1830

De curvis algebraicis, quarum omnes arcus per arcus circulares metiri liceat

Leonhard Euler

XII.

DE CURVIS ALGEBRAICIS QUARUM OMNES ARCUS PER ARCUS CIRCULARES METIRI LICEAT.

Conventui exhibita die 20. Aug. 1781.

§. 1. Non dubitavi ante aliquot annos istam propositionem tanquam insigne theorema in medium proferre: quod praeter circulum nulla detur curva algebraica, cujus arcubus omnibus aequales arcus circulares assignari queant. Plures etiam adduxi rationes satis probabiles, quae me in hac opinione confirmabant, quanquam probe perspexi eas a perfecta demonstratione adhuc plurimum distare. Praecipua autem ratio mihi erat, quod, postquam in hoc argumento plurimum elaborassem, nullam tamen hujusmodi curvam elicere potuerim.

§. 2. Quamobrem, cum nuper in simili argumento occupatus in genere binas curvas algebraicas investigassem, quae communi rectificatione gauderent, indeque infinitas curvas algebraicas investigassem, quarum longitudo per arcus parabolicos metiri liceret, tum vero etiam infinitas curvas algebraicas, cum Ellipsi eadem rectificatione gaudentes, maxime obstupui, quod, etiamsi ellipsin in circulum converterem, nihilominus curvae inventae a circulo essent diversae. Sententiam igitur meam hic solenniter retractans methodum facilem exponam cujus ope innumerabiles curvae algebraicae inveniri possunt, quarum omnes arcus circularibus sunt aequales.

§. 3. Proposito igitur circulo centro c, radio ca descripto, concipiamus curvam AZ ita comparatam ut ejus arcus indefinitus AZ semper aequalis sit arcui indefinito illius circuli az, quo vocato $az = \omega$ sit quoque arcus $AZ = \omega$. Hanc jam curvam ad centrum quoddam fixum C refero, ejusque naturam per aequationem inter distantiam $CZ = z$ et angulum $ACZ = \Phi$ investigabo, ut quaesito satisfiat. Cum igitur hinc sit arcus $AZ = \int\sqrt{\partial z^2 + zz\partial\Phi^2}$ fieri debet $\partial\omega^2 = \partial z^2 + zz\partial\Phi^2$, unde deducitur $\partial\Phi = \frac{\sqrt{\partial\omega - \partial z^2}}{z}$, ubi ergo totum negotium huc redit ut ejusmodi relatio inter z et ω exquiratur, quae integrale hujus formulae $\Phi = \int\frac{\sqrt{\partial\omega^2 - \partial z^2}}{z}$ per arcum circularem simpliciter exprimat. Fig. 2. 3.

§. 4. Observavi autem hoc satis commode praestari posse si statuamus distantiam $CZ = b + \cos\omega$, quem in finem sumo intervallum $cb = b$, ac demisso ex z perpendiculo zp fiet $cp = \cos\omega$, sicque distantia CZ semper aequalis capi debet intervallo bp. Unde patet pro initio A nostrae curvae fore distantiam $CA = ba = b + 1$. Cum igitur hinc fiat $\partial z = -\partial\omega\sin\omega$ formula differentialis pro $\partial\Phi$ data, posito $z = b + \cos\omega$, induet hanc formam satis concinnam $\partial\Phi = \frac{\partial\omega\cos\omega}{b + \cos\omega}$ cujus ergo integrale arcui circulari aequale esse debet.

§. 5. Ista autem formula sponte in has partes discerpitur: $\partial\Phi = \partial\omega - \frac{b\partial\omega}{b + \cos\omega}$, quarum prima per se est elementum circuli. Pro altera parte ponamus $\tan\frac{1}{2}\omega = t$, fietque $\partial\omega = \frac{2\partial t}{1 + tt}$; tum vero fit $\sin\frac{1}{2}\omega = \frac{t}{\sqrt{1 + tt}}$ et $\cos\frac{1}{2}\omega = \frac{1}{\sqrt{1 + tt}}$, unde colligitur:

$$\cos\omega = \cos\tfrac{1}{2}\omega^2 - \sin\tfrac{1}{2}\omega^2 = \frac{1 - tt}{1 + tt}.$$

Erit ergo $b + \cos\omega = \frac{b + 1 + (b - 1)tt}{1 + tt}$, sicque erit $\frac{b\partial\omega}{b + \cos\omega} = \frac{2b\partial t}{(b + 1) + (b - 1)tt}$ cujus integratio semper ad arcum circularem reducitur dummodo fuerit $b > 1$.

§. 6. Ad hoc integrale inveniendum notetur esse in genere $\int \frac{\partial t}{f + gtt} = \frac{1}{\sqrt{fg}} \text{A tag} \frac{t\sqrt{g}}{\sqrt{f}}$,
unde pro nostro casu erit angulus $\Phi = \omega - \frac{2b}{\sqrt{bb-1}} \text{A tag}\, t\sqrt{\frac{b-1}{b+1}}$. At vero ut horum angulorum differentia geometrice assignari queat necesse est ut coëfficiens $\frac{2b}{\sqrt{bb-1}}$ sit numerus rationalis; atque adeo jam evidens est, quoties hoc contigerit, semper prodituram esse curvam algebraicam AZ cum circulo proposito arcus aequales habentem.

§. 7. Cum sit $z = b + \cos\omega$ plures egregiae proprietates hujus curvae se offerunt, quas probe notari conveniet; namque si ad Z ducatur tangens ZT et vocetur angulus $CZT = \psi$, erit $\sin\psi = \frac{z\partial\Phi}{\partial\omega}$; ergo, ob $\partial\Phi = \frac{\partial\omega\cos\omega}{b+\cos\omega}$ erit $\sin\psi = \cos\omega$, ita ut angulus CZT semper aequetur $90^\circ - \omega$, ideoque, ob $AZ = \omega$ semper erit $\psi = \frac{\pi}{2} - \omega$, denotante $\frac{\pi}{2}$ angulum rectum. Hinc si ex C in tangentem demittatur perpendiculum CT, erit

$$CT = z\sin\psi = z\cos\omega = (b + \cos\omega)\cos\omega.$$

Posito autem hoc perpendiculo $CT = p$, constat semper esse radium osculi curvae $= \frac{z\partial z}{\partial p}$. Cum igitur sit

$$z\partial z = -\partial\omega\sin\omega\,(b+\cos\omega) \text{ et } \partial p = -\partial\omega\sin\omega\,(b+2\cos\omega),$$

erit radius osculi curvae in Z, quem vocemus $r = \frac{b+\cos\omega}{b+2\cos\omega}$ qui ergo in initio, ubi $\omega = 0$ erit $r = \frac{b+1}{b+2}$, ideoque minor quam in circulo. At vero pro arcu $\omega = \frac{\pi}{2}$ erit $r = 1$, ideoque radio circuli aequalis. Sumto autem $\omega = \pi$ erit $r = \frac{b-1}{b-2}$. Unde patet, nisi sit $b > 2$ hunc radium osculi fieri negativum, sive in plagam contrariam vergere, ideoque interea curvam punctum flexus contrarii esse passam, quod eveniet, ubi $\cos\omega = -\frac{b}{2}$, quod ergo $\omega = 90^\circ$ et $\omega = 180^\circ$ cadet. Hocque loco radius osculi erit infinite magnum. Praeterea cum sit $\partial\Phi = \frac{\partial\omega\cos\omega}{b+\cos\omega}$, manifestum est curvam supra axem ascendere, sive angulum $ACZ = \Phi$ augeri ab $\omega = 0$ ad $\omega = 90^\circ$ hinc autem istum angulum iterum decrescere atque adeo curvam axem AC secare antequam fiat $\omega = 180^\circ$ quia tum angulus Φ fiet negativus. Quia enim posito $\omega = 180^\circ$ fit $t = \infty$ ideoque A tag $t\sqrt{\frac{b-1}{b+1}} = 90^\circ$, ideoque

$$\Phi = \omega = 180^\circ \left(1 - \frac{b}{\sqrt{bb-1}}\right), \text{ ubi } \frac{b}{\sqrt{bb-1}} > 1.$$

§. 8. Ex radio osculi invento $r = \frac{b + \cos\omega}{b + 2\cos\omega}$ etiam commode assignari potest amplitudo curvae $AZ = \omega$. Si enim amplitudo ponatur ϑ, erit $\partial\vartheta = \frac{\partial\omega}{r} = \frac{\partial\omega(b + 2\cos\omega)}{b + \cos\omega}$, hoc est erit

$$\partial\vartheta = \partial\omega + \frac{\partial\omega\cos\omega}{b + \cos\omega} = \partial\omega + \partial\Phi,$$

sicque amplitudo ϑ semper aequatur summae angulorum ω et Φ, quamdiu scilicet angulus Φ supra axem cadit. Si enim infra axem cadat negative accipi debet. Cum autem amplitudo curvae continuo augeatur quamdiu curva AZ versus eandem partem est concava. Postquam autem coepit in partem contrariam vergere, quod evenit, ubi punctum flexus contrarii datur (jam notavimus tale punctum occurrere ubi $b + 2\cos\omega = 0$, seu, ubi $\cos\omega = -\frac{b}{2}$) tum, cum sit $z = b + \cos\omega$, fiet $z = \frac{1}{2}b$ ita ut punctum flexus contrarii semper incidat in distantiam $CZ = \frac{1}{2}b$; unde colligimus, curvam ab initio A, ubi $Z = b + 1$ concavitatem axi obvertere donec fiat distantia $z = \frac{1}{2}b$, et quamdiu distantia minor fuerit quam $\frac{1}{2}b$, concavitatem in partem contrariam vergi, id quod evenire nequit, nisi fuerit $b < 2$, quia $b - 1$ minima distantia curvae a centro C, quamobrem si fuerit $b > 2$ tota curva nusquam habebit punctum flexus contrarii.

§. 9. Cum autem nostrae curvae algebraicae fieri nequeant, nisi haec formula $\frac{b}{\sqrt{bb-1}}$ aequetur numero rationali, quem ponamus n, hinc vicissim colligitur $b = \frac{n}{\sqrt{nn-1}}$. Tum igitur erit angulus ACZ

$$= \Phi = \omega - 2n \,\mathrm{A\,tag}\, t \sqrt{\frac{b-1}{b+1}},$$

ubi est $t = \mathrm{tag}\,\frac{1}{2}\,\omega$. Hic igitur erit:

$$\frac{b-1}{b+1} = \frac{n-\sqrt{nn-1}}{n+\sqrt{nn-1}} = \frac{1}{(n+\sqrt{nn-1})^2}$$

sicque erit $t \sqrt{\frac{b-1}{b+1}} = \frac{t}{n+\sqrt{nn-1}}$. Quia igitur necessario sumi debet $n > 1$ manifestum est istam tangentem $t \sqrt{\frac{b-1}{b+1}}$ semper minorem esse quam t. Ponamus ergo brevitatis gratia $t \sqrt{\frac{b-1}{b+1}} = u$, et vocemus angulum cujus tangens est $u = \theta$, habebimus hanc formulam $\Phi = \omega - 2n\theta$, unde deducitur sequens

Constructio geometrica curvarum quaesitarum.

§. 10. Monstrabimus igitur, quomodo pro quovis circuli puncto z punctum ei respondens Z in qualibet curva quaesita definiri queat. Sumto nimirum pro n numero quocunque rationali unitate majore, capiatur $b = \frac{n}{\sqrt{nn-1}} = cb$; tum vero ex arcu $az = \omega$ habebitur $t = \mathrm{tag}\,\frac{1}{2}\,\omega$, hincque etiam innotescet

$$u = t \sqrt{\frac{b-1}{b+1}} = \frac{t}{(n+\sqrt{nn-1})^2}.$$

Nunc abscindatur in circulo arcus cujus tangens est u qui ponatur $= \theta$ et quia n est numerus rationalis geometrice assignabitur $= 2n\theta$; quo facto construatur angulus ACZ aequalis differentiae angulorum ω et $2n\theta$, ut scilicet fiat $\Phi = \omega - 2n\theta$ quo facto sumatur distantia $CZ = b + \cos\omega = bp$ hocque modo pro singulis circuli punctis z determinabuntur puncta correspondentia Z curvae quaesitae.

§. 11. Hinc patet, quando arcus $az = \omega$ evanescit, tum punctum Z incidere in ipsum punctum A existente $CA = ba$. At vero sumto arcu $az = 180^\circ = \pi$, quia tum fit $t = \mathrm{tag}\,\frac{1}{2}\,\pi = \infty$, erit etiam $u = \infty$, unde $\theta = 90^\circ$. Pro hoc ergo casu fiet angulus $\Phi = 180^\circ - 2n.90^\circ = \pi(1-n)$. Quare cum semper sit $n > 1$, angulus Φ ad alteram axis partem cadet, eritque hic angulus $= \pi (n - 1)$. Distantia vero puncti respondentis a centro C erit $b - 1$, quae est minima distantia ad quam nostra curva versus centrum accedere potest. Sufficiet autem hoc modo tractum curvae tantum a distantia maxima $b + 1$, usque ad minimam $b - 1$ descripsisse propterea quod ultra hos terminos curva utrinque aequaliter porrigitur, unde intelligitur, tam distantiam maximam, quam minimam fore curvae diametros. Denique etiam ultro patet, longitudinem curvae a distantia ad sequentem minimam semiperipheriae circuli propositi aequari. Et quia angulus inter maximam et minimam distantiam qui est $(n - 1)\pi$ cum peripheria circuli est commensurabilis sequitur numerum diametrorum semper esse debere finitum.

§. 12. Hinc etiam intelligitur quomodo aequationem inter coordinatas $CP = x$ et $PZ = y$ erui oporteat. Cum enim sit $\tan \phi = \frac{y}{x}$ et $\tan \frac{1}{2}\phi = \sqrt{\frac{z - x}{z + x}}$, cui aequari debet $\tan(\frac{1}{2}\omega - n\theta)$. Quia vero posuimus $\tan \frac{1}{2}\omega = t$, erit $\cos \omega = \frac{1 - tt}{1 + tt}$, unde ob $z = b + \frac{1 - tt}{1 + tt}$ elicitur $tt = \frac{b + 1 - z}{z - b + 1}$ hincque $uu = \frac{b - 1}{b + 1} tt = \frac{bb - 1 - (b - 1)z}{(b + 1)z - bb + 1}$, sicque t et ω per functiones ipsius z, ideoque etiam $\tan n\theta$ per talem functionem exprimetur, unde etiam tangens anguli $\frac{1}{2}\omega - n\theta$ per functionem solius z definietur. Hinc sumtis quadratis formula $\frac{z - x}{z + x}$ aequatur functioni rationali ipsius z, quae aequatio denique ob $z = \sqrt{xx + yy}$ sumendis quadratis ad aequationem rationalem inter x et y reducitur, quae autem plerumque ad plurimas dimensiones assurgit, siquidem pro casu simplicissimo quo $n = 2$ ad sextum ordinem ascendit.

Descriptio curvae simplicissimae quo $n = 2$.

§. 13. Hic ergo ob $n = 2$ erit $b = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sec 30^\circ$ ideoque proxime $b = 1,1547$. Maxima igitur curvae distantia a centro C, Fig. 4.

seu quasi apsis summa erit $CA = b + 1 = 2{,}1547$ ad quam curva est normalis, ibique radius osculi erit $r = \frac{b+1}{b+2} = 0{,}6830$. Minima distantia erit $b - 1 = 0{,}1547$ quae a maxima distabit angulo $= 180^\circ$, ideoque in axem AC continuatum cadet, quae sit CI, ubi curva iterum ad axem erit normalis. At vero radius osculi in I erit $\frac{b-1}{b-2} = -0{,}1830$. Longitudo autem curvae ab abside summa A ad imam I protensae aequabitur semiperipheriae circuli radio 1 descripti.

§. 14. Pro aliis curvae punctis memorabilibus definiendis sumto arcu $AZ = \omega$ erit distantia $CZ = b + \cos\omega$. Pro angulo autem $ACZ = \Phi$ habebimus $\operatorname{tag}\frac{1}{2}\Phi = \operatorname{tag}(\frac{1}{2}\omega - 2\theta)$, ubi posito $\operatorname{tag}\frac{1}{2}\omega = t$ erit $\operatorname{tag}\theta = u = t\sqrt{\frac{b-1}{b+1}} = 0{,}2679\, t$, et vicissim $t = u\sqrt{\frac{b+1}{b-1}} = 3{,}7321\,.\,u$. Cum igitur sit $\operatorname{tag}\theta = u$ erit $\operatorname{tag} 2\theta = \frac{2u}{1-uu}$, unde fit $\operatorname{tag}(\frac{1}{2}\omega - 2\theta) = \frac{t(1-uu)-2u}{1-uu+2tu} = \operatorname{tag}\frac{1}{2}\Phi$.

§. 15. Sumamus nunc arcum $AE = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$ eritque distantia $CE = b$ et angulus $\psi = 90^\circ - \omega = 0$ unde patet rectam CE curvam E tangere, ibique radium osculi fore $= 1$. Pro angulo ACE investigando habemus $t = 1$ et $u = 0{,}2679 = \operatorname{tag}\theta$. Erit ergo angulus $\theta = 15^\circ, 0'$, ideoque $\frac{1}{2}\Phi = 15^\circ, 0'$, hocque modo erit angulus $ACE = 30^\circ$.

§. 16. Hinc igitur curva ad axem appropinquabit eumque mox secabit in F, ubi ergo, cum fiat $\Phi = 0$ erit $t(1-uu) = 2u$ sive $3{,}7321(1-uu) = 2$, unde reperitur $uu = 0{,}4641$, hincque $t = 2{,}7321$. Erit ergo $\frac{1}{2}\omega = 69^\circ, 54'$, ideoque $\omega = 139^\circ, 48'$. Unde patet curvam hic ad axem sub angulo $49^\circ, 48'$, esse inclinatam, distantiam vero fore $CF = b - \sin(49^\circ, 48') = 0{,}3909$. Radius osculi hoc loco erit $= -1{,}0483$. Hic ergo curva jam in contrariam partem est inflexa ideoque punctum flexus contrarii praecessit punctum F.

§. 17. Ad hoc ergo punctum, quod sit in G inveniendum jam supra notavimus id incidere ubi distantia $CG = \frac{1}{2}b = 0,5773$, ita ut $\cos\omega = -\frac{1}{2}b$ ideoque $\omega = 125^\circ, 16'$. Quare hoc loco curva ad rectam CG inclinatur sub angulo $35^\circ, 16'$. Quia porro est $\frac{1}{2}\omega = 62^\circ; 38'$, erit $t = 1, 9319$, hincque porro $u = 0, 5176$, quae est tangens anguli θ qui consequenter erit $27^\circ, 22'$ ergo $\frac{1}{2}\Phi = 7^\circ, 54'$, consequenter angulus $FCG = 15^\circ, 48'$. Ex his autem principalibus curvae punctis tractus curvae facile satis exacte describi poterit, unde cum recta AI simul curvae sit diameter tota curva habet hanc figuram.

Supplementum.

§. 18. Solutio sequentis problematis non parum elegantis omnes curvas methodo praecedente inventas multo facilius et commodius largietur.

Problema.

Invenire curvam EZ ad punctum fixum C relatam, cujus quilibet arcus EZ ad angulum EZC ubique eandem teneat rationem. Fig. 5.

Solutio.

§. 19. Hic igitur statim patet, arcum curvae EZ, quia angulo EZC est proportionalis aequalem fore arcui circulari eundem angulum metientis, ideoque si hae curvae fuerint algebraicae eas scopo nostro esse satisfacturas. Ad eas inveniendas ponamus angulum $ECZ = \Phi$ et distantiam $CZ = z$ ut habeamus pro situ proximo $ZS = z\partial\Phi$ et $zS = \partial z$. Ponamus nunc angulum $EZC = \omega$, arcum vero $EZ = a\omega$ et quia omnes curvae similes ad idem punctum C relatae aeque satisfaciunt sumere licebit $a = 1$, ut sit arcus $EZ = \omega$, ejusque ergo elementum $Zz = \partial\omega$ et nunc triangulum ZzS statim praebet has duas aequationes:

$$\partial z = \partial\omega \cos\omega \text{ et } z\partial\Phi = \partial\omega \sin\omega.$$

§. 20. Prior harum aequationum integrata statim dat $z = b + \sin\omega$, unde ex altera fit $\partial\Phi = \frac{\partial\omega \sin\omega}{b+\sin\omega}$. Hinc statim manifestum est, in puncto E, ubi arcus EZ evanescit fore etiam angulum $\omega = 0$, ideoque distantiam CE $= b$, et hanc rectam CE fore curvae tangentem in ipso initio E.

§. 21. Pro elemento ergo angulari $\partial\Phi$ habemus

$$\partial\Phi = \partial\omega - \frac{b\partial\omega}{b+\sin\omega}, \text{ ideoque } \Phi = \omega - \int \frac{b\partial\omega}{b+\sin\omega},$$

ad quam formulam integrandam ponamus $\tan\frac{1}{2}\omega = t$ unde fit

$$\sin\omega = \frac{2t}{1+tt} \quad \text{et} \quad \partial\omega = \frac{2\partial t}{1+tt},$$

unde oritur formula $\frac{b\partial\omega}{b+\sin\omega} = \frac{2b\partial t}{b(1+tt)+2t}$. Ponamus $\frac{1}{b} = \cos\beta$ ut oriatur $\frac{b\partial\omega}{b+\sin\omega} = \frac{2\partial t}{1+tt+2t\cos\beta}$, cujus formulae integrale semper exprimet arcum circuli, si modo fuerit $b > 1$ et $\frac{1}{b}$ per cosinum cujuspiam anguli referri queat. Constat autem hujus formulae integrale fore $= \frac{2}{\sin\beta} \text{A tag} \frac{t\sin\beta}{1+t\cos\beta}$, ita ut jam nacti simus hanc aequationem: $\Phi = \omega - \frac{2}{\sin\beta} \text{A tag} \frac{t\sin\beta}{1+t\cos\beta}$; unde patet, quoties $\sin\beta$ fuerit numerus rationalis, istum angulum semper geometrice assignari posse, ideoque curvam nostram fore algebraicam, et quia angulum β infinitis modis accipere licet, simul reperiri innumerabiles curvas algebraicas scopo nostro satisfacientes, quippe quarum omnes arcus per arcus circulares mensurantur. Evidens autem est has curvas cum iis quas ante invenimus perfecte convenire, quia hic tantum aliud principium est assumtum in E.

§. 22. Quoniam igitur $\sin\beta$ debet esse numerus rationalis, ponamus $\frac{1}{\sin\beta} = n$, ita ut n sit numerus quicunque unitate major sive integer sive fractus, ac posito br. gratia:

$$\text{A tag} \frac{t\sin\beta}{1+t\cos\beta} = \theta \quad \text{erit} \quad \Phi = \omega - 2n\theta;$$

qui ergo angulus in principio, ubi $\omega = 0$, etiam evanescit. Erit igitur $\frac{1}{2}\Phi = \frac{1}{2}\omega - n\theta$, ac positis coordinatis orthogonalibus $CP = x$ et $PZ = y$ erit $\tang \Phi = \frac{y}{x}$ et $\tang \frac{1}{2}\Phi = \frac{y}{z+x} = \sqrt{\frac{z-x}{z+x}}$. Cum porro sit $z = b + \sin\omega = b + \frac{2t}{1+tt}$, patet etiam t aequari functioni ipsius z, hincque etiam $\tang\theta$, ita ut hinc pro quovis casu aequatio inter coordinatas orthogonales x et y erui queat.

§. 23. Investigemus nunc praecipua puncta hujus curvae, ac primo quidem capiamus arcum $EA = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$, eritque angulus ω rectus et distantia CA ad curvam erit normalis, simulque erit curvae diameter, circa quam curva utrinque pari tractu protenditur. Hic igitur erit $\tang \frac{1}{2}\omega = t = 1$, ideoque $\tang\theta = \frac{\sin\beta}{1+\cos\beta} = \tang\frac{1}{2}\beta$, ita ut $\theta = \frac{1}{2}\beta$, unde invento hoc angulo β, cujus cosinus est $\frac{1}{b}$ erit angulus $ECA = \frac{\pi}{2} - n\beta$. Ipsa autem distantia CA erit $b+1$, quae erit maxima, ad quam curva pertingere potest.

§. 24. Consideremus nunc portionem hujus curvae a puncto E retro protensam, ac sumamus arcum EI quandranti aequalem, unde statui oportebit $\omega = -\frac{\pi}{2}$ atque in hoc puncto I erit distantia $CI = b - 1$, quae est omnium minima ad quam curva descendere potest, hicque iterum erit CI ad curvam normalis, pariterque ejus diameter, unde sufficiet curvam tantum ab A per E usque ad I descripsisse.

§. 25. Hoc igitur casu ob $t = -1$, erit $\theta = A\tang\frac{-\sin\beta}{1-\cos\beta}$, sicque iste angulus θ erit negativus, ejusque tangens $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$, quae expressio est cotangens anguli $\frac{1}{2}\beta$, sicque erit $-\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\beta$, unde prodit angulus $ECI = \Phi = -\frac{\pi}{2} + 2n(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\beta) = (n - \frac{1}{2})\pi - n\beta$, quamobrem angulus inter distantiam maximam $CA = b + 1$ et minimam $CI = b - 1$ interceptus erit $ACI = (n - 1)\pi$, prorsus uti supra est inventus.

§. 26. Consideremus denique casum quo arcus EZ semiperipheriae aequalis accipitur sive $\omega = \pi$, ubi ergo distantia curvam iterum tanget; tum igitur erit $t = \infty$ et $\text{tag}\,\theta = \text{tag}\,\beta$ ideoque $\theta = \beta$, sicque erit angulus $\Phi = \pi - 2n\beta$, qui est duplo major quam angulus ECA, prorsus ut indoles diametri postulat. Ceterum hic notasse juvabit, omnes formulas hic inventas ad praecedentes reduci posse, si loco t scribatur $\frac{1-t}{1+t}$, simulque angulus Φ minuatur angulo $\text{ECA} = \frac{\pi}{2} - n\beta$.