1862

Vera aestimatio sortis in ludis

Leonhard Euler

XV.

Vera aestimatio sortis in ludis.

Multis laborat difficultatibus mensura sortium seu expectationum, quas habent collusores vel de deposito certantes, vel victi victori designatam pecuniae summam solvere obligati. Ea nimirum mensura, cujus fundamenta Paschalius posuit, et post eum Hugenius, Jac. Bernoulli aliique celeberrimi viri insigniter excoluerunt. Secundum horum sententiam non imprudenter ago, si ludum suscipio, quo aeque facile evenire potest, ut centum rublones vel accipiam, vel perdam. Sed si omnes meae opes tantum 100 R. valent, imprudentissime mihi acturum videor hunc ludum suscipiens, lucrum enim respectu damni, quod aeque facile accidere potest, nequaquam satis est grande. Casu secundo consequor 100 R., eoque ergo duplo ditior fio; casu adverso vero teneor meos 100 R. alteri tradere, hoc igitur in extremam paupertatem pervenio, et infinities pauperior fio. Quis autem sanus se extremae paupertati et deterrimae conditioni exponere volet, ut duplo tantum ditior reddatur? Sin vero bona mea multo essent majora et fere infinita, tunc minus dubitarem hujusmodi ludum inire, cum casu secundo tanto fere efficiar ditior quanto adverso pauperior.

Maxime hujus rei veritas evincitur sequenti ludo: Promittitur ipsi A jactus tessera instituenti, si numerus punctorum fuerit par, solvere 1 R.; si secundi jactus numerus punctorum fuerit par, pro eo solvere 2 R.; pro tertio, si punctorum numerus itidem par sit, 4 R., pro quarto 8 R. et ita porro, quoad impar accidat punctorum numerus, quo in casu nihil accipit A, ludusque finitur. Quaeritur expectatio ipsius A seu quanti hanc conditionem alii vendere fas sit. Invenitur autem ex regula ab auctoribus citatis tradita, expectatio ipsius A valere infinitum rublonum numerum. Egregie vero hic interrogat clariss. Nicolaus Bernoulli, quis tam esset stolidus, qui non mallet 20 R. accipere, quam propositam conditionem. Ex quo maxime elucet discrepantia inter aestimationem sortis secundum regulas et eam, quam sanae mentis homo esset facturus, quippe regulae requirunt innumeros rublones tanquam aequivalens ludi propositi, hic vero viginti rublonibus merito se contentum esse posse putat, eumque amentem existimat, qui vel 20 R. tantum pro hac conditione soluturus esset. Sed in hac quaestione, ut in omnibus aliis praecipue attendere convenit ad opes ejus, cujus sors quaeritur, quo enim quisque plus habet, pluris etiam hujusmodi conditiones aestimabit, et cui infinitae sunt opes, is ludum propositum infinito pecuniae numero emere ratione posset, parte tamen infinitesima tantum suarum opum. Regulae igitur aestimandarum sortium expositae ad opulentissimos pertinent homines, aut si id, quod ludo acquiri et amitti potest, rationem habet minimam ad opes collusorum. Si vero collusoribus opes sint finitae et lucra damnaque rationem finitam ad opes teneant, regulae illae correctionem desiderant. Nisi enim hoc praestatur, homines ad eas aestimandae sortis suae causas confugere tuto nequeunt, et ita illae nullius prorsus essent usus. Quocirca ad veram cujusque sortis existimationem indagandam necesse est, praeter ludi conditiones etiam opes ludentium considerare et conclusiones ab iis pendentes conficere. Is ergo ludus mihi non aequus videtur, quo a vel lucror vel perdo, sed is demum justus est censendus, quo a vicibus vel ditior vel pauperior reddor, siquidem utrumque aeque facile accidere potest, et in hoc casu mihi perinde est ludum sive suscipere sive recusare, ad illum vero ludum nullo modo accederem, nisi essem ditissimus. Sed id etiam multo magis est certum, eum esse stultissimum putandum, qui mecum secundum posteriorem conditionem ludum suscipere vellet, et mihi 100 v. gr. R. habenti, si lucrarer 100 R., solvere, si vero perderem tantum 50 R., a me recipere esset contentus. Ex hoc igitur injustitia omnium ludorum perspicitur, nisi instituantur ab hominibus infinite divitibus. Quantae autem cujusque sunt opes et divitiae, non tantum ex argenti et bonorum quantitate, sed praeterea ex ejus studiis et facultatibus, ex quibus ei quoque foenora affluere possunt. Hoc igitur modo cujusvis hominis opes determinari convenit, simulque pecuniae quantitas aequivalens definiri potest. Quamobrem opibus cujusvis certam quandam argenti quantitatem substituere licebit, quam status ejus nomine in sequentibus appellabo, atque propterea quispiam in duplo meliorem statum pervenire dicetur, cujus opes duplo fiunt majores, vel potius qui censet se duplo opulentiorem esse factum. Is enim demum duplo ditior est aestimandus, qui aeque proclivis est duplam argenti summam erogare in casu, quo antea simplam tantum expendere non dubitavit. His ergo praemissis, qui in ludo, vel negotio quodam duos casus habet objectos aeque proclives, quorum altero in statum b, altero in statum c reducitur, ejus status valere putandus est $\sqrt{bc}$. Hic enim status tanto esse debet minor altero b, quanto est major altero c. Qui igitur eum in statum $\sqrt{bc}$ collocare promiserit, ei sortem suam cedere jure potest. Simili modo, qui tres obvios habet casus, quorum unus ipsum in statum b, secundus in statum c, et tertius in statum d constituit, ejus status valere $\sqrt[3]{bcd}$ dicendus est, aut ab alio, ut illi sortem suam cedat, in hunc statum $\sqrt[3]{bcd}$ constitui debet.

Regula ex his habetur haec: omnes status, qui singulis casibus evenire possunt, in se invicem multiplicentur et ex facto radix dignitatis tanti gradus, quot sunt casus, extrahatur, erit haec valor status expectationi aequivalentis. Secundum methodum hactenus usitatam oportet omnes status, qui singulis casibus evenire possunt, in unam summam conjicere, eamque per casuum numerum dividere. Discrimen igitur inter has duas methodos in hoc consistit, quod nostra multiplicatione utitur, quando altera additione; item elevatione, quando haec ipsa multiplicatione, sive nos operationes geometrice instituimus, illi vero arithmetice, ita ut quas operationes hi ad ipsos status accommodant, nos easdem in statuum logarithmos transferamus, ejusque quod prodit logarithmi numerus respondens nobis indicat statum ludentis quaesitum. Sint m casus, quibus in statum a, n casus, quibus in quibus in etc. constituor. Erit status meus medius, seu expectationem meam repraesentans

$$\sqrt[m+n+p]{a^m b^n c^p};$$

nam $m+n+p$ est numerus omnium casuum, et $a^m b^n c^p$ est factum omnium statuum, qui singulis vicibus evenire possunt. Status medius vero ex regulis Hugenianis est

$$\frac{ma+nb+pc}{m+n+p},$$

cui similis nostrae formulae logarithmus

$$\frac{mla+nlb+plc}{m+n+p}.$$

Valeat status meus A et oblati mihi sint casus m, quibus a lucror, seu quibus in statum $A+a$ constituor, casus vero n, quibus b lucror, seu in statum $A+b$ pervenio, casusque p, quibus c lucror, ideoque statum $A+c$ adipiscor, erit status meus expectandus

$$\sqrt[m+n+p]{(A+a)^m (A+b)^n (A+c)^p};$$

aestimandus igitur sum lucrari

$$\sqrt[m+n+p]{(A+a)^m (A+b)^n (A+c)^p}-A.$$

Si ponatur A esse infinities majus quam a, b et c, erit

$$(A+a)^{\frac{m}{m+n+p}} = A^{\frac{m}{m+n+p}} + \frac{mA^{\frac{-n-p}{m+n+p}}a}{m+n+p};$$

$$(A+b)^{\frac{n}{m+n+p}} = A^{\frac{n}{m+n+p}} + \frac{nA^{\frac{-m-p}{m+n+p}}b}{m+n+p} \quad \text{et}$$

$$(A+c)^{\frac{p}{m+n+p}} = A^{\frac{p}{m+n+p}} + \frac{pA^{\frac{-m-n}{m+n+p}}c}{m+n+p},$$

horum factum est $A+\frac{pc+nb+ma}{p+n+m}$, a quo si auferatur A habebitur

$$\frac{ma+nb+pc}{m+n+p},$$

quod est valor lucri mei, atque eadem est formula, ac si lucrum expectationis meae ex regulis Hugenii deduxissem. Ex quo id perspicitur, quod initio annotavi, si status colludentium infinite sint magni, regulas traditas veram cujusque expectationem praebere. In formula vero nostra, expectandum statum praebente, facile perspicitur, si litterae a, b, vel c loco lucri detrimentum significent, iis signum $-$ praefigi debere.

Sit unus casus, quo ego bona A possidens adipiscor a, et unus, quo perdo b, erit status meus expectandus $=\sqrt{(A+a)(A-b)}$, qui valor, si major fuerit quam A, lucrari spero, et hic ludus statum meum meliorem efficere censendus est; gratis igitur conditionem hanc alii non cedo, sed ab eo postulo, ut mihi solvat $\sqrt{(A+a)(A-b)}-A$, quo in statum speratum collocer.

Contra autem si $\sqrt{(A+a)(A-b)}$ minor fuerit quam A, ludus ad meum damnum dirigitur, ideoque optarem ludum deserere, vel alium in meum locum constituere, cui ut suscipiat etiam $A-\sqrt{(A+a)(A-b)}$ persolverem, non vero majorem summam, quia vel hanc persolvere, vel in ludo manere, mihi perinde esset. Quando vero

$$\sqrt{(A+a)(A-b)}=A,$$

tum ludus mihi prorsus est indifferens, neque dubito eum suscipere, neque alii relinquere. Accedit vero hoc, quando est

$$Aa=Ab+ab, \quad \text{vel} \quad A=\frac{ab}{a-b}$$

i. e. si excessus lucri super damnum est ad damnum, ut lucrum ad meum statum. Hujusmodi igitur ludus mihi aequus est existimandus, non is in quo est $a=b$. Si enim lucrum a aequale est damno b, aeque proclivi, ludum semper, nisi sint mea bona infinita, ad meum damnum suscipio, et tantum susceptio ludi aequiparanda est damno

$$A-\sqrt{(A^2-a^2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{A}+\frac{1}{8}\cdot\frac{a^4}{A^3}+\frac{1}{16}\cdot\frac{a^6}{A^5}+\frac{5}{128}\cdot\frac{a^8}{A^7}+\text{etc.}$$