1849

Recherches sur le probleme de trois nombres carres tels que la somme de deux quelconques moins le troisieme fasse un nombre carre

Leonhard Euler

V.

Recherches sur le problème de trois nombres carrés tels, que la somme de deux quelconques, moins le troisième, fasse un nombre carré.

---

1. Soient x, y, z les racines des trois carrés, les équations seront

$$\left.\begin{aligned} yy + zz - xx &= pp, \\ xx + zz - yy &= qq, \\ xx + yy - zz &= rr. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Si l'on ajoute ces équations deux à deux, elles produiront les équations suivantes:

$$\begin{aligned} pp + qq &= 2zz, \\ pp + rr &= 2yy, \\ qq + rr &= 2xx, \end{aligned}$$

d'où l'on voit qu'en résolvant notre problème, celui-ci sera aussi resolu: *trouver trois nombres carrés tels, que la demi-somme de deux quelconques d'entre eux produise aussi un carré;* puisque

$$\frac{pp+qq}{2} = zz, \quad \frac{pp+rr}{2} = yy \quad \text{et} \quad \frac{qq+rr}{2} = xx.$$

2. De plus il est évident, qu'ayant trouvé les trois nombres x, y, z, tous leurs multiples satisferont pareillement, savoir: nx, ny, nz. De sorte que tous ces cas ne renferment qu'une seule solution, et par conséquent, nous ne chercherons, dans la suite, que trois nombres tels, qu'ils n'aient aucun diviseur commun. D'où il est d'abord évident, que tous les trois nombres cherchés ne seront pas pairs. Or, avec quelque attention, on verra de suite que ces trois nombres doivent être tous impairs; car tout carré pair est de la forme $4aa$, et tout carré impair de la forme $4(aa+a)+1$; donc si nous supposons deux de nos carrés pairs, c'est-à-dire

$$xx = 4aa, \quad y = 4bb \quad \text{et le troisième impair:} \quad zz = 4(cc+c)+1,$$

il en résultera pour $xx+yy-zz$ cette expression $4(aa+bb-cc-c)-1$, qui ne saurait jamais être un carré. Si nous supposons ensuite deux seulement impairs et le troisième pair, comme

$$xx = 4(aa+a)+1, \quad y = 4(bb+b)+1, \quad z = 4cc,$$

nous aurons pour $xx+yy-zz$ cette expression $4(aa+a+bb+b-cc)+2$, qui ne saurait non plus être un carré. Mais posant tous les trois carrés impairs, par exemple

$$xx = 4(aa+a)+1, \quad yy = 4(bb+b)+1, \quad z = 4(cc+c)+1,$$

nous aurons pour $xx+yy-zz$ la forme $4(aa+a+bb+b-cc-c)+1$, qui peut représenter un carré.

3. Cette considération nous montre d'abord, que si l'on voulait chercher quatre nombres carrés tels, que la somme de trois moins le quatrième fasse un nombre carré, la recherche serait inutile, puisque la question est absolument impossible. Pour le prouver, on n'a qu'à parcourir tous les cas par rapport aux pairs et impairs. En effet,

1) si trois carrés sont pairs, savoir:

$$xx=4aa,\quad yy=4bb,\quad zz=4cc \quad \text{et} \quad vv=4(dd+d)+1,$$

on aura pour $xx+yy+zz-vv$ la valeur $4(aa+bb+cc-dd-d)-1$, qui ne peut jamais être un carré.

2) Soient seulement deux pairs et deux impairs, ou bien

$$xx=4aa,\quad yy=4bb,\quad zz=4(cc+c)+1,\quad vv=4(dd+d)+1,$$

on aura pour $xx-yy+zz+vv$ cette formae $4(aa-bb+cc+c+dd+d)+2$, qui ne peut jamais être un carré.

3) Supposons à présent un seul carré pair, savoir

$$xx=4aa,\quad yy=4(bb+b)+1,\quad zz=4(cc+c)+1,\quad vv=4(dd+d)+1,$$

nous aurons pour $yy+zz+vv-xx$ la forme $4(bb+b+cc+c+dd+d-aa)+3$, qui encore n'est jamais un nombre carré.

4) Enfin soient tous les quatre nombres impairs, c'est-à-dire

$$xx=4(aa+a)+1,\quad yy=4(bb+b)+1,\quad zz=4(cc+c)+1,\quad vv=4(dd+d)+1;$$

on aura pour $xx+yy+zz-vv$ la valeur $4(aa+a+bb+b+cc+c-dd-d)+2$, qui ne peut non plus représenter un nombre carré.

4. Après ces considérations, examinons de quelle manière on pourrait arriver à une solution du problème proposé. Pour cet effet je remarque, que nos deux premières équations peuvent être représentées sous cette forme générale

$$zz\pm(yy-xx)= \text{à un carré quelconque.}$$

Or $AA+BB\pm2AB$ est toujours un carré parfait; donc, comparant cette formule avec la précédente, nous aurons $zz=AA+BB$, $yy-xx=2AB$, et pour rendre $AA+BB$ un carré parfait il ne faut que supposer $A=aa-bb$, $B=2ab$, et nous aurons $zz=(aa+bb)^2$; donc $z=aa+bb$. D'après ces suppositions, la valeur de $yy-xx$ sera $4ab(aa-bb)$. Mais $yy-xx$ étant le produit de $y+x$ par $y-x$, et $4ab(aa-bb)$ le produit de $2ab$ par $(2aa-2bb)$, on vérifiera l'équation $yy-xx=4ab(aa-bb)$ en prenant $y+x=2ab$, $y-x=2aa-2bb$; donc

$$x=bb+ab-aa \quad \text{et} \quad y=aa+ab-bb.$$

Ainsi, en prenant pour les valeurs de x, y et z les expressions

$$bb+ab-aa,\quad aa+ab-bb \quad \text{et} \quad aa+bb,$$

les deux premières équations seront satisfaites. Il ne s'agit donc que de satisfaire aussi à la troisième équation qui, par la substitution de ces valeurs de x, y, z, devient

$$xx + yy - zz = a^4 + b^4 - 4aabb = rr.$$

5. Tout revient donc à trouver pour a et b de tels nombres, que la formule $a^4 + b^4 - 4aabb$ devienne un carré. Il est facile de remarquer que cette condition sera remplie, si l'on prend $a = 2b$. Pour trouver une autre solution de l'équation $a^4 + b^4 - 4aabb = rr$, posons $a = b\,(z + 2)$, et nous aurons $a^4 + b^4 - 4aabb = b^4\,(z^4 + 8z^3 + 20z^2 + 16z + 1)$. Supposons que la racine de cette expression soit $b^2\,(zz + 8z + 1)$. En comparant le carré de

$$b^2\,(zz + 8z + 1) \quad \text{avec} \quad b^4\,(z^4 + 8z^3 + 20z^2 + 16z + 1),$$

on trouvera $\quad 8z^3 + 46zz = 0$; d'où l'on tirera $z = -\frac{23}{4}$;

par conséquent $z + 2 = -\frac{15}{4}$ et $a = -\frac{15b}{4}$. Or, puisqu'il est indifférent que les valeurs de a et b soient positives ou négatives, nous prendrons $a = 15$, $b = 4$, et nous aurons $x = 149$, $y = 269$, $z = 241$, qui paraissent être les plus petits nombres cherchés. De là, par conséquent, nous trouverons $p = 329$, $q = 89$, $r = 191$.

6. Comme cette solution est tirée de l'équation $yy - xx = 4ab\,(aa - bb)$, par la décomposition du second membre en ses facteurs $2ab$ et $2\,(aa - bb)$, il s'en suit qu'on pourrait exprimer généralement les valeurs de y et x de cette manière: $y + x = \frac{2m}{n}\,ab$ et $y - x = \frac{2n}{m}\,(aa - bb)$. Mais, après des calculs très pénibles, on ne parviendrait qu'à des solutions très particulières. La supposition la plus simple est $y + x = 2a\,(a + b)$, $y - x = 2b\,(a - b)$; d'où nous tirons

$$yy + xx = 2\,(a^4 + 2a^3b + 2aabb - 2ab^3 + b^4).$$

De là, pour la valeur de $rr = yy + xx - zz$, nous trouvons $a^4 + 4a^3b + 2aabb - 4ab^3 + b^4$ qui est le carré complet de $aa + 2ab - bb$; donc les valeurs de a et b sont entièrement arbitraires. Mais si l'on considère les valeurs de x, y et z, qui sont $aa + bb$, $aa + 2ab - bb$ et $aa + bb$, on trouvera que x et z sont égaux, et par cette raison la solution ne saurait être admise.

7. On pourrait employer encore bien d'autres méthodes pour la solution du problème. Mais toutes ces méthodes ont le grand défaut de ne donner que des solutions très particulières, et cela après des calculs très longs et très difficiles. C'est pourquoi j'exposerai ici quatre méthodes tout-à-fait singulières, et qui, sans beaucoup de peine, fourniront une infinité de formules générales pour exprimer les trois nombres x, y et z, lesquelles, à leur tour, donneront une infinité de solutions. Cependant, il s'en faut de beaucoup que toutes ces formules contiennent toutes les solutions possibles.

Méthodes faciles pour trouver des solutions plus générales.

Première méthode.

8. Si nous supposons $s = xx + yy + zz$, nos équations (1) deviendront

$$s - 2xx = pp, \quad \text{ou} \quad s = pp + 2xx,$$
$$s - 2yy = qq, \quad \text{ou} \quad s = qq + 2yy,$$
$$s - 2zz = rr, \quad \text{ou} \quad s = rr + 2zz,$$

d'où l'on voit que s doit être, de trois manières différentes, la somme d'un carré et d'un double carré.

9. Considérons donc plus soigneusement les nombres contenus dans cette forme $aa + 2bb$. Je remarque premièrement que, lorsqu'un tel nombre est premier, il ne peut avoir cette forme que d'une seule manière; car s'il était résoluble de deux manières, de sorte que $s = aa + 2bb$ et aussi $s = cc + 2dd$, il s'en suivrait que $aa - cc = 2dd - 2bb$ et par conséquent $\frac{a+c}{d+b} = \frac{2(d-b)}{a-c}$. Or puisque ces deux fractions sont égales, supposons qu'après avoir été réduites aux plus petits termes elles soient $\frac{m}{n}$. De là nous aurons $\frac{a+c}{d+b} = \frac{m}{n}$, ou $a + c = mf$, $d + b = nf$; pareillement $\frac{2(d-b)}{a-c} = \frac{m}{n}$ et $d - b = mg$, $a - c = 2ng$, et par conséquent $2a = mf + 2ng$, $2b = nf - mg$. Mais puisque $4s = 4aa + 8bb$, en substituant, au lieu de $2a$ et $2b$, leurs valeurs, nous aurons $4s = ff(mm + 2nn) + 2gg(mm + 2nn)$, ou bien $4s = (ff + 2gg)(mm + 2nn)$, ce qui ne peut avoir lieu, s étant un nombre premier.

10. Il suit de là que s ne saurait être un nombre premier, et il est démontré qu'un nombre de la forme $aa + 2bb$ ne peut être divisible que par des nombres de la même forme, lorsque a et b sont premiers entre eux. Ainsi s est le produit de deux ou de plusieurs nombres premiers de la même forme $aa + 2bb$. Mais il est facile de remarquer, que deux facteurs premiers ne suffisent pas pour produire une triple résolution; donc s doit avoir au moins trois facteurs premiers de la forme $aa + 2bb$.

11. Observons ici que tout nombre impair de la forme $aa + 2bb$ est toujours de la forme $8n + 1$ ou $8n + 3$, et que lorsque le nombre est pair et de la forme $aa + 2bb$, il est le double de l'une ou de l'autre de ces deux formules. La forme $aa + 2bb$ se rapporte au premier cas, lorsque a est impair, et au second, quand a est pair. Ainsi, tout autre nombre impair ou de la forme $8n + 5$ ou $8n + 7$ est entièrement exclu du nombre des diviseurs de la forme $aa + 2bb$. Donc tous les nombres qui sont divisibles par quelques-uns de ceux-ci: 5, 7, 13, 15, 21, 23, 29, 31, 37, 39, 45, 47, 53, 55, etc. ne peuvent pas être compris dans la forme $aa + 2bb$, où nous supposons a et b premiers entre eux.

12. Il est très remarquable que tous les nombres premiers, tant de la forme $8n + 1$ que $8n + 3$, sont toujours réductibles à un carré plus le double d'un carré, mais d'une seule manière; en voici des exemples

$8n + 1$	$8n + 3$
$17 = 3^2 + 2.2^2$	$3 = 1^2 + 2.1^2$
$41 = 3^2 + 2.4^2$	$11 = 3^2 + 2.1^2$
$73 = 1^2 + 2.6^2$	$19 = 1^2 + 2.3^2$
$89 = 9^2 + 2.2^2$	$43 = 5^2 + 2.3^2$
$97 = 5^2 + 2.6^2$	$59 = 3^2 + 2.5^2$
$113 = 9^2 + 2.4^2$	$67 = 7^2 + 2.3^2$
$137 = 3^2 + 2.8^2$	$83 = 9^2 + 2.1^2$
	$107 = 3^2 + 2.7^2$
	$131 = 9^2 + 2.5^2$
	$139 = 11^2 + 2.3^2$

13. Dans toutes ces décompositions on ne saurait découvrir le moindre ordre, et pourtant il n'y a pas de doute que cela n'ait lieu pour tous les nombres de la forme $8n+1$ ou $8n+3$, et c'est ce qu'on peut même démontrer rigoureusement. Pour cet effet, il ne s'agit que de prouver qu'étant proposé un nombre quelconque, premier, de la forme $8n+1$ ou $8n+3$, on peut toujours assigner un produit de la forme $aa+2bb$ qui admette l'un ou l'autre pour facteur. Cette démonstration se tire d'un très beau théorème de Fermat, savoir: que la forme $c^{2m}-1$ est toujours divisible par le nombre $2m+1$, lorsque celui-ci est premier et ne divise pas c. Par conséquent, si le nombre $8n+1$ est premier, il sera toujours un facteur de la formule $c^{8n}-1$, quel que soit c, pourvu qu'il ne soit pas un multiple de $8n+1$. Mais comme la quantité $c^{8n}-1$ a deux facteurs qui sont $(c^{4n}+1)$, $(c^{4n}-1)$, il faut donc que l'un ou l'autre soit divisible par $8n+1$. Par conséquent, si nous prenons pour c un nombre qui ne rende pas $c^{4n}-1$ multiple de $8n+1$, le nombre $c^{4n}+1$ sera nécessairement divisible par $8n+1$. Mais la formule $c^{4n}+1$ peut être écrite ainsi $(c^{2n}-1)^2+2c^{2n}$; donc le nombre $8n+1$ est diviseur de la forme $aa+2bb$.

14. Quant à l'autre formule $8n+3$, chaque nombre premier de la forme $8n+3$ est un diviseur de $c^{8n+2}-1$ et par conséquent de $c^{4n+1}+1$, ou de $c^{4n+1}-1$. Soit $c=2$, la formule $c^{4n+1}-1$ revient à la suivante $2.2^{4n}-1$, qui ne peut jamais être divisible par $8n+3$, parce que tous les diviseurs de la forme $2ff-1$ sont ou $8n+1$, ou $8n-1$, et jamais $8n+3$. Donc $2^{4n+1}+1$ ou $2.2^{4n}+1$ qui est de la forme $aa+2bb$, sera nécessairement divisible par $8n+3$.

Après cette digression qui paraît n'être pas inutile, revenons à notre problème. Nous avons vu que la somme s doit avoir au moins trois facteurs, ainsi posons la égale à

$$(aa+2bb)\,(cc+2dd)\,(ff+2gg)$$

et, pour abréger le calcul, soit $(aa+2bb)\,(cc+2dd)=mm+2nn$, alors nous aurons

$$m=ac\pm 2bd,\quad n=bc\mp ad.$$

De là notre somme s sera exprimée ainsi: $s=(mm+2nn)\,(ff+2gg)$, que nous supposerons égale à $zz+2vv$, et nous aurons pareillement $z=mf\pm 2ng$ et $v=nf\mp mg$.

15. Substituons maintenant, au lieu de m et n, les valeurs trouvées, et nous aurons quatre valeurs différentes pour z et v, savoir pour z:

1) $f(ac+2bd)+2g\,(bc-ad)$,
2) $f(ac+2bd)-2g\,(bc-ad)$,
3) $f(ac-2bd)+2g\,(bc+ad)$,
4) $f(ac-2bd)-2g\,(bc+ad)$,

et pour v:

1) $f(bc-ad)-g\,(ac+2bd)$,
2) $f(bc-ad)+g\,(ac+2bd)$,
3) $f(bc+ad)-g\,(ac-2bd)$,
4) $f(bc+ad)+g\,(ac-2bd)$.

16. Voilà donc quatre valeurs différentes de z et v. Mais comme il n'en faut que trois, à cause des trois conditions $s=pp+2xx$, $s=qq+2yy$ et $s=rr+2zz$, que nous avons à

remplir, nous ne prendrons que les trois premières valeurs de z et v; nous trouverons ainsi

$$\begin{aligned}
f(ac+2bd)+2g(bc-ad)&=p,\\
f(ac+2bd)-2g(bc-ad)&=q,\\
f(ac-2bd)+2g(bc+ad)&=r,\\
f(bc-ad)-g(ac+2bd)&=x,\\
f(bc-ad)+g(ac+2bd)&=y,\\
f(bc+ad)-g(ac-2bd)&=z.
\end{aligned}$$

17. Cherchons à présent, par le moyen des valeurs x, y, z, la somme de leurs carrés qui aura cette forme $Aff+Bgg+2Cfg$, où

$$\begin{aligned}
A&=3bbcc-2abcd+3aadd,\\
B&=3aacc+4abcd+12bbdd,\\
C&=-(bc+ad)(ac-2bd).
\end{aligned}$$

La différence entre cette expression de la somme s et sa valeur précédente

$$\begin{aligned}
s&=(aa+2bb)(cc+2dd)(ff+2gg)\\
&=ff(aacc+2bbcc+2aadd+4bbdd)+2gg(aacc+2bbcc+2aadd+4bbdd)
\end{aligned}$$

nous conduit à l'équation

$$Fff+Ggg+2Cfg=0, \quad \text{où}$$

$$\begin{aligned}
F&=bbcc-2abcd+aadd-aacc-4bbdd,\\
G&=aacc+4abcd+4bbdd-4bbcc-4aadd,\\
C&=-(bc+ad)(ac-2bd).
\end{aligned}$$

Nous voilà donc parvenus à la solution de notre problème; car il ne s'agit plus, dans l'équation $Fff+Ggg+2Cfg=0$, qui renferme les six lettres a, b, c, d, f, g, que de trouver des valeurs convenables pour les six lettres, afin de satisfaire à notre égalité, et de là nous trouverons x, y, z, comme aussi p, q, r.

18. Etant donc arrivé à l'égalité $Fff+Ggg+2Cfg=0$, qui donne

$$\frac{f}{g}=\frac{-C\pm\sqrt{(CC-FG)}}{F},$$

il faudrait chercher de telles valeurs pour a, b, c, d, f, g, que $CC-FG$ devienne un carré. Mais cela nous conduirait à de très grandes difficultés, que nous voudrions éviter. Heureusement nous sommes tombés sur un cas, où l'équation $Fff+Ggg+2Cfg=0$ se réduit facilement au premier degré, savoir quand F est égal à 0; alors on a $Ggg+2Cfg=0$, ou bien $\frac{f}{g}=-\frac{G}{2C}$. Ainsi, en réduisant $-\frac{G}{2C}$ aux plus petits termes, si l'on prend le numérateur pour f et le dénominateur pour g, toutes les formules trouvées ci-dessus seront exprimées en nombres rationels. C'est en quoi consiste le mérite de cette méthode.

19. Remarquons maintenant que la valeur $bbcc-2abcd+aadd-aacc-4bbdd$, trouvée pour F, peut être exprimée comme produit de deux facteurs de la manière suivante:

$$F=\{(b+a)c+(a+2b)d\}\{(b-a)c+(a-2b)d\}.$$

Ainsi on pourra égaler à zéro ou l'un ou l'autre de ces deux facteurs, pour que F devienne zéro. Du premier on tire $\frac{c}{d}=\frac{-a-2b}{b+a}$, du second $\frac{c}{d}=\frac{2b-a}{b-a}$. Il y aura donc une double détermination pour les lettres c et d, par conséquent aussi une double solution du problème.

20. De la même manière nous pourrions faire évanouir la valeur de G, et puisqu'elle est égale à $aacc+4abcd+4bbdd-4bbcc-4aadd$, ce qui est le produit de ces deux facteurs

$$(a+2b)\,c-(2b+2a)\,d, \quad (a-2b)\,c-(2b-2a)\,d,$$

nous aurons, pour la détermination de c et d, l'équation $\frac{c}{d}=\frac{2b+2a}{a+2b}$, ou $\frac{c}{d}=\frac{2b-2a}{a-2b}$. Mais ces valeurs ne conduiraient pas à des solutions nouvelles; ainsi il suffira de nous en tenir aux valeurs tirées de $F=0$.

21. Voilà donc une solution assez simple du problème proposé, et qui fournira en même temps une infinité de solutions particulières. Pour cela, il n'y aura qu'à suivre les règles suivantes:

1) Après avoir pris à volonté les deux nombres a et b, cherchons les valeurs de c et d par l'une ou l'autre de ces deux formules $\frac{c}{d}=\frac{-a-2b}{b+a}$, ou $\frac{c}{d}=\frac{2b-a}{b-a}$, puisque chacune conduira à une solution.

2) Cherchons ensuite les valeurs de C et G d'après les formules

$$C=-(bc+ad)\,(ac-2bd),$$
$$G=(aa-4bb)\,cc+(4bb-4aa)\,dd+4abcd,$$

et nous aurons

$$\frac{f}{g}=\frac{(aa-4bb)\,cc+4(bb-aa)\,dd+4abcd}{2(bc+ad)(ac-2bd)},$$

c'est-à-dire, après avoir réduit cette fraction à ses plus petits termes, il faudra prendre f égal au numérateur, et g au dénominateur.

3) Ayant ainsi trouvé les valeurs de f et g, on aura immédiatement celles de x, y, z par les formules

$$x=f(bc-ad)-g\,(ac+2bd),$$
$$y=f(bc-ad)+g\,(ac+2bd),$$
$$z=f\,(bc+ad)-g\,(ac-2bd),$$

qui sont les racines des trois nombres cherchés.

4) Enfin les lettres p, q, r se trouveront aussi d'après ces formules

$$p=f(ac+2bd)+2g\,(bc-ad),$$
$$q=f(ac+2bd)-2g\,(bc-ad),$$
$$r=f(ac-2bd)+2g\,(bc+ad).$$

Eclaircissons ces règles par quelques exemples.

Exemple 1. Soit $a=1$ et $b=1$, alors $\frac{c}{d}$ sera égale, dans le premier cas, à $-\frac{3}{2}$, et dans le second à $\frac{1}{0}$, ce qui ne conduit à rien. Ainsi supposons $c=3$ et $d=-2$; $\frac{f}{g}$ sera $=-\frac{51}{14}$; soit $f=51$ et $g=-14$. Alors

$$x = 51\,(3+2) + 14\,(3-4) = 241, \qquad p = -51 - 28.5 = -191,$$
$$y = 51\,(3+2) - 14\,(3-4) = 269, \qquad q = -51 + 28.5 = 89,$$
$$z = 51\,(3-2) + 14\,(3+4) = 149, \qquad r = 51.7 - 28 = 329,$$

enfin $s = 3.17.2993$ ou $= 3.17.41.73$.

Exemple 2. Soit $a = 1$ et $b = 2$, alors $\frac{c}{d} = -\frac{5}{3}$ ou $= \frac{3}{1}$, développons donc l'un et l'autre cas.

Cas 1. Soit $c = 3$ et $d = 1$, on aura $\frac{f}{g} = \frac{99}{14}$ et, par conséquent, $f = 99$ et $g = 14$; de là nous aurons

$$x = 99.5 - 14.7 = 397, \qquad p = 99.7 + 28.5 = 833,$$
$$y = 99.5 + 14.7 = 593, \qquad q = 99.7 - 28.5 = 553,$$
$$z = 99.7 + 14 = 707, \qquad r = -99 + 28.7 = 97,$$
$$s = 9.11.10193.$$

Cas 2. Soit $c = 5$ et $d = -3$, on aura $\frac{f}{g} = -\frac{387}{238}$ et, par conséquent, $f = 387$, $g = -238$; de là

$$x = 387.13 - 238.\ 7 = 3365, \qquad p = 387. -7 - 2.238.13 = -8897,$$
$$y = 387.13 + 238.\ 7 = 6697, \qquad q = 387. -7 + 2.238.13 = 3479,$$
$$z = 387.\ 7 + 238.17 = 6755, \qquad r = 387.\ 17 - 2.238.\ 7 = 3247,$$
$$s = 9.43.263057.$$

Exemple 3. Soit $a = 3$ et $b = 1$, on aura $\frac{c}{d} = -\frac{5}{4}$ ou $= \frac{1}{2}$. Il faut remarquer ici que le dernier cas est déjà traité dans l'exemple précédent, puisque a, b, c, d sont permutables. C'est pourquoi nous ne développerons que le premier cas, où $c = 5$ et $d = -4$; $\frac{f}{g} = \frac{627}{322}$, d'ou $f = 627$, $g = 322$ et, par conséquent,

$$x = 627.\ \ 17 - 322.\ 7 = 8405, \qquad p = 627.\ 7 + 644.17 = 15337,$$
$$y = 627.\ \ 17 + 322.\ 7 = 12913, \qquad q = 627.\ 7 - 644.17 = -6559,$$
$$z = 627. -\ 7 - 322.23 = -11795, \qquad r = 627.23 - 644.\ 7 = 9913,$$
$$s = 11.57.600497.$$

22. Ces exemples suffisent pour montrer comment, par ces règles, on peut facilement trouver autant de solutions qu'on voudra. Nous nous contenterons ici d'exposer les résultats les plus simples, et pour lesquels les nombres x, y, z ne surpassent pas mille.

	I	II	III	IV	V
$x =$	241	397	425	595	493
$y =$	269	593	373	769	797
$z =$	149	707	205	965	937
$p =$	191	833	23	1081	1127
$q =$	89	553	289	833	697
$r =$	329	97	527	119	289

Seconde méthode.

23. La solution de notre problème a été réduite à cette équation carrée

$$Fff + Ggg + 2Cfg = 0, \quad \text{où}$$
$$C = -(bc + ad)(ac - 2bd),$$
$$F = (bb - aa)cc + (aa - 4bb)dd - 2abcd,$$
$$G = (aa - 4bb)cc + (4bb - 4aa)dd + 4abcd,$$

et enfin à la formule $\frac{f}{g} = \frac{-C \pm \sqrt{(CC - FG)}}{F}$, dans laquelle $CC - FG$ doit être un carré. Supposons donc $CC - FG = VV$, de sorte que $\frac{f}{g} = \frac{-C \pm V}{F}$. Substituant dans l'expression $CC - FG$ les valeurs de C, F et G, nous aurons

$$VV = (aa - 2bb)^2 c^4 + 8(aa - 2bb)abc^3 d - 4(aa - 2bb)^2 ccdd - 16(aa - 2bb)abcd^3 + 4(aa - 2bb)^2 d^4,$$

expression qui, étant divisée par $(aa - 2bb)^2$ et abrégée par la substitution de m au lieu de $\frac{ab}{aa - 2bb}$, deviendra assez simple, savoir:

$$\frac{VV}{(aa - 2bb)^2} = c^4 + 8mc^3 d - 4ccdd - 16mcd^3 + 4d^4.$$

24. Maintenant, comme cette formule doit être un carré, supposons sa racine égale à

$$\frac{V}{aa - 2bb} = cc - 4mcd + 2dd,$$

et de là, en les comparant, on trouvera l'égalité suivante: $2mc - d - 2mmd = 0$ et, par conséquent, $\frac{c}{d} = \frac{2mm + 1}{2m}$. Ainsi, soit $c = 2mm + 1$ et $d = 2m$, notre formule deviendra

$$\frac{V}{aa - 2bb} = (2mm + 1)^2 - 8mm(2mm + 1) + 8mm = 4mm + 1 - 12m^4.$$

25. A présent il ne s'agira plus que de prendre pour a et b des nombres à volonté, et l'on aura $m = \frac{ab}{aa - 2bb}$; si l'on substitue les valeurs déjà trouvées dans celles de C, F, V, on aura $\frac{f}{g} = \frac{-C \pm V}{F}$: On voit par là que les lettres f et g peuvent être déterminées de deux manières dans chaque cas. Or, ayant trouvé ces lettres, on pourra déterminer aisément tant les valeurs de x, y, z, que celles de p, q, r. Le cas le plus simple se prévoit, et se rapporte à la supposition de $a = 1$ et $b = 1$; alors $m = -1$, $c = 3$, $d = -2$ et $F = 0$; mais ce cas est précisément celui de la première méthode. Voici d'autres exemples:

Exemple 1. Soit $a = 2$ et $b = 1$, alors $m = 1$, $c = 3$, $d = 2$, $f = 28$, $g = 51$ et enfin

$$x = 482, \qquad p = 382,$$
$$y = -538, \qquad q = 178,$$
$$z = 298, \qquad r = -658.$$

Exemple 2. Soit $a = 3$ et $b = 2$, alors $m = 6$, $c = 73$, $d = 12$, $f = -7$, $g = 17$ et enfin

$$x = 5309, \qquad p = 1871,$$
$$y = 3769, \qquad q = 5609,$$
$$z = 4181, \qquad r = 4991.$$

Troisième méthode.

26. Ayant posé, comme dans la première méthode, la somme des trois carrés cherchés $s=(aa+2bb)(cc+2dd)(ff+2gg)$, je supposerai le premier facteur $aa+2bb$ résoluble de deux manières différentes en un carré plus le double d'un carré, savoir $\alpha\alpha+2\beta\beta=aa+2bb$. Prenons la première forme $aa+2bb$ pour la détermination des lettres x, y, p, q, comme nous l'avons déjà fait (16), et la dernière $\alpha\alpha+2\beta\beta$ pour la détermination de z et r, en sorte que

$$x=f(bc-ad)-g(ac+2bd), \qquad p=f(ac+2bd)+2g(bc-ad),$$
$$y=f(bc-ad)+g(ac+2bd), \qquad q=f(ac+2bd)-2g(bc-ad),$$
$$z=f(\beta c+\alpha d)-g(\alpha c-2\beta d), \qquad r=f(\alpha c-2\beta d)+2g(\beta c+\alpha d).$$

Tirant de là la somme des trois carrés $xx+yy+zz=s$, nous aurons cette formule

$$s=Aff+Bgg-2Cfg, \quad \text{où}$$

$$A=2bbcc-4abcd+2aadd+\beta\beta cc+2\alpha\beta cd+\alpha\alpha dd,$$
$$B=2aacc+8abcd+8bbdd+\alpha\alpha cc-4\alpha\beta cd+4\beta\beta dd,$$
$$C=(\alpha c-2\beta d)(\beta c+\alpha d).$$

Soit de plus $\quad D=(aa+2bb)(cc+2dd)=aacc+2bbcc+2aadd+4bbdd;$

nous aurons $\quad s=(aa+2bb)(cc+2dd)(ff+2gg)=Dff+2Dgg.$

Retranchant cette valeur de s de la formule $Aff+Bgg-2Cfg$, nous obtiendrons l'équation

$$Fff+Ggg-2Cfg=0, \quad \text{où} \quad F=A-D, \quad G=B-2D,$$

et par conséquent
$$F=(\beta\beta-aa)cc+(\alpha\alpha-4bb)dd-4abcd+2\alpha\beta cd,$$
$$G=(\alpha\alpha-4bb)cc+8abcd-4\alpha\beta cd+4(\beta\beta-aa)dd,$$

valeurs qui peuvent être représentées ainsi qu'il suit:

$$F=((\beta+a)c+(\alpha+2b)d)((\beta-a)c+(\alpha-2b)d),$$
$$G=((\alpha+2b)c-2(\beta+a)d)((\alpha-2b)c-2(\beta-a)d).$$

27. D'après ces équations il est évident qu'on rendra $F=0$, en posant

$$\frac{c}{d}=\frac{-\alpha-2b}{\beta+a} \quad \text{ou} \quad =\frac{-\alpha+2b}{\beta-a}.$$

Alors notre équation deviendra $Ggg-2Cfg=0$, d'où $\frac{f}{g}=\frac{G}{2C}$. Cette formule est assez compliquée à cause de la valeur de G, mais nous la rendrons plus simple, en remarquant que F étant égal à zéro, la quantité G peut être remplacée par $2F+G$, et cette quantité, d'après les équations précédentes, est égale à

$$(2(\beta\beta-aa)+\alpha\alpha-4bb)(cc+2dd)=-(aa+2bb)(cc+2dd);$$

par conséquent
$$\frac{f}{g}=-\frac{(aa+2bb)(cc+2dd)}{2(\alpha c-2\beta d)(\beta c+\alpha d)};$$

d'où il suit $\quad f=(aa+2bb)(cc+2dd); \quad g=-2(\alpha c-2\beta d)(\beta c+\alpha d).$

28. Si l'on voulait substituer ces valeurs de c, d, f, g dans les formules finales de x, y, z et p, q, r, elles deviendraient assez compliquées. Mais on peut en tirer une règle très simple pour trouver les nombres x, y, z et p, q, r.

Règle

pour trouver autant de solutions qu'on voudra de notre problème.

29. Ayant pris à volonté deux nombres m et n, dont m doit être impair, qu'on en tire ces trois quantités $s = mm + 2nn$, $t = mm - 2nn$ et $u = 2mn$; cela posé, les valeurs des six lettres x, y, z, p, q et r seront

$$x = s(s+u)(3s+4u) - 2tt(s+2u), \qquad p = st(3s+4u) + 4t(s+u)(s+2u),$$
$$y = s(s+u)(3s+4u) + 2tt(s+2u), \qquad q = st(3s+4u) - 4t(s+u)(s+2u),$$
$$z = st(3s+4u) + 2t(s+2u)^2 \qquad r = s(s+2u)(3s+4u) - 4tt(s+2u).$$

30. En considérant ces six formules, on voit de suite qu'elles ne donnent point de solutions différentes de notre problème, soit qu'on prenne t positif ou négatif; puisque le changement de t en $-t$ ne fait que changer les signes de z, p et q. Mais si l'on prend u négatif, ces formules subiront un grand changement. D'où l'on voit que chaque paire des nombres m et n donnera deux solutions différentes, selon qu'on prendra m et n positivement ou négativement. En voici des applications.

Exemple 1. Soit $m = 1$ et $n = \pm 1$; alors $s = 3$, $t = 1$, $u = \pm 2$. Soit premièrement $u = -2$, nous aurons $s + u = 1$, $s + 2u = -1$, $3s + 4u = 1$ et, par conséquent,

$$x = 3.1.1 + 2 = 5, \qquad p = \quad 3 - 4 = -1,$$
$$y = \quad 3 \quad - 2 = 1, \qquad q = \quad 3 + 4 = 7,$$
$$z = \quad 3 \quad + 2 = 5, \qquad r = -3 + 4 = 1.$$

Mais ici deux des nombres cherchés sont égaux, c'est pourquoi cette solution ne saurait être admise.

Si l'on prend $u = 2$, alors $s + u = 5$, $s + 2u = 7$, $3s + 4u = 17$ et, par conséquent,

$$x = 3.5.17 - 2.7 = 241, \qquad p = \quad 3.17 + 4.5.7 = \quad 191,$$
$$y = 3.5.17 + 2.7 = 269, \qquad q = \quad 3.17 - 4.5.7 = - \; 89,$$
$$z = \quad 3.17 + 2.49 = 149, \qquad r = 3.7.17 - 4.7 = \quad 329.$$

Exemple 2. Soit, dans cet exemple, $m = 1$, $n = 2$; alors $s = 9$, $t = -7$, $u = \pm 4$. Prenons premièrement $u = -4$; on aura $s + u = 5$, $s + 2u = 1$, $3s + 4u = 11$ et enfin

$$x = \quad 9.5.11 - 98 = \quad 397, \qquad p = -9.7.11 - 4.7.5.1 = -833,$$
$$y = \quad 9.5.11 + 98 = \quad 593, \qquad q = -9.7.11 + 4.7.5.1 = -553,$$
$$z = -7.9.11 - 2.7 = -707, \qquad r = \quad 9.1.11 - 4.7.7.1 = - \; 97.$$

Soit, pour le second cas, $u = 4$, alors $s + u = 13$, $s + 2u = 17$, $3s + 4u = 43$ et, par conséquent,

$$x = \quad 9.13.43 - 98.17 = \quad 3365, \qquad p = -7.9.43 - 4.7.13.17 = -8897,$$
$$y = \quad 9.13.43 + 98.17 = \quad 6697, \qquad q = -7.9.43 + 4.7.13.17 = \quad 3479,$$
$$z = -7.9.43 - 2.7.17^2 = -6755, \qquad r = \quad 9.17.43 - 4.7^2.17 = \quad 3247.$$

Démonstration

de la règle précédente.

31. Posons $aa + 2bb = \alpha\alpha + 2\beta\beta = s$, $a\alpha - 2b\beta = t$ et $a\beta + b\alpha = u$; on aura $ss = tt + 2uu$. Prenons les valeurs trouvées ci-dessus (27) de c et d, savoir $c = -\alpha - 2b$, $d = \beta + a$. Pour

*

ce qui concerne les deux autres, elles dérivent de celles-ci en prenant a et b négatives. On aura $cc + 2dd = 3s + 4u$, $ac + 2bd = -t$, $\alpha c - 2\beta d = -(s + 2u)$, $bc - ad = -(s + u)$, et $\beta c + \alpha d = t$, et enfin, d'après (27), $f = s(3s + 4u)$ et $g = 2t(s + 2u)$.

32. Substituons maintenant ces valeurs dans les formules rapportées ci-dessus (26); nous trouverons les expressions suivantes:

$$\begin{aligned}
x &= s(s + u)(3s + 4u) - 2tt(s + 2u),\\
y &= s(s + u)(3s + 4u) + 2tt(s + 2u),\\
z &= st(3s + 4u) + 2t(s + 2u)^2,\\
p &= st(3s + 4u) + 4t(s + u)(s + 2u),\\
q &= st(3s + 4u) - 4t(s + u)(s + 2u),\\
r &= s(3s + 4u)(s + 2u) - 4tt(s + 2u),
\end{aligned}$$

qui ont été rapportées dans la règle.

33. Enfin, puisque les trois lettres s, t, u ne sont assujetties qu'à vérifier l'équation $ss = tt + 2uu$, on n'a qu'à trouver les nombres s, t, u qui remplissent cette condition; alors les formules précédentes donneront immédiatement les valeurs des nombres cherchés. Quant à celles de s, t, u, qui remplissent la condition $ss = tt + 2uu$, voici les plus simples:

s	3	9	17	19	27	33	33	41	43
t	1	7	1	17	23	17	31	23	7
u	2	4	12	6	10	20	8	24	30.

Quatrième méthode.

34. Nous avons vu, au commencement du Mémoire, que les équations

$$yy + zz - xx = pp, \quad zz + xx - yy = qq$$

seront satisfaites, si l'on prend

$$z = aa + bb, \quad yy - xx = 4ab(aa - bb), \quad p = aa + 2ab - bb, \quad q = aa - 2ab - bb;$$

d'où il est facile de remarquer que ces équations seront vérifiées, si nous supposons

$$z = mn(aa + bb), \quad yy - xx = 4mmnn(aa - bb)$$

$$\text{et} \quad p = mn(aa + 2ab - bb), \quad q = mn(aa - 2ab - bb).$$

Il ne restera donc qu'à remplir la troisième condition de notre problème, savoir: $xx + yy - zz = rr$.

35. Maintenant, pour que les trois nombres x, y, z n'aient point de facteur commun, prenons $y + x = 2mma(a + b)$ et $y - x = 2nnb(a - b)$; pour abréger l'expression, soit $aa + ab = A$ et $ab - bb = B$, de sorte que $y + x = 2mmA$ et $y - x = 2nnB$; par conséquent, puisque $A - B = aa + bb$, nous trouverons $z = mn(A - B)$. La somme des carrés de $y + x$ et $y - x$ nous donne

$$2yy + 2xx = 4m^4AA + 4n^4BB; \quad \text{donc} \quad yy + xx = 2m^4AA + 2n^4BB;$$

retranchant de là la valeur de zz, on trouve cette expression pour rr

$$rr = 2m^4AA + 2n^4BB - mmnn(A - B)^2.$$

36. Pour rendre cette formule plus traitable, supposons $m = f + g$, $n = f - g$; de là on obtiendra $rr = \alpha f^4 + \beta f^3 g + \gamma ffgg + \beta f g^3 + \alpha g^4$, où

$$\alpha = 2AA + 2BB - (A-B)^2 = (A+B)^2,$$
$$\beta = 8AA - 8BB,$$
$$\gamma = 12\,(AA+BB) + 2\,(A-B)^2.$$

En substituant ces valeurs de α, β, γ dans l'équation précédente, nous aurons

$$rr = (A+B)^2 f^4 + 8\,(AA-BB)\,f^3 g + [12\,(AA+BB) + 2\,(A-B)^2]\,ffgg$$
$$+ 8\,(AA-BB)\,fg^3 + (A+B)^2 g^4.$$

37. Pour ramener à présent cette formule à un carré, supposons que sa racine soit

$$r = (A+B)\,ff + 4\,(A-B)\,fg - (A+B)\,gg,$$

d'où il suit

$$rr = (A+B)^2 f^4 + 8\,(AA-BB)\,f^3 g - 2\,(A+B)^2 ffgg + 16\,(A-B)^2 ffgg$$
$$- 8\,(AA-BB)\,fg^3 + (A+B)^2 g^4.$$

Retranchant de cette expression la précédente nous obtiendrons

$$0 = 32ABffg + 16\,(AA-BB)\,fg^3,$$

d'où l'on tire

$$\frac{f}{g} = \frac{AA-BB}{-2AB}$$

et, par conséquent,

$$f = AA - BB,$$
$$g = -2AB.$$

C'est ainsi qu'on trouvera les nombres f et g d'après les valeurs de A et B qui sont déterminées par les équations $A = aa + ab$, $B = ab - bb$. Puis, on prendra $m = f + g$, $n = f - g$, et l'on aura les valeurs de x, y, z, p, q, qui, d'après les équations précédentes, sont

$$x = mmA - nnB, \quad y = mmA + nnB, \quad z = mn\,(A-B),$$
$$p = mn\,(aa + 2ab - bb), \quad q = mn\,(aa - 2ab - bb).$$

Quant à r, nous avons eu

$$r = (A+B)\,ff + 4\,(A-B)\,fg - (A+B)\,gg,$$

et cette équation, à cause de $m = f + g$, $n = f - g$, devient

$$r = mn\,(A+B) + (mm - nn)\,(A-B).$$

Donc, il est aisé de développer les valeurs de x, y, z et p, q, r pour chaque valeur des lettres a et b.

38. Voici la manière de s'y prendre pour trouver autant de solutions qu'on voudra. Après avoir pris à volonté a et b, on formera $A = aa + ab$, $B = ab - bb$, puis $f = AA - BB$ et $g = -2AB$, de là $m = f + g$, $n = f - g$. Ainsi, ayant déterminé ces valeurs, les nombres cherchés seront donnés par les formules suivantes:

$$x = mmA - nnB, \qquad p = mn\,(aa + 2ab - bb),$$
$$y = mmA + nnB, \qquad q = mn\,(aa - 2ab - bb),$$
$$z = mn\,(A-B), \qquad r = mn\,(A+B) + (mm - nn)\,(A-B).$$

Rapportons ici quelques exemples.

Exemple 1. Soit $a = 1$, $b = 2$; nous aurons $A = 3$, $B = -2$; de là $f = 5$, $g = 12$, $m = 17$, $n = -7$, enfin les nombres cherchés seront:

$x = 17.17.3 + 7.7.2 = 965,$ $p = -17.7.1 = -119,$

$y = 17.17.3 - 7.7.2 = 769,$ $q = -17.7. - 7 = 833,$

$z = -17.7.5 = -595,$ $r = -7.17.1 + 240.5 = 1081.$

Cette solution se trouve déjà rapportée plus haut (22).

Exemple 2. Soit $a = 2$, $b = 1$; nous aurons $A = 6$, $B = 1$, $f = 35$, $g = -12$, enfin $m = 23$, $n = 47$, et par conséquent,

$x = 23.23.6 - 47.47.1 = 965,$ $p = 23.47.7 = 7567,$

$y = 23.23.6 + 47.47.1 = 5383,$ $q = 23.47. - 1 = -1081,$

$z = 23.47.5 = 5405,$ $r = 23.47.7 - 1680.5 = -833.$

39. Il faut observer qu'il serait superflu de prendre les nombres a et b tous deux impairs, puisqu'alors les nombres A et B seraient pairs, et par conséquent réductibles à de moindres nombres.

Exemple 3. Soit $a = 2$, $b = 3$; nous aurons $A = 10$, $B = -3$, $f = 91$, $g = 60$, $m = 151$, $n = 31$; d'où résulte

$x = 151.151.10 + 31.31.3 = 230893,$ $p = 151.31.7 = 32767,$

$y = 151.151.10 - 31.31.3 = 225127,$ $q = 151.31. - 17 = -79577,$

$z = 151.31.13 = 60853,$ $r = 151.31.7 + 21840.13 = 316687.$

Observons ici que toutes les solutions trouvées par cette méthode, diffèrent essentiellement de toutes celles qu'on tire des méthodes précédentes.