Solutio problematis analytici difficillimi

Leonhard Euler

XIII.

SOLUTIO PROBLEMATIS ANALYTICI DIFFICILLIMI.

Conventui exhibita die 19. Aug. 1782.

§. 1. Si p, q et P, Q denotent functiones homogeneas nullius dimensionis binarum variabilium x et y datas et proposita fuerit haec formula differentialis $\partial v = \frac{p\partial x + \Pi q \partial y}{\Pi P + Q} x^{n-1}$, in quam ingreditur functio indeterminata Π, quam ita determinari oportet, ut integratio succedat. Hujusmodi formulae mihi se obtulerunt cum nuper problema de trajectoriis orthogonalibus ad superficies translatum perscrutarer atque evidens est, hanc quaestionem maxime esse arduam, et summam sagacitatem in evolvendis functionibus duarum variabilium requirere, in quo negotio geometrae nunc quidem plurimum sunt occupati.

§. 2. Quod si igitur statuamus $y = tx$ erunt litterae p, q, P, Q functiones datae ipsius $t = \frac{y}{x}$, et quia potestas indefinita ipsius x est adjuncta, haec formula omnes complectitur casus quibus tam numerator quam denominator sunt functiones homogeneae ipsarum x et y. Positione igitur $y = tx$ tota formula ad has duas variabiles x et t reducitur. Quemadmodum igitur functio illa indefinita Π determinari debeat hic nunc accuratius investigemus.

§. 3. Ac primo quidem statuamus $\Pi = \frac{\Theta Q + \Delta}{1 - \Theta P}$ ubi scilicet binas novas functiones incognitas Δ et Θ introducimus et facta hac substitutione formula nostra in sequentes duas partes discerpetur:

$$\partial v = \frac{p\partial x + \Delta q\partial y}{\Delta P + Q} x^{n-1} + \frac{\Theta(Q q\partial y - Pp\partial x)}{\Delta P + Q} x^{n-1},$$

quarum priorem brevitatis gratia per ∂u, posteriorem vero per ∂w designabo, atque binas litteras Δ et Θ, ita definire conabor, ut utraque pars integrationem admittat.

§. 4. Nunc loco ∂y scribamus ejus valorem $t\partial x + x\partial t$ atque pars prior induet hanc formam:

$$\partial u = \frac{x^{n-1}\partial x(p + \Delta qt)}{\Delta P + Q} + \frac{x^n \Delta qt}{\Delta P + Q},$$

quae quo facilius tractari possit statuatur $\frac{p + \Delta qt}{\Delta P + Q} = \Sigma$ unde fit $\Delta = \frac{\Sigma Q - p}{qt - \Sigma P}$ et pro altero membro fit $\frac{\Delta q}{\Delta P + Q} = \frac{\Sigma Q q - pq}{Q qt - Pp}$, sicque habebitur $\partial u = \Sigma x^{n-1}\partial x + \frac{x^n q\partial t(\Sigma Q - p)}{Q qt - Pp}$. Quamobrem, si Σ tantum involvat variabilem t integrale aliam formam habere nequit nisi hanc: $u = \frac{1}{n}\Sigma x^n$; tum autem esse debet $\partial\Sigma = \frac{nq\partial t(\Sigma Q - p)}{Q qt - Pp}$, cujus aequationis resolutio, quia Σ non ultra unam dimensionem ascendit, est facilis.

§. 5. Quo autem integrale commodius exprimatur ponamus $\frac{Q q\partial t}{Q qt - Pp} = \frac{\partial s}{s}$, hincque integrale erit $\frac{\Sigma}{s^n} = -n\int\frac{pq\partial t}{s^n(Q qt - Pp)}$. Ergo quia ex praecedente positione est

$$\frac{q\partial t}{Q qt - Pp} = \frac{\partial s}{Q s} \quad \text{erit} \quad \Sigma = -ns^n\int\frac{p\partial s}{Q s^{n+1}},$$

quam integrationem ut concessam assumamus et statuamus $\int\frac{p\partial s}{Q s^{n+1}} = T$, ita ut sit $\Sigma = -ns^n T$, hocque modo adepti sumus integrale prioris partis $u = -x^n s^n T$, qui valor ergo etiam praebet valorem quaesitum v, pro casu quo $\Theta = 0$.

§. 6. Eodem modo evolvamus alteram partem unde loco ∂y scripto valore $t\partial x + x\partial t$ prodit:

$$\partial w = \frac{\Theta x^{n-1}\partial x(Q qt - Pp) + \Theta x^n Q q\partial t}{(Q qt - Pp):(qt - \Sigma P)}$$

postquam scilicet loco Δ valorem ante inventum substituimus, qui erat $\Delta = \frac{\Sigma Q - p}{qt - \Sigma P}$. Hic igitur loco $\Theta(qt - \Sigma P)$ scribamus Φ, ut habeamus:

$$\partial w = \Phi \left(x^{n-1}\partial x + \frac{x^n \partial s}{s}\right) = \Phi \frac{x^{n-1}}{s}(s\partial x + x\partial s).$$

Unde patet, integrale w fore functionem quancunque ipsius sx, quam ita repraesentemus: $w = \Phi : xs$ sive, ponendo $xs = z$, si Z functionem quancunque ipsius z denotet, habebitur $w = Z$; inde autem si ponatur $\partial Z = Z' \partial z$, erit $\Phi = \frac{Z' s}{x^{n-1}}$.

§. 7. Inventa igitur utraque parte u et w, erit integrale quaesitum nostrae formulae $v = - Tz^n + Z$ qui valor praeter omnem expectationem tam simplex est inventus atque adeo facile ex ipsa formula proposita formari poterit, cum sit $\frac{\partial s}{s} = \frac{Qq\partial t}{Qqt - Pp}$ et $T = \int \frac{p\partial s}{Qs^{n+1}}$ hicque est valor generalissimus pro formula nostra proposita, siquidem loco Π successive valores hic assignati accipiantur, in quo negotio cum quaestio nostra potissimum versetur, operae pretium erit istum valorem evolvere.

§. 8. Cum igitur primo posuerimus $\Pi = \frac{\Theta Q + \Delta}{1 - \Theta P}$ deinde vero esset $\Delta = \frac{\Sigma Q - p}{qt - \Sigma P}$ et $\Theta = \frac{\Phi}{qt - \Sigma p}$ fiet $\pi = - \frac{p + (\Phi + \Sigma) Q}{qt - (\Phi + \Sigma) P}$. Cum igitur sit $\Sigma = - ns^n T$ et $\Phi = \frac{z' s}{x^{n-1}}$, hincque pro quovis casu oblato valor debitus ipsi Π facile assignari potest.

Alia solutio multo concinnior.

§. 9. Hic statim sine ulla praeparatione ipsa formula proposita, elidendo ∂y dat $\frac{x^{n-1}\partial x(p + \Pi qt) + x^n \Pi q \partial t}{\Pi P + Q} = \partial v$. Ponatur nunc $\frac{p + \Pi qt}{\Pi P + Q} = \Theta$, ut sit $\Pi = \frac{\Theta Q - p}{qt - \Theta P}$, hincque porro $\frac{\Pi}{\Pi P + Q} = \frac{\Theta Q - p}{Qqt - Pp}$, unde fit $\partial v = \frac{\Theta x^{n-1}\partial x + x^n q \partial t(\Theta Q - p)}{Qqt - Pp}$.

§. 10. Ponamus nunc ut supra $\frac{Qq\partial t}{Qqt - Pp} = \frac{\partial s}{s}$, hocque modo fit $\partial v = \Theta x^{n-1}\partial x + \frac{x^n \partial s}{Qs}(\Theta Q - p)$. Hinc autem facile conditio integrabilitatis obtineretur, verum nulla functio arbitraria praeterea in integrale introduceretur quemadmodum solutio completa postulat. At vero singulari artificio etiam hinc integrale completum erui potest, ponendo $\Theta = M + N$. Etiamsi enim haec positio nihil plane polliceri videatur, tamen ea totum negotium absolvetur. Hoc enim modo nostra formula distinguetur in duas partes quarum utramque seorsim tractare licebit. Reperietur enim:

$$\partial v = M x^{n-1}\partial x + x^n \frac{\partial s}{s}\left(M - \frac{p}{Q}\right) + N\frac{x^{n-1}}{s}(s\partial x + x\partial s).$$

§. 11. Prioris partis litteram M involventis, siquidem M spectetur ut functio ipsius t tantum integrale necessarium est $\frac{1}{n}Mx^n$; tum autem esse debet

$$\frac{\partial M}{n} = \frac{\partial s}{s}\left(M - \frac{p}{Q}\right), \text{ sive } s\partial M - n\partial s\left(M - \frac{p}{Q}\right) = 0,$$

quae aequatio integrabilis evadit divisa per s^{n+1}, ut sit

$$\frac{s\partial M - nM\partial s}{s^{n+1}} = \frac{np\partial s}{Qs^{n+1}} \text{ cujus integrale est } \frac{M}{s^n} = -n\int\frac{p\partial s}{Qs^{n+1}}.$$

Quamobrem si ut ante ponamus $\int\frac{p\partial s}{Qs^{n+1}} = T$, habebimus $M = -nTs^n$, ideoque pro hac parte erit $v = -Tx^n s^n$ sive $v = -Tz^n$, posito scilicet $z = xs$.

§. 12. Pro altera parte litteram N involvente ea ob $xs = Z$ erit $N\frac{x^{n-1}}{s}z\partial$; quare cum N sit functio adhuc indeterminata, hujus partis integrale erit functio quaecunque ipsius z, quae si designetur per Z, existente $\partial Z = Z'\partial z$ erit $N = \frac{sZ'}{x^{n-1}}$, quocirca totum integrale erit $v = -Tz^n + Z$. Tum autem erit $\Theta = \frac{Z'z}{x^n} - nTs^n$, hincque colligitur ipsa functio quaesita $\Pi = \frac{\Theta Q - p}{qt - \Theta P}$ quae solutio perfecte congruit cum praecedente.

§. 13. Quanquam autem haec solutio totum negotium felicissime absolvit, tamen dantur casus ad quos hanc solutionem vix ac ne vix quidem accommodare licet. Hoc scilicet evenit, quoties exponens $n = 0$, quoniam formulae $\int x^{n-1}\partial x$ valor tum est lx quam ob caussam iste casus peculiarem evolutionem postulat. Praeterea vero etiam casus quo $Qqt - Pp = 0$ in superiore solutione non comprehenditur, quoniam posuimus $\frac{\partial s}{s} = \frac{Qq\partial t}{Qqt - Pp}$. Hanc igitur ob rem etiam hunc casum seorsim evolvi conveniet.

Evolutio casus,
quo $n = 0$.

§. 14. Hic igitur est $\partial v = \frac{p\partial x + \Pi q\partial y}{\Pi P + Q} \cdot \frac{1}{x}$, quae aequatio, eliso ∂y, abit in hanc: $\partial v = \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{p + \Pi qt}{\Pi P + Q} + \frac{\Pi q\partial t}{\Pi P + Q}$. Nunc ponatur ut ante $\Pi = \frac{\Theta Q - p}{qt - \Theta P}$, et habebitur $\partial v = \frac{\Theta\partial x}{x} + \frac{q\partial t(\Theta Q - q)}{Qqt - Pp}$, quae aequatio posito $\frac{Qq\partial t}{Qqt - P} = \frac{\partial s}{s}$ et $\Theta = M + N$ fit

$$\partial v = \frac{M\partial x}{x} + \frac{\partial s}{Qs}(MQ - p) + N\left(\frac{\partial x}{x} + \frac{\partial s}{s}\right).$$

Hic primum patet, prius membrum integrabile esse non posse, nisi sit M constans, tum autem comprehendi poterit in altero membro; quamobrem hic statim ponere licet $M = 0$, hincque ex priore parte fiet $v = -\int\frac{p\partial s}{Qs}$, ita ut, posito $\int\frac{p\partial s}{Qs} = T$, hinc fiat $v = -T$. Pro altera autem parte, si statuamus ut ante $sx = z$, fit $\partial v = \frac{N}{z}\partial z$. Sit igitur $N = Z'z$, fiat $v = Z$, quocirca ob $M = 0$ erit $\Theta = Z'z$, hincque $\Pi = \frac{QZ'z - p}{qt - PZ'z}$, atque hinc integrale completum erit $v = Z - T$, quae forma ex solutione generali deduci potuisset, at vero ex praesente casu promtius colligitur

Evolutio casus,
quo $Qqt - Pp = 0$.

§. 15. Hoc igitur casu erit $P = \frac{Qqt}{p}$, unde aequatio nostra fit

$$\partial v = \frac{x^{n-1}\partial x(p + \Pi qt) + x^n \Pi q\partial t}{\Pi Qqt + Qp} \cdot p,$$

quae contrahitur in hanc formam:

$$\partial v = x^{n-1}\,\partial x\,\frac{p}{Q} + \frac{x^n\,\Pi p q\,\partial t}{Q\,(\Pi q t + p)}.$$

Ponatur nunc $\frac{\Pi p q}{\Pi q t + p} = \Sigma$ ita ut sit $\Pi = \frac{\Sigma p}{q\,(p - \Sigma t)}$, eritque $\partial v = \frac{p}{Q}\,x^{n-1}\,\partial x + \left(\frac{M\partial t}{Q} + \frac{N\partial t}{Q}\right) x^n$ ponendo scilicet $\Sigma = M + \frac{N}{x^n}$.

§. 16. Hic igitur prioris Partis integrale erit $v = \frac{p x^n}{n\,Q}$, si modo sit $M = \frac{Q}{n\partial t}\,\partial\,.\,\frac{p}{Q}$. Pars vero posterior statim dat $v = \int\frac{N\partial t}{Q}$. Sit igitur $\int\frac{\partial t}{Q} = u$, ac si U denotet functionem quamcunque ipsius u, sumto $N = U'$ erit ex utraque parte $v = \frac{p x^n}{n\,Q} + U$ et nunc erit

$$\Sigma = \frac{Q}{n\partial t}\,\partial\,.\,\frac{p}{Q} + \frac{U'}{x^n} \quad \text{et} \quad \Pi = \frac{\Sigma p}{q\,(p - \Sigma t)}.$$

§. 17. Si fuerit $n = 0$, introducta littera Σ erit

$$\partial v = \frac{p\,\partial x}{Q x} + \frac{\Sigma\,\partial t}{Q},$$

unde si statuamus $\frac{\partial t}{Q} = \partial u$, ponamusque $\Sigma = M l x + N$, denotante N functionem quamcunque ipsius u, scilicet $N = U'$, statim oritur ista aequatio integralis $v = \frac{p}{Q}\,l x + U$, siquidem fuerit $\partial\,.\,\frac{p}{Q} = M\partial u$. Cum igitur sit $M = \frac{1}{\partial u}\,\partial\,.\,\frac{p}{Q}$ erit $\Sigma = \frac{l\,x}{\partial u}\,\partial\,.\,\frac{p}{Q} + U'$ unde ex praecedente formula functio quaesita Π colligitur $\Pi = \frac{\Sigma p}{q\,(p - \Sigma t)}$, unde patet, istum casum prorsus diversae esse naturae quam ut ex praecedente solutione deduci potuisset.