1849

De quadratis magicis

Leonhard Euler

VIII.

De quadratis magicis.

(Conv. acad. exhib. 1776 Oct. 17.)

§ 1. Quadratum magicum dici solet, cujus cellulis numeri naturales ita sunt inscripti, ut summae numerorum per omnes fascias tam horizontales quam verticales, tum vero etiam per binas diagonales prodeant inter se aequales; ita si latera quadrati in x partes aequales dividantur, numerus omnium cellularum erit xx, et singulae fasciae tam horizontales, quam verticales, quin etiam binae diagonales continebunt x cellulas, in quas ergo omnes numeros naturales $1, 2, 3, 4 \ldots\ldots xx$ ita disponi oportet, ut summae per omnes fascias memoratas evadant inter se aequales. Cum igitur summa omnium horum numerorum, ab 1 usque ad xx, erit $\frac{xx(1+xx)}{2}$, summa uniuscujusque fasciae erit $=\frac{x(1+xx)}{2}$, unde si fuerit $x=3$, summa per singulas fascias erit $=15$.

§ 2. Hinc ergo in quotcunque cellulas totum quadratum fuerit divisum, summa numerorum per singulas fascias dispositorum facile assignari poterit, unde istas summas pro singulis hujusmodi quadratis per omnes fascias assignasse juvabit

x	xx	$\frac{x(1+xx)}{2}$
1	1	1
2	4	5
3	9	15
4	16	34
5	25	65
6	36	111
7	49	175
8	64	260
9	81	360
	etc.	

ubi x denotat numerum partium, in quas latera quadrati dividuntur, xx numerum cellularum in quadrato contentarum et $\frac{1}{2}x(1+xx)$ indicat summam omnium numerorum per singulas fascias dispositorum.

§ 3. Ut jam certam regulam investigemus, hujusmodi quadrata magica omnium ordinum construendi, plurimum intererit observasse, omnes numeros ab $1, 2, 3$, etc. usque ad xx hac formula $mx+n$ repraesentari posse. Si enim loco m accipiamus successive omnes valores $0, 1, 2, 3, 4$ usque ad $x-1$, tum vero pro n omnes numeros $1, 2, 3, 4 \ldots\ldots x$, manifestum est hinc omnes plane numeros ab 1 usque ad xx provenire; siquidem cum omnibus valoribus ipsius m singuli valores ipsius n ordine combinentur. Cum igitur hoc modo omnes numeri quadrato inscribendi per formulam $mx + n$ exhiberi, ideoque per duas partes repraesentari queant, in sequentibus perpetuo partes priores mx simpliciter litteris latinis a, b, c, d, etc., partes vero posteriores n litteris graecis α, β, γ, δ, etc. designabimus, ubi evidens est pro quovis numero x multitudinem tam litterarum latinarum, quam graecarum esse $= x$, quandoquidem valores litterarum latinarum erunt $0x$, $1x$, $2x$, $3x$ usque ad $(x-1)x$, graecarum autem valores sunt $1, 2, 3, 4 \ldots x$. Neque vero hic certus ordo in istis litteris tam latinis, quam graecis stabiliri est censendus, cum quaelibet litterarum latinarum pro lubitu sive $0x$, sive $1x$, sive $2x$, etc. significare possit, dummodo singulis valores diversi tribuantur; quod idem de litteris graecis est tenendum.

§ 4. In posterum igitur quilibet numerus quadrato inscribendus per aggregatum ex littera latina et graeca repraesentabitur veluti per $b + \delta$, sive per $a + \beta$ etc. ita, ut singuli numeri per duas partes sint repraesentandi, tum enim si singulae litterae latinae cum singulis graecis conjungantur manifesto omnes plane numeri ab 1 usque ad xx resultare debent, tum vero etiam perspicuum est ex diversa harum litterarum combinatione etiam semper diversos numeros oriri, neque ullum numerum duplici modo exprimi posse.

§ 5. Cum igitur omnes numeri per aggregata ex littera latina cum graeca repraesententur, pro constructione quadratorum magicorum haec regula principalis constituatur, ut primo litterae latinae singulis quadrati cellulis ita inscribantur, ut earum summa per omnes fascias eadem proveniat, ubi cum istarum litterarum numerus sit $= x$, cellularum autem omnium numerus $= xx$, evidens est quamlibet litteram x vicibus repeti debere. Simili autem modo quoque graecae litterae cellulis ejusdem quadrati ita inscribi intelligantur, ut earum quoque summae per omnes fascias evadant aequales. Sic enim etiam summae omnium numerorum ex littera latina et graeca compositorum per omnes fascias inter se erunt aequales. Tantum igitur superest, ut in hac dispositione singulae litterae latinae cum singulis graecis conjungantur, quandoquidem hac ratione nullus numerorum ab 1 usque ad xx praetermittetur, neque ullus bis occurrere poterit.

§ 6. His regulis in genere traditis singulas species quadratorum pro cellularum numero pertractemus, ubi quidem statim apparet, a novem cellulis esse incipiendum, quandoquidem in quadrato in quatuor tantum cellulas diviso talis dispositio locum habere nequit. Praeterea hic in genere animadvertisse juvabit, cum pro qualibet specie numerus litterarum tam latinarum, quam graecarum sit $= x$, omnes autem fasciae totidem cellulas contineant, praescriptae conditioni satisfieri, si singulis fasciis omnes diversae litterae tam latinae, quam graecae inscribantur. Sin autem eveniat, ut in quapiam fascia eadem littera bis vel ter occurrat, semper necesse est, ut summa omnium litterarum in eadem fascia occurrentium aequalis sit summae omnium litterarum sive latinarum $a + b + c + d +$ etc., sive graecarum $\alpha + \beta + \gamma + \delta +$ etc.

I. *Species quadratorum in 9 cellulas divisorum.*

§ 7. Cum igitur pro hac specie sit $x = 3$, totidem habebimus litteras latinas a, b, c, totidemque graecas α, β, γ, at vero litterarum latinarum valores hic erunt 0, 2, 6, graecarum vero 1, 2, 3.

Nunc igitur a latinis a, b, c incipiamus, ac facile erit eas nostro quadrato, in 9 cellulas diviso, ita inscribere, ut in singulis fasciis tam horizontalibus, quam verticalibus omnes hae tres litterae occurrant, veluti ex hoc schemate videre licet:

a	b	c
b	c	a
c	a	b

ubi etiam in altera diagonali eaedem tres litterae a, b, c reperiuntur, in altera vero eadem littera c ter repetitur; facile autem intelligitur fieri plane non posse, ut in ambabus diagonalibus simul omnes litterae fiant diversae; haec autem circumstantia nihil turbat, dummodo summa istius diagonalis scilicet $3c$ aequalis sit summae reliquarum fasciarum $a+b+c$, hoc est dummodo fuerit $2c=a+b$. Unde manifestum est pro c sumi debere 3, litteris vero a et b assignari valores 0 et 6, sic enim fiet $2c=a+b$. Pro lubitu autem poni poterit sive $a=0$, sive $b=0$; hoc observato summa ex singulis fasciis resultans est $a+b+c=9$.

§ 8. Simili modo litteras graecas in tale quadratum distribuere licet; talem autem figuram ordine inverso repraesentemus:

γ	β	α
α	γ	β
β	α	γ

ubi necesse est ut sit $2\gamma=\alpha+\beta$, ideoque $\gamma=2$. Sic enim si singulas cellulas prioris figurae cum singulis hujus figurae ordine naturali combinemus, patebit, quamlibet litteram latinam cum singulis graecis combinatum iri, ita ut ex hac conjunctione omnes numeri ab 1 usque ad 9 resultent; haec autem combinatio sequentem producet figuram:

$a\gamma$	$b\beta$	$c\alpha$
$b\alpha$	$c\gamma$	$a\beta$
$c\beta$	$a\alpha$	$b\gamma$

ubi notetur binas litteras junctas non productum, sed aggregatum designare.

§ 9. Cum igitur in hac figura sumi debeat $c=3$ et $\gamma=2$, ita ut litteris a et b valores 0 et 6, litteris autem α et β valores 1 et 3 tribui debeant, si sumamus $a=0$ et $b=6$, tum vero $\alpha=1$ et $\beta=3$, sequens orietur quadratum magicum:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

ubi quaelibet fascia nec non ambae diagonales summam dant 15. Si valores litterarum a et b, item α et β permutare velimus, facile intelligitur, inde tantum situm quadrati mutatum iri.

§ 10. Haec quidem dispositio tam latinarum, quam graecarum litterarum per se satis est perspicua, sed praecipuum momentum in hoc est positum, ut facta combinatione, singulae litterae latinae cum singulis graecis conjungantur, id quod in nostra combinatione casu evenisse videtur. Ut igitur in hoc negotio nihil casui tribuamus, ante omnia observemus ordinem litterarum graecarum α, β, γ nullo modo ab ordine latinarum a, b, c pendere, unde pro qualibet fascia definita cum litteris latinis cognomines graecas combinare licebit, ita ut α cum a, β cum b et γ cum c combinetur; ita si prima fascia horizontalis statuatur $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, quoniam in nulla fascia sive horizontali, sive verticali eadem littera graeca bis occurrere debet, facile patet secundam fasciam horizontalem fore $b\gamma$, $c\alpha$, $a\beta$; tertiam vero $c\beta$, $a\gamma$, $b\alpha$; unde hoc quadratum resultet:

$a\alpha$	$b\beta$	$c\gamma$
$b\gamma$	$c\alpha$	$a\beta$
$c\beta$	$a\gamma$	$b\alpha$

ubi quia in diagonali sinistra eadem littera graeca α ter occurrit, necesse est, ut fiat $3\alpha = \alpha + \beta + \gamma$, ideoque $2\alpha = \beta + \gamma$, quamobrem hinc valor ipsius α determinatur, scilicet $\alpha = 2$, quemadmodum vidimus sumi debere $c = 3$; hinc autem nulla nova quadrata magica nascuntur.

§ 11. Quanquam in hac prima specie dispositio litterarum graecarum nulla laborat difficultate, tamen pro quadratis plurium cellularum plurimum intererit, certam regulam tradere, secundum quam litterae graecae rite inscribi queant, postquam latinae jam debite fuerint dispositae; hunc in finem eligatur fascia quaepiam media sive horizontalis, sive verticalis, sive etiam diagonalis, ita ut ad utramque partem istius fasciae in cellulis inde aeque remotis, ubique duae litterae latinae diversae reperiantur, veluti hic evenit in columna media verticali, circa quam in prima horizontali reperiuntur litterae a et c, in secunda b et a, in tertia vero c et b, ubi binae litterae diversae sibi ubique respondent.

§ 12. Postquam autem talis columna media fuerit inventa, in ea singulae litterae latinae cum graecis cognominibus combinentur, tum vero in locis utrinque respondentibus litterae graecae cognomines permutentur; hocque modo ista figura resultabit:

$a\gamma$	$b\beta$	$c\alpha$
$b\alpha$	$c\gamma$	$a\beta$
$c\beta$	$a\alpha$	$b\gamma$

ubi certi sumus cum singulis latinis litteris omnes graecas combinari. Ceterum, ut conditioni diagonalium satisfiat, necesse est, quemadmodum jam notavimus, ut sumatur $2c = a + b$ et $2\gamma = \alpha + \beta$. Haec autem figura non discrepat ab ea, quam supra § 8 invenimus. Denique hic observasse juvabit, quomodocunque fasciae sive horizontales, sive verticales inter se permutentur, inde in summis tam fasciarum horizontalium, quam verticalium nihil mutari. In diagonalibus autem hinc ingens discrimen nasci poterit: ita si prima columna verticalis auferatur et ad sinistram apponatur, orietur haec figura:

$b\beta$	$c\alpha$	$a\gamma$
$c\gamma$	$a\beta$	$b\alpha$
$a\alpha$	$b\gamma$	$c\beta$

ubi ob fascias diagonales sumi debebit $2a = b + c$ et $2\beta = \alpha + \gamma$, id quod in omnibus transpositionibus est notandum, quae observatio in sequentibus speciebus maximi erit momenti.

II. *Species quadratorum in 16 cellulas divisorum.*

§ 13. Cum ergo hic sit $x = 4$, quatuor habebimus litteras latinas a, b, c, d, quarum valores sunt 0, 4, 8, 12, totidemque etiam litteras graecas α, β, γ, δ, quorum valores erunt 1, 2, 3, 4. Primo igitur tali quadrato quatuor istas litteras latinas ita inscribamus, ut tam in omnibus fasciis horizontalibus, quam verticalibus, omnes hae quatuor litterae occurrant, atque ut hoc etiam, si fieri potest, in ambabus diagonalibus usu veniat.

§ 14. Quoniam igitur inter has litteras a, b, c, d nullus ordo praescribitur, eas in prima columna horizontali ordine inscribamus, tum vero etiam fasciae diagonali sinistrae, ubi in cellula secunda hujus fasciae diagonalis vel litteram c, vel d scribi oportebit, scribamus igitur c, et jam reliqua omnia determinabuntur, dummodo caveatur, ne eadem littera bis in eandem fasciam sive horizontalem, sive verticalem inferatur; hoc modo nanciscemur sequentem figuram:

a	b	c	d
d	c	b	a
b	a	d	c
c	d	a	b

ubi adeo etiam altera diagonalis omnes quatuor litteras continet, ita ut hic nulla conditio circa valores litterarum a, b, c, d praescribatur. Hic quidem cellulae diagonalis secundae etiam inscribere potuissemus litteram d, verum figura hinc resultans, non aliter nisi situ ab hac figura discreparet, ita ut haec figura omnes casus possibiles complecti sit censenda.

§ 15. Jam pro litteris graecis inscribendis, quoniam nulla datur fascia media, neque inter horizontales, neque verticales, fasciam diagonalem a, c, d, b pro media illa accipiamus, mox autem deprehendemus, in cellulis utrinque aeque remotis et respondentibus ubique binas litteras inter se diversas reperiri; unde regula supra § 11 data tuto uti licebit. Primo igitur litteris in hac diagonali dispositis jungamus graecas cognomines, deinde in cellulis respondentibus litteras graecas cognomines permutemus; hocque modo sequens figura formabitur:

$a\alpha$	$b\delta$	$c\beta$	$d\gamma$
$d\beta$	$c\gamma$	$b\alpha$	$a\delta$
$b\gamma$	$a\beta$	$d\delta$	$c\alpha$
$c\delta$	$d\alpha$	$a\gamma$	$b\beta$

§ 16. In hac igitur figura omnes quatuor litterae tam latinae, quam graecae in omnibus fasciis tam directis, quam diagonalibus occurrunt; unde quaterni valores numerici his litteris pro lubitu sine ulla limitatione tribui possunt. Cum igitur quatuor litterae 24 variationes recipere queant, hinc omnino 576 diversae figurae formari poterunt, ubi quidem plures tantum ratione situs a se invicem discrepabunt.

§ 17. Neutiquam vero hinc concludere licet, in hac figura omnia plane quadrata magica hujus speciei contineri. Praeterea enim plurima alia exhiberi possunt, ubi non in singulis fasciis omnes quatuor litterae tam latinae, quam graecae reperiuntur, nihilo vero minus conditiones praescriptae adimplentur, tales autem formae per transpositionem columnarum sive horizontalium, sive verticalium oriri possunt, veluti si in superiore figura prima columna verticalis in finem transponatur, orietur haec figura:

$b\delta$	$c\beta$	$d\gamma$	$a\alpha$
$c\gamma$	$b\alpha$	$a\delta$	$d\beta$
$a\beta$	$d\delta$	$c\alpha$	$b\gamma$
$d\alpha$	$a\gamma$	$b\beta$	$c\delta$

ubi quidem in omnibus fasciis tam horizontalibus, quam verticalibus omnes litterae tam latinae, quam graecae etiamnunc reperiuntur, verum in diagonali a sinistra ad dextram descendente duae tantum litterae latinae occurrunt scilicet b et c, graecae autem pariter tantum duae α et δ. Contra vero in altera diagonali tantum hae duae litterae latinae a et d, graecae vero ut ante, tantum α et δ.

§ 18. Ut igitur haec figura conditionibus praescriptis satisfaciat, non amplius singulis litteris singulos valores numericos tribuere licet, verum haec limitatio adjici debet, ut pro litteris latinis fiat $b+c=a+d$; pro graecis autem ut pariter sit $\alpha+\delta=\beta+\gamma$, quamobrem si sumamus $a=0$, statui oportet $d=12$, ut fiat $b=4$ et $c=8$, vel vice versa $c=4$ et $b=8$. Simili modo pro graecis litteris si sumatur $\alpha=1$, fieri debet $\delta=4$, tum vero $\beta=2$ et $\gamma=3$. Unde nascitur istud quadratum magicum determinatum

8	10	15	1
11	5	4	14
2	16	9	7
13	3	6	12

ubi manifesto summa per singulas fascias est 34. Tales autem formae limitatae plurimis aliis modis per transpositionem columnarum formari poterunt.

§ 19. Neque vero etiam absolute requiritur, ut per singulas columnas sive verticales, sive horizontales omnes litterae tam latinae quam graecae occurrant, verum etiam in his columnis fieri potest, ut tantum binae litterae sive latinae, sive graecae ingrediantur, dummodo earum summa sit semissis omnium quatuor. Pro hujusmodi autem figuris condendis, operationibus peculiaribus opus est, pro quibus vix certae regulae praescribi possunt, dummodo litterae tam latinae, quam graecae ita disponantur, ut non solum per omnes fascias debitam summam efficiant, sed etiam cum singulis latinis omnes graecae combinentur.

§ 20. Ut hujus operationis exemplum demus, statuamus primo esse $a+d=b+c$, ac litteras latinas ita disponamus, ut sequitur

a	a	d	d
d	d	a	a
b	b	c	c
c	c	b	b

ubi per omnes plane fascias summa numerorum est eadem, pro litteris autem graecis per diagonalem sinistram cum singulis litteris latinis graecae cognomines combinentur, quandoquidem circa hanc fasciam utrinque binae litterae diversae dispositae reperiuntur, quibuscum igitur litterae graecae permutatae conjungantur, unde sequens nascetur figura

$a\alpha$	$a\delta$	$d\beta$	$d\gamma$
$d\alpha$	$d\delta$	$a\beta$	$a\gamma$
$b\delta$	$b\alpha$	$c\gamma$	$c\beta$
$c\delta$	$c\alpha$	$b\gamma$	$b\beta$

ubi ergo pro litteris graecis necesse est, ut capiatur $\alpha+\delta=\beta+\gamma$; ita si capiamus $a=0$, $b=4$, $c=8$, $d=12$ et $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=3$ et $\delta=4$, orietur istud quadratum magicum

1	4	14	15
13	16	2	3
8	5	11	10
12	9	7	6

§ 21. Plures aliae hujusmodi figurae formari possunt, cujusmodi est sequens:

$a\alpha$	$d\beta$	$a\delta$	$d\gamma$
$b\delta$	$c\gamma$	$b\alpha$	$c\beta$
$d\alpha$	$a\beta$	$d\delta$	$a\gamma$
$c\delta$	$b\gamma$	$c\alpha$	$b\beta$

ubi manifestum est pro litteris latinis sumi debere $a+d=b+c$, pro graecis autem $\alpha+\delta=\beta+\gamma$, unde si, ut ante, valores sumantur, orietur sequens quadratum magicum:

1	14	4	15
8	11	5	10
13	2	16	3
12	7	9	6

§ 22. In his omnibus formis tam litterae latinae, quam graecae per omnes fascias eandem summam constituunt; fieri autem potest, ut ne hoc quidem usu veniat, verum tamen summa omnium debitum valorem obtineat, cujusmodi anomalias recensere eo magis inutile foret, cum pro talibus casibus nullae certae regulae tradi queant, quamobrem ex sequentibus speciebus eos casus potissimum contemplabimur, quibus significatio litterarum tam latinarum, quam graecarum nulla restrictione limitatur.

III. Species quadratorum in 25 cellulas divisorum.

§ 23. Hic igitur occurrent tam quinque litterae latinae a, b, c, d, e, quam graecae α, β, γ, δ, ε, quarum illarum valores erunt: 0, 5, 10, 15, 20, harum vero 1, 2, 3, 4, 5, ambos igitur harum litterarum ordines cellulis quadrati ita inscribi oportet, ut in singulis fasciis tam horizontalibus, quam verticalibus, atque etiam diagonalibus omnes litterae occurrant.

§ 24. Primum igitur huic quadrato per supremam fasciam horizontalem litteras latinas ordine inscribamus, deinde fasciam diagonalem sinistram litteris compleamus, ita ut in nullis reliquarum fasciarum eadem littera bis occurrat, id quod plus uno modo fieri potest. Hac autem fascia constituta, altera diagonalis sponte impletur, ut in figura annexa videre licet:

$a\varepsilon$	$b\delta$	$c\gamma$	$d\beta$	$e\alpha$
$e\beta$	$c\alpha$	$d\delta$	$a\gamma$	$b\varepsilon$
$d\alpha$	$e\gamma$	$b\beta$	$c\varepsilon$	$a\delta$
$b\gamma$	$d\varepsilon$	$a\alpha$	$e\delta$	$c\beta$
$c\delta$	$a\beta$	$e\varepsilon$	$b\alpha$	$d\gamma$

Deinde sub cellula media scribi debet a et super ea d, unde columna media verticalis jam erit completa, tum vero reliquae fasciae sponte se produnt.

§ 25. Pro litteris graecis non opus est ad fasciam diagonalem confugere, sed si consideremus columnam verticalem mediam, utrinque in cellulis respondentibus deprehendimus binas diversas litteras, quamobrem in hac fascia singulis litteris latinis adscribamus graecas cognomines, et in locis respondentibus litteras graecas cognomines permutemus, quemadmodum in figura fecimus.

§ 26. In hac igitur figura nulla plane limitatio praescribitur, sed tam pro litteris latinis, quam pro graecis quoslibet numerorum respondentium accipere licet, quare cum quinae litterae 120 permutationes admittant, hinc omnio 14400 variationes oriri possunt.

§ 27. Quodsi etiam hic fascias sive horizontales, sive verticales inter se permutare velimus, plures alias formas impetrabimus, quae autem ob diagonales plerumque certas determinationes postulabunt, veluti si hic prima columna verticalis in finem transponatur, orietur sequens forma:

$b\delta$	$c\gamma$	$d\beta$	$e\alpha$	$a\varepsilon$
$c\alpha$	$d\delta$	$a\gamma$	$b\varepsilon$	$e\beta$
$e\gamma$	$b\beta$	$c\varepsilon$	$a\delta$	$d\alpha$
$d\varepsilon$	$a\alpha$	$e\delta$	$c\beta$	$b\gamma$
$a\beta$	$e\varepsilon$	$b\alpha$	$d\gamma$	$c\delta$

ubi quidem in omnibus fasciis tam horizontalibus, quam verticalibus omnes litterae occurrunt; verum ut simul diagonalibus satisfiat, tam haec summa $3c+b+d+3\delta+\beta+\varepsilon$, quam ista

$$3a+b+c+3\varepsilon+\alpha+\beta$$

praescriptam summam omnium latinarum et graecarum litterarum scilicet

$$a+b+c+d+e+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon$$

conficiat, quamobrem hinc nascentur hae duae aequationes

$$2c+2\delta=a+e+\alpha+\gamma \quad \text{et} \quad 2a+2\varepsilon=d+e+\gamma+\delta,$$

quibus conditionibus pluribus modis satisfieri poterit, quin etiam seorsim tam litterae latinae, quam graecae ita determinari poterunt, ut fiat

$$1)\ 2c=a+e, \qquad 2)\ 2a=d+e, \qquad 3)\ 2\delta=\alpha+\gamma \quad \text{et} \quad 4)\ 2\varepsilon=\gamma+\delta.$$

Evidens enim est duabus prioribus satisfieri, si hae litterae d, b, a, c, e progressionem arithmeticam constituant, id quod fit sumendo $d=0$, $b=5$, $a=10$, $c=15$ et $e=20$; duae reliquae conditiones adimplebuntur, si litterae graecae hoc ordine dispositae α, β, δ, ε, γ in progressione arithmetica procedant, id quod fiet sumendo $\alpha=1$, $\beta=2$, $\delta=3$, $\varepsilon=4$ et $\gamma=5$, unde oritur istud quadratum:

8	20	2	21	14
16	3	15	9	22
25	7	19	13	1
4	11	23	17	10
12	24	6	5	18

hic scilicet ubique eadem summa prodit $= 65$.

§ 28. Talis autem distributio litterarum haud exiguam operam et circumspectionem postulat, praecipue in speciebus superioribus, ubi plura elementa prorsus arbitrio nostro relinquuntur, ita ut numerus talium figurarum continuo fiat major; verum si eam conditionem omittere velimus, qua nulla plane restrictio inter valores litterarum praescribatur, labor satis commodus reddi potest; si enim litterae c valor medius, qui est 10, tribuatur, reliquae vero arbitrio nostro relinquantur, eadem littera c alteram diagonalem complere poterimus, unde reliquae litterae ordine naturali sequantur, quemadmodum ex hac figura perspicietur:

c	d	e	a	b
b	c	d	e	a
a	b	c	d	e
e	a	b	c	d
d	e	a	b	c

Nunc in fascia media horizontali singulis litteris latinis graecae cognomines adscribantur, tum vero circa eam utrinque cognomines graecae permutentur; hincque orietur sequens forma:

$c\delta$	$d\varepsilon$	$e\alpha$	$a\beta$	$b\gamma$
$b\varepsilon$	$c\alpha$	$d\beta$	$e\gamma$	$a\delta$
$a\alpha$	$b\beta$	$c\gamma$	$d\delta$	$e\varepsilon$
$e\beta$	$a\gamma$	$b\delta$	$c\varepsilon$	$d\alpha$
$d\gamma$	$e\delta$	$a\varepsilon$	$b\alpha$	$c\beta$

unde patet pro γ medium valorem, qui est 3, accipi debere; quodsi ergo hic sumamus ordine

$$a = 0, \quad b = 5, \quad c = 10, \quad d = 15, \quad e = 20 \quad \text{et} \quad \alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 3, \quad \delta = 4, \quad \varepsilon = 5,$$

orietur sequens quadratum magicum:

14	20	21	2	8
10	11	17	23	4
1	7	13	19	25
22	3	9	15	16
18	24	5	6	12

§ 29. Per regulam autem vulgarem circa formationem quadratorum imparium, quae ubique tradi solet, ista figura formatur

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

quae num in forma nostra contineatur dispiciamus: ac primo quidem pro diagonali sinistra ob $c = 10$ statui debet $\delta = 1$, $\alpha = 2$, $\gamma = 3$, $\varepsilon = 4$ et $\beta = 5$; tum vero $b = 0$, $d = 20$, $a = 15$, $e = 5$. Ex quibus valoribus hoc ipsum quadratum nascitur.

§ 30. Plures alias hujusmodi formas satis regulares tam in hac specie, quam sequentibus excogitare licet; unde numerus quadratorum magicorum facili negotio in immensum augeri poterit. Vix autem unquam certi esse possemus, nos omnes casus possibiles exhausisse, etiamsi eorum numerus certe non sit infinitus. Maxime autem sine dubio foret desiderandum, ut regulae magis generales et ad usum practicum accommodatae detegerentur, ne opus sit plerasque operationes quasi palpando peragere. Pulcherrimum enim certe incrementum theoriae combinationum hinc esset accessurum.

IV. Species quadratorum in 36 cellulas divisorum.

§ 31. Quoniam hic numerus variationum nimis est magnus, et plurimae determinationes arbitrio nostro relinquuntur, afferamus hic tantum regulam specialem, qua litterae tam latinae quam graecae facile in ordinem debitum disponi queant, litteris scilicet sex latinis tales valores tribuantur, ut sit $a + f = b + e = c + d$, similique modo pro graecis $\alpha + \zeta = \beta + \varepsilon = \gamma + \delta$; tum enim ad similitudinem § 20 singulis fasciis horizontalibus binas litteras latinas conjugatas inscribamus, in columnas vero verticales ejusmodi binas litteras graecas disponamus, hocque modo obtinebitur sequens figura

$a\alpha$	$a\zeta$	$a\beta$	$f\varepsilon$	$f\gamma$	$f\delta$
$f\alpha$	$f\zeta$	$f\beta$	$a\varepsilon$	$a\gamma$	$a\delta$
$b\alpha$	$b\zeta$	$b\beta$	$e\varepsilon$	$e\gamma$	$e\delta$
$e\zeta$	$e\alpha$	$e\varepsilon$	$b\beta$	$b\delta$	$b\gamma$
$c\zeta$	$c\alpha$	$c\varepsilon$	$d\beta$	$d\delta$	$d\gamma$
$d\zeta$	$d\alpha$	$d\varepsilon$	$c\beta$	$c\delta$	$c\gamma$

§. 32. Hinc autem jam satis clare intelligitur, talem litterarum dispositionem in omnibus speciebus paribus cum successu adhibere posse, pro speciebus autem imparibus methodus ante descripta, qua litterae medios valores tenentes per ambas diagonales continuo repetuntur, reliquae vero litterae hinc in ordine naturali se insequuntur, ita ut quotcunque cellulae in quadrato proponantur, semper in nostra potestate sit plurima quadrata magica construere, etiamsi regulae hinc traditae maxime sint speciales.