quidem in illa ob signi radicalis ambiguitatem jam continetur, $\int pdy$ faciet minimum, quod clarius patebit si, uti fecisti, pro $p$ scribatur $p\pm c$.

Quod ad valorem seriei divergentis $1-1+2-6+24-120+$ etc. attinet, puto equidem dari lineam curvam, cujus abscissa si fuerit $=x$, applicata esse queat

$$y=x-1x^2+2x^3-6x^4+24x^5-120x^6+\text{etc.}$$

unde si in hac curva ponatur abscissa $x=1$, applicata $y$ exhibebit valorem seriei

$$1-1+2-6+24-120+\text{ etc.}$$

Potest autem natura hujus curvae per aequationem differentialem exprimi. Cum enim sit

$$\frac{dy}{dx}=1-2x+6x^2-24x^3+120x^4-720x^5+\text{ etc.}$$

erit ob utriusque seriei similitudinem

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{xx},\quad\text{seu}\quad dy+\frac{ydx}{xx}=\frac{dx}{x},$$

quae est aequatio differentialis pro curva quaesita, cujus integrale, si $e$ denotat numerum, cujus logarithmus $=1$, erit

$$e^{-\frac{1}{x}}y=\int\frac{e^{-\frac{1}{x}}dx}{x},$$

quod integrale ita sumi debet, ut evanescat posito $x=0$; erit ergo hinc

$$y=e^{\frac{1}{x}}\int\frac{e^{-\frac{1}{x}}dx}{x},$$

hujusque proinde expressionis valor facto $x=1$ dabit valorem seriei propositae. Erit ergo summa seriei propositae

$$=e\int\frac{e^{-\frac{1}{x}}dx}{x}=\int\frac{e^{1-\frac{1}{x}}dx}{x},$$

posito post integrationem $x=1$. Ponatur $e^{1-\frac{1}{x}}=z$; erit posito $x=0$, $z=0$, et posito $x=1$, $z=1$; unde summa seriei erit $=\int\frac{dz}{1-lz}$, integrali ita sumto, ut evanescat posito $z=0$, deinde vero facto $z=1$. Sit porro $z=1-t$, erit summa seriei $=\int\frac{-dt}{1-l(1-t)}$, integrali ita sumto, ut evanescat posito $t=1$, tumque facto $t=0$. Jam ob

$$l(1-t)=-t-\frac{1}{2}tt-\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{4}\quad t^4\text{etc.}$$

habebitur summa seriei

$$=\int\frac{-dt}{1+t+\frac{1}{2}tt+\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{4}t^4+\text{ etc.}}.$$

$$\text{Sit}\quad \frac{1}{1-l(1-t)}=1+\alpha t+\beta t^2+\gamma t^3+\delta t^4+\text{ etc.}$$

erit integrale

$$=-t-\frac{1}{2}\alpha t^2-\frac{1}{3}\beta t^3-\frac{1}{4}\gamma t^4-\frac{1}{5}\delta t^5-\text{ etc.}\quad +1+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{3}\beta+\frac{1}{4}\gamma+\frac{1}{5}\delta+\text{ etc.}$$

Fiat jam $t=0$, erit seriei divergentis $1-1+2-6+24-120+720-$ etc. valor

$$=1+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{3}\beta+\frac{1}{4}\gamma+\frac{1}{5}\delta+\text{ etc.}$$

Est vero series haec valde convergens ob

$$\begin{aligned}
&\alpha\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &&=-1\\
&\beta=-\alpha-\frac{1}{2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &&=+\frac{1}{2}\\
&\gamma=-\beta-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{3}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &&=-\frac{1}{3}\\
&\delta=-\gamma-\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{4}\ \ldots\ldots\ldots\ldots &&=+\frac{1}{6}\\
&\varepsilon=-\delta-\frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{3}\beta-\frac{1}{4}\alpha-\frac{1}{5}\ \ldots\ldots\ldots &&=-\frac{7}{60}\\
&\zeta=-\varepsilon-\frac{1}{2}\delta-\frac{1}{3}\gamma-\frac{1}{4}\beta-\frac{1}{5}\alpha-\frac{1}{6} &&=+\frac{19}{360}\\
&\eta=-\zeta-\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{1}{3}\delta-\frac{1}{4}\gamma-\frac{1}{5}\beta-\frac{1}{6}\alpha-\frac{1}{7} &&=-\frac{3}{70}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

ergo seriei propositae $1-1+2-6+24-$ etc.

$$\text{valor}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}+\frac{1}{30}-\frac{7}{360}+\frac{19}{2520}-\frac{3}{560}+\text{ etc.}$$

$$\text{differentiae } 1^{\text{mae}}\quad \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{20},\ \frac{1}{72},\ \frac{1}{84},\ \frac{11}{5040},\ \text{etc.}$$

$$\text{differentiae } 2^{\text{dae}}\quad \frac{1}{6},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{30},\ \frac{13}{360},\ \text{etc.}$$

etc.

hujus autem seriei non difficulter summa vero proxima invenitur, prodibitque fere 0,59521. Ceterum non mediocriter gaudeo, Tibi meum series divergentes considerandi modum probari, sic utique rectius dixerim esse 0,59521 valorem illius expressionis finitae, ex cujus evolutione series divergens $1-1+2-6+$ etc. nascatur. Vix autem crediderim ullum dari casum, quo eadem series divergens ex evolutione plurium formularum diversarum oriri queat.

Fundamenta solutionis meae problematis de motu catenae, seu plurium corpusculorum filo connexorum lubentissime judicio Tuo, Vir Amplissime, subjiciam. Utor ad hoc lemmatibus quibusdam, quorum ratio ex dynamicis facillime constat:

I. Si corpus secundum rectam $AB$ motu quocunque feratur, cujus massa sit $A$; si tempore $t$ elapso confecerit spatium $AP=x$, erit ejus celeritas in $P=\frac{dx}{dt}$, et vis id in $P$ secundum $PB$ sollicitans $=\frac{2Addx}{dt^2}$, posito $dt$ constante.

II. Si (Fig. 74) corpus in linea curva $EM$ moveatur utcunque, atque tempore $t$ elapso versetur in $M$, quod punctum determinetur coordinatis $AP = x$, $PM = y$, corporisque motus resolutus concipiatur secundum directiones $Mp$ et $Mm$, ipsis $x$ et $y$ parallelas, erit celeritas in directione $Mp = \frac{dx}{dt}$, et in directione $Mm = \frac{dy}{dt}$. Tum vero si massa corporis sit $= A$, erit vis sollicitans corpus secundum $Mp = \frac{2\,Addx}{dt^2}$, et secundum $Mm = \frac{2\,Addy}{dt^2}$.

His jam praemissis sint (Fig. 75) tria corpuscula $L$, $M$, $N$, filo connexa, quae super plano utcunque moveantur. Pervenerint ea elapso tempore $t$ in situm, quem figura exhibet. Sumta recta $AB$ pro axe, ad eamque demissis perpendiculis $LP$, $MQ$, $NR$, vocentur $AP = x$, $PL = y$, $AQ = x'$, $QM = y'$, $AR = x''$, $RN = y''$ et sit longitudo fili $LM = a$, ejus inclinatio ad axem $AB = \varphi$, longitudo fili $MN = a'$, ejusque inclinatio ad axem $= \varphi'$; erit $x' - x = a\cos\varphi$, $y' - y = a\sin\varphi$, $x'' - x' = a'\cos\varphi'$ et $y'' - y' = a'\sin\varphi'$. Tum vero per lemma secundum necesse est, ut corpusculum $L$ sollicitetur . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\text{secundum } Lp \text{ vi } = \frac{2\,Lddx}{dt^2}, \quad \text{secundum } Ll \text{ vi } = \frac{2\,Lddy}{dt^2};$$

corpusculum $M$ vero

$$\text{secundum } Mq \text{ vi } = \frac{2\,Mddx'}{dt^2}, \quad \text{secundum } Mm \text{ vi } = \frac{2\,Mddy'}{dt^2};$$

corpusculum denique $N$ . . . . . . . . . . . . . . .

$$\text{secundum } Nr \text{ vi } = \frac{2\,Nddx''}{dt^2}, \quad \text{secundum } Nn \text{ vi } = \frac{2\,Nddy''}{dt^2}.$$

Ponatur nunc tensio fili $LM = P$, fili $MN = Q$, atque a vi $P$ corpus $L$ urgebitur secundum $Lp$ vi $= P\cos\varphi$, secundum $Ll$ vi $= P\sin\varphi$; corpus $M$ secundum $M\xi$ vi $= P\cos\varphi$, secundum $MQ$ vi $= P\sin\varphi$. Deinde a tensione $Q$ fili $MN$ corpus $M$ urgebitur secundum $Mq$ vi $= Q\cos\varphi'$, secundum $Mm$ vi $= Q\sin\varphi'$, at corpus $N$ secundum $N\varrho$ vi $= Q\cos\varphi'$, secundum $NR$ vi $= Q\sin\varphi'$. Hae vires nunc illis, quae ex consideratione motus sunt elicitae, aequales esse debent, unde obtinentur sequentes aequationes:

$$\frac{2\,Lddx}{dt^2} = P\cos\varphi, \quad \frac{2\,Mddx'}{dt^2} = Q\cos\varphi' - P\cos\varphi, \quad \frac{2\,Nddx''}{dt^2} = -\,Q\cos\varphi'$$

$$\frac{2\,Lddy}{dt^2} = P\sin\varphi, \quad \frac{2\,Mddy'}{dt^2} = Q\sin\varphi' - P\sin\varphi, \quad \frac{2\,Nddy''}{dt^2} = -\,Q\sin\varphi'.$$

Quae aequationes cum superioribus conjunctae sufficient ad quantitates $P$, $Q$, $\varphi$ et $\varphi'$ eliminandas, atque problema perfecte solvent, uti facillime perspicies.

Vale, Vir Amplissime, mihique favere perge. Dabam Berolini d. 17 Julii 1745.

P. S. Dum haec de serie divergenti $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 -$ etc. scripsi, in alium modum quantitatem finitam, ex qua nascitur, exprimendi incidi, qui ita se habet

$$1 - a + 2a^2 - 6a^3 + 24a^4 - 120a^5 + \text{etc.} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{a}{1 + \cfrac{a}{1 + \cfrac{2a}{1 + \cfrac{2a}{1 + \cfrac{3a}{1 + \cfrac{3a}{1 + \cfrac{4a}{1 + \cfrac{4a}{1 + \cfrac{5a}{1 + \cfrac{5a}{1 + \text{etc.}}}}}}}}}}}$$

ex qua expressione facile limites, inter quos ille valor contineatur, assignantur, qui quantumvis prope libuerit ad rationem aequalitatis accedant. Sic si $a = 1$ valorque quaesitus ponatur

$$1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + \text{etc.} = s, \quad \text{erit}$$

$$\begin{array}{l} s < \frac{1}{1},\ s < \frac{2}{3},\ s < \frac{8}{13},\ s < \frac{44}{73},\ s < \frac{300}{501},\ s < \frac{2420}{4051},\ s < \frac{22460}{37633} \\ s > \frac{1}{2},\ s > \frac{4}{7},\ s > \frac{20}{34},\ s > \frac{124}{209},\ s > \frac{920}{1546},\ s > \frac{7940}{13327},\ s > \frac{78040}{130922} \end{array} \quad \text{etc.}$$

Hinc in fractionibus decimalibus collegi valorem ipsius $s$ contineri intra hos limites 0,5963107 et 0,5963764, quorum posterior multo propior est veritati, quam prior, ita ut revera quasi sit $s = 0{,}5963475922$. Fallax ergo fuit modus a me ante adhibitus, seu saltem non nimis aptus ad appropinquandum, quo inveneram $s = 0{,}59521$. Hoc itaque valore ab 1 subtracto, erit valor (seu uti vocare volueris) seriei

$$1 - 2 + 6 - 24 + 120 - 720 + \text{etc.} = 0{,}4036525,$$

qui in meis praecedentibus perperam erat 0,40478. Simili autem modo inveni fore generaliter

$$1 - ma + m(m+n)a^2 - m(m+n)(m+2n)a^3 + m(m+n)(m+2n)(m+3n)a^4 - \text{etc.} =$$

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{ma}{1 + \cfrac{na}{1 + \cfrac{(m+n)a}{1 + \cfrac{2na}{1 + \cfrac{(m+2n)a}{1 + \cfrac{3na}{1 + \cfrac{(m+3n)a}{1 + \cfrac{4na}{1 + \cfrac{(m+4n)a}{1 + \text{etc.}}}}}}}}}}$$

ex qua expressione arbitror, non contemnendas conclusiones derivari posse.

Habere autem seriem $z - 1z^2 + 2z^3 - 6z^4 + 24z^5 - 120z^6 + 720z^7 - \text{etc.}$ valorem determinatum, sequenti modo mihi demonstrare posse videor. Concipiatur curva, cujus abscissa existente $= x$, applicata sit $y = \frac{1}{1 - lx}$, erit hujus curvae area

$$= \int \frac{dx}{1 - lx} = \frac{x}{1 - lx} - \frac{1x}{(1 - lx)^2} + \frac{1.2.x}{(1 - lx)^3} - \frac{1.2.3.x}{(1 - lx)^4} + \text{etc.}$$

quae cum habeat determinatam quantitatem, sequitur quoque hanc seriem valorem determinatum habere.

Quod luctum mihi ex morte Patris mei inflictum consolatione Tua lenire volueris, maximas Tibi ago gratias, Deumque T. O. M. rogo, ut Te cum Tuis incolumem et ab omnibus calamitatibus immunem servare velit!

His absolutis accipio schedulam Tuam litteris Celeb. Dan. Bernoullii inclusam, in qua lapsum formularum mearum recte annotas, quem ipse ignoraveram. In scripto enim meo, unde istas formulas exscripseram, aliis usus eram litteris constantibus, ad legem homogeneitatis nondum accommodatis, quarum loco inter describendum alias litteras substitui, sicque per errorem evenit, ut alteram formulam ponerem

$$dr = \beta ds \sqrt{\frac{2 - \cos s}{(2 + \cos s)(2\alpha - \beta + \alpha \cos s)}},$$

cum scribere debuissem

$$dr = ds \sqrt{\frac{\beta(2 - \cos s)}{(2 + \cos s)(2\alpha - \beta + \alpha \cos s)}};$$

ita ut mihi sit $\beta$, quod Tu per $\beta\beta$ in emendatione exprimis. Sic autem formula prior

$$dt = ds \sqrt{\frac{4 - (\cos s)^2}{2\alpha - \beta + \alpha \cos s}}$$

recte se habet.

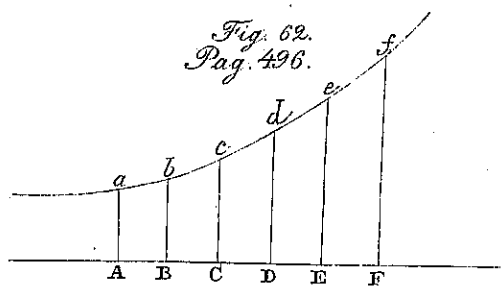


Fig. 62. Pag. 496.

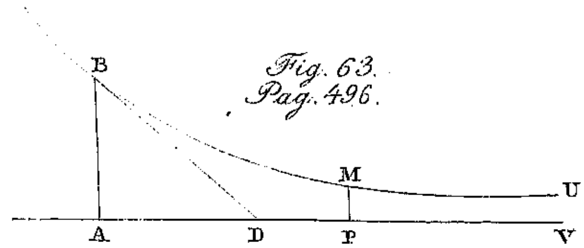


Fig. 63. Pag. 496.

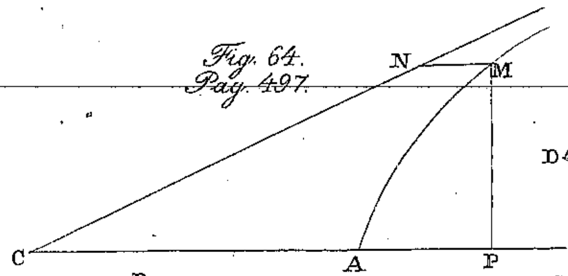


Fig. 64. Pag. 497.

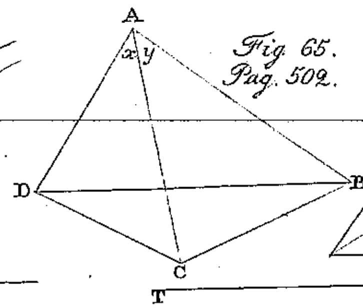


Fig. 65. Pag. 502.

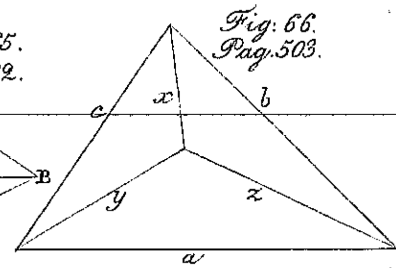


Fig. 66. Pag. 503.

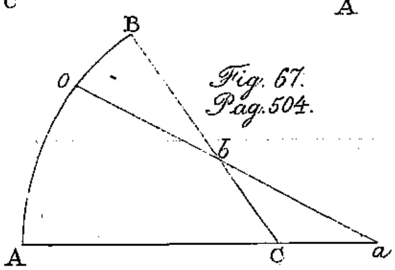


Fig. 67. Pag. 504.

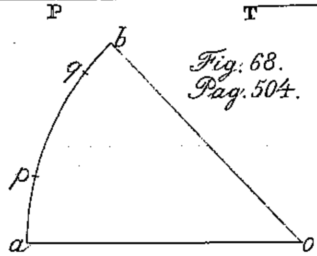


Fig. 68. Pag. 504.

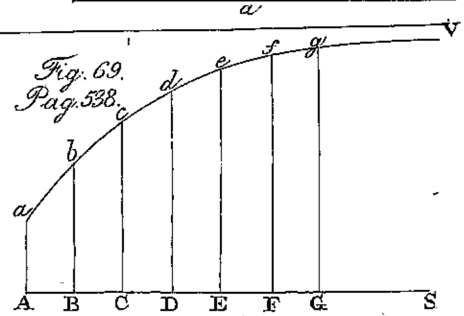


Fig. 69. Pag. 538.

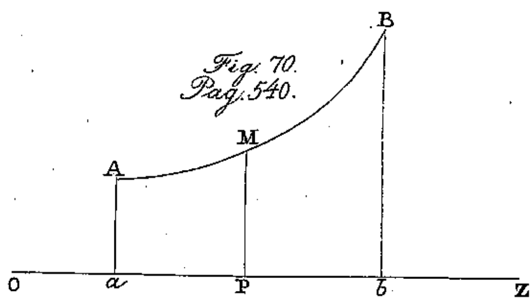


Fig. 70. Pag. 540.

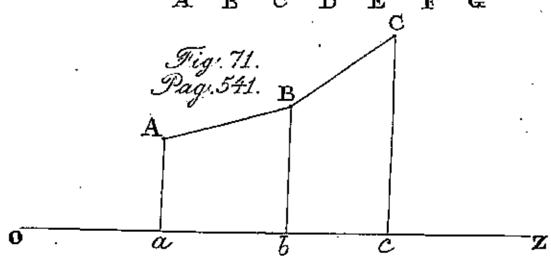


Fig. 71. Pag. 541.

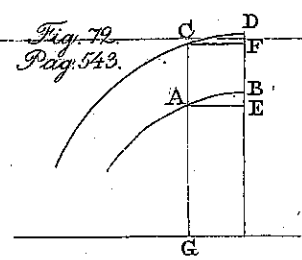


Fig. 72. Pag. 543.

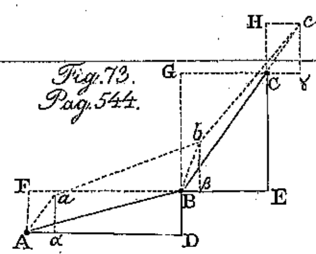


Fig. 73. Pag. 544.

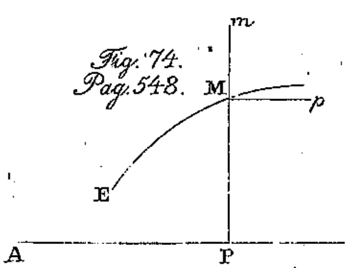


Fig. 74. Pag. 548.

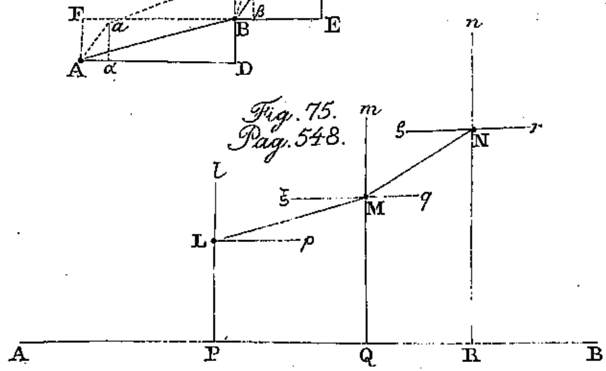


Fig. 75. Pag. 548.