1830

# De binis curvis algebraicis eadem rectificatione gaudentibus

Leonhard Euler

# XI.

## DE
## BINIS CURVIS ALGEBRAICIS
### EADEM RECTIFICATIONE GAUDENTIBUS.

Conventui exhibita die 20. Aug. 1781.

§. 1. Sint $x$ et $y$ coordinatae orthogonales unius, at X et Y alterius curvae, et quaestio eo redit, ut fiat $\partial x^2 + \partial y^2 = \partial X^2 + \partial Y^2$, ita tamen, ut omnes expressiones prodeant algebraicae. Hujus igitur Problematis duplicem hic sum traditurus solutionem, quae cum plurimum a se invicem discrepare videantur earum quoque consensum ostendere conveniet.

### Solutio prior.

§. 2. Cum igitur reddi oporteat $\partial X^2 + \partial Y^2 = \partial x^2 + \partial y^2$, hoc praestabitur, si statuamus:

$$\partial X = \partial x \cos \Phi + \partial y \sin \Phi$$
$$\partial Y = \partial x \sin \Phi - \partial y \cos \Phi$$

ubi ergo angulum $\Phi$ ita comparatum esse necesse est, ut hae duae formulae integrationem admittant. Ad hoc efficiendum utar methodo olim a me tradita, ubi prima quasi elementa analyseos Infinitorum indeterminatae exposui. Tum igitur prodibit:

$$X = x \cos \Phi + y \sin \Phi + \int \partial \Phi \, (x \sin \Phi - y \cos \Phi)$$
$$Y = x \sin \Phi - y \cos \Phi - \int \partial \Phi \, (x \cos \Phi + y \sin \Phi).$$

Ubi ergo has duas formulas integrales integrabiles reddi oportet, id quod nulla difficultate laborat.

§. 3. Statuamus enim:

$$\int \partial \Phi \, (x \sin \Phi - y \cos \Phi) = P; \; \int \partial \Phi \, (x \cos \Phi + y \sin \Phi) = Q$$

eritque

$$x \sin \Phi - y \cos \Phi = \frac{\partial P}{\partial \Phi}; \quad x \cos \Phi + y \sin \Phi = \frac{\partial Q}{\partial \Phi}$$

ubi ergo pro P et Q functiones quascunque algebraicas ipsarum $\sin \Phi$ et $\cos \Phi$ accipere licet. Tum vero ex his duabus aequationibus ipsae coordinatae $x$ et $y$ sequenti modo determinantur:

$$x = \frac{\partial P \sin \Phi + \partial Q \cos \Phi}{\partial \Phi}$$
$$y = \frac{\partial Q \sin \Phi - \partial P \cos \Phi}{\partial \Phi}.$$

Ex quibus jam coordinatae alterius curvae sponte determinantur:

$$X = \frac{\partial Q}{\partial \Phi} + P; \quad Y = \frac{\partial P}{\partial \Phi} - Q.$$

Hinc ergo nullo plane labore innumerabilia binarum curvarum algebraicarum paria exhiberi poterunt, quae eadem rectificatione erunt praeditae.

§. 4. Quo hoc clarius appareat, sumamus differentialia capiendo $\partial \Phi$ constante, ac reperietur:

$$\partial x = \frac{\partial\partial P \sin \Phi + \partial\partial Q \cos \Phi}{\partial \Phi} + \partial P \cos \Phi - \partial Q \sin \Phi$$
$$\partial y = \partial\partial Q \sin \Phi - \partial\partial P \cos \Phi + \partial Q \cos \Phi + \partial P \sin \Phi$$

unde colligitur

$$\partial x^2 + \partial y^2 = \frac{\partial\partial P^2 + \partial\partial Q^2}{\partial \Phi^2} + \frac{2(\partial P \partial\partial Q - \partial Q \partial\partial P)}{\partial \Phi} + \partial P^2 + \partial Q^2.$$

Simili modo pro altera curva habebimus:

$$\partial X = \frac{\partial\partial Q}{\partial \Phi} + \partial P \text{ et } \partial Y = \frac{\partial\partial P}{\partial \Phi} - \partial Q,$$

ex quibus pro arcus elemento erit

$$\partial X^2 + \partial Y^2 = \frac{\partial\partial Q^2 + \partial\partial P^2}{\partial \Phi^2} + \frac{2(\partial P \partial\partial Q - \partial Q \partial\partial P)}{\partial \Phi} + \partial P^2 + \partial Q^2$$

ideoque $\partial X^2 + \partial Y^2 = \partial x^2 + \partial y^2$, uti requiritur.

## Solutio posterior.

§. 5. Cum effici debeat $\partial x^2 + \partial y^2 = \partial X^2 + \partial Y^2$ erit $\partial x^2 - \partial X^2 = \partial Y^2 - \partial y^2$, ad quam aequationem resolvendam statuamus $x + X = M$; $x - X = m$; $Y + y = N$; $Y - y = n$, quo facto fieri debet $\partial M \partial m = \partial N \partial n$, consequenter $\frac{\partial M}{\partial n} = \frac{\partial N}{\partial m}$ quarum duarum fractionum utraque ponatur $= t$ ut habeamus primo

$\partial M = t\partial n$, ideoque $M = tn - \int n\partial t$. Simili modo pro altera erit $\partial N = t\partial m$, ergo $N = tm - \int m\partial t$.

§. 6. Hoc igitur modo novam variabilem $t$ in calculum introduximus ex qua ipsas coordinatas facile definire licebit. Ponamus enim $\int n\,\partial t = U$, ut fiat $n = \frac{\partial U}{\partial t}$, hinque $M = \frac{t\partial U}{\partial t} - U$. Simili modo, ponendo $\int m\partial t = V$ habebimus $m = \frac{\partial V}{\partial t}$, hinc $N = \frac{t\partial V}{\partial t} - V$, ubi U et V denotent functiones quascunque ipsius $t$.

§. 7. Ex his jam valoribus ipsae coordinatae utriusque curvae sponte se produnt. Cum enim sit

$$x = \frac{M+m}{2};\ X = \frac{M-m}{2};\ Y = \frac{N+n}{2};\ y = \frac{N-n}{2};$$

nihil impedit quominus has formulas duplicemus hincque coordinatae utriusque curvae sequenti modo exprimentur:

$$x = \frac{t\partial U - U\partial t + \partial V}{\partial t};\quad X = \frac{t\partial U - U\partial t - \partial V}{\partial t};$$
$$y = \frac{t\partial V - V\partial t - \partial U}{\partial t};\quad Y = \frac{t\partial V - V\partial t + \partial U}{\partial t}.$$

§. 8. Videamus nunc etiam, quomodo hae formulae quaestioni propositae satisfaciant. Ac sumto elemento $\partial t$ constante elementa pro priore curva erunt:

$$\partial x = \frac{t\partial\partial U + \partial\partial V}{\partial t};\quad \partial y = \frac{t\partial\partial V - \partial\partial U}{\partial t},\quad \text{unde fit}$$
$$\partial x^2 + \partial y^2 = \frac{(1+tt)(\partial\partial U^2 + \partial\partial V^2)}{\partial t^2}.$$

Pro altera curva habebimus:

$$\partial X = \frac{t\partial\partial U - \partial\partial V}{\partial t};\quad \partial Y = \frac{t\partial\partial V + \partial\partial U}{\partial t},\quad \text{hincque}$$
$$\partial X^2 + \partial Y^2 = \frac{(1+tt)(\partial\partial U^2 + \partial\partial V^2)}{\partial t^2}.$$

§. 9. Quamquam hae duae solutiones toto coelo a se invicem discrepare videntur, tamen nullum dubium, quin inter se pulcherrime consentiant, cum utraque omnes plane casus satisfacientes complecti debeat. Interim tamen, si solutiones simpliciores desideremus prior ad hunc scopum magis apta deprehenditur, quippe quae ita restricta ut ponatur $Q = 0$ adhuc plurimas solutiones memorabiles suppeditat. Posito autem $Q = 0$ coordinatae binarum curvarum per formulas istas simplicissimas exprimentur:

$$x = \frac{\partial P \sin\Phi}{\partial\Phi}; \quad X = P$$

$$y = \frac{\partial P \cos\Phi}{\partial\Phi}; \quad Y = \frac{\partial P}{\partial\Phi}.$$

Ubi cum sit $P = X$ adeo immediate ex posteriore curva ad priorem procedere licebit, ita ut altera curvarum quaesitarum nunc quasi cognita spectari possit, id quod in formulis generalibus nullo modo fieri potest. Hanc igitur solutionem, etsi maxime particularem fusius prosequi conveniet, ubi quidem litteras majusculas et minusculas inter se permutemus.

### Solutio particularis,
### has coordinatas complectens:

$$x = P; \quad X = \frac{\partial P \sin\Phi}{\partial\Phi}.$$

$$y = \frac{\partial P}{\partial\Phi}; \quad Y = \frac{\partial P \cos\Phi}{\partial\Phi}.$$

§. 10. Cum hic pro priore curva sit $P = x$ erit $y = \frac{\partial x}{\partial\Phi}$, unde fit $\partial\Phi = \frac{\partial x}{y}$; cum igitur $\partial\Phi$ sit elementum arcus circularis, quoties aequatio inter $x$ et $y$ ita fuerit comparata, ut formula integralis $\int \frac{\partial x}{y}$ arcum circularem exprimat, toties alia curva exhiberi poterit eandem rectificationem involvens, quippe pro qua habebitur 1°) $\frac{X}{Y} = \operatorname{tag}\Phi$; deinde quoque habebitur:

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{\partial x}{\partial\Phi} = y,$$

ita ut chorda curvae quaesitae semper aequalis sit applicatae alterius curvae. Tales igitur casus accuratius evolvere operae erit pretium.

### Evolutio casus
quo pro curva data est $y = \frac{aa + xx}{b}$.

§. 11. Hic statim patet istam aequationem pertinere ad Parabolam, cujus parameter $= b$, eamque adeo permanere eandem, utcunque quantitas $a$ immutetur, cum tantum initium applicatarum mutetur, quamobrem si curva quaesita ab $a$ pendebit, hinc infinitae adeo curvae diversae reperientur quae cum parabola communi gaudeant rectificatione.

§. 12. Hinc igitur fiet $\partial \Phi = \frac{b dx}{aa + xx}$, ubi ponamus $b = na$, ut integrando prodeat $\Phi = n \text{ A tag } \frac{x}{a}$. Quia igitur volumus ut parameter $b$ invariatus maneat, erit $a = \frac{b}{n}$, sive $n = \frac{b}{a}$, ita ut numerus $n$ rationem inter parametrum $b$ et quantitatem arbitrariam $a$ involvat. Hinc igitur fiet $x = a \text{ tag } \frac{\Phi}{n}$. Unde patet, ut formulae nostrae prodeant algebraicae, numerum $n$ absolute rationalem esse debere; alioquin enim ad genus quantitatum quae interscendentes appellari solent devolveremur.

§. 13. Cum igitur hinc sit $\partial x = \frac{a \partial \Phi}{n \cos \frac{\Phi^2}{n}}$, erit pro curva quaesita $\sqrt{X^2 + Y^2} = y$ et $\frac{X}{Y} = \text{tag } \Phi$. Quia igitur angulus $\Phi$ ex ipsa aequatione pro curva data innotescit, haec curva facile geometrice construi poterit, atque constructio eadem plane prodit, quam non ita pridem pro infinitis curvis algebraicis, quae cum parabola communem rectificationem habeant, dedi.

### Evolutio casus,
quo pro curva data est $ny = \sqrt{aa - xx}$.

§. 14. Hic igitur erit $\partial \Phi = \frac{\partial x}{y} = \frac{n \partial x}{\sqrt{aa - xx}}$ ideoque $\Phi = n \text{A} \sin \frac{x}{a}$, unde fit $x = a \sin \frac{\Phi}{n}$ et $y = \frac{a}{n} \cos \frac{\Phi}{n}$. Evidens autem est hanc curvam datam esse ellipsin cujus alter semiaxis $= a$, alter vero $\frac{a}{n}$. Pro curva quaesita igitur habebimus ejus chordam $\sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{a}{n} \cos \frac{\Phi}{n}$ et $\frac{X}{Y} = \operatorname{tag} \Phi$, unde iterum constructio facillima deducitur, si modo $n$ fuerit numerus rationalis. Cognita enim chorda et angulo quo ea ad axem fixum inclinatur constructio facillime expedietur.

§. 15. Hic ante omnia observasse juvabit, si pro data curva circulum accipiamus, ut sit $n = 1$, fore $y = \sqrt{aa - xx}$. Ponamus brevitatis gratia $\sqrt{X^2 + Y^2} = Z$, et cum sit $y = Z = \sqrt{aa - xx}$, erit $x = \sqrt{aa - ZZ}$, hincque $\operatorname{tag} \Phi = \frac{X}{Y} = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{aa - ZZ}}{Z}$. Hinc fiet $\frac{X^2}{Y^2} = \frac{aa - ZZ}{ZZ}$ sive $ZZ(XX + YY) = aaYY$ seu $Z^4 = aaYY$ atque $ZZ = aY$, quae est aequatio pro circulo, ita ut etiam nunc nulla curva exhiberi posse videatur, quae cum circulo communi rectificatione gaudeat praeter ipsum circulum.

§. 16. Consideremus etiam casum quo $n = 2$ quo fit

$$x = \sin \frac{\Phi}{2} \text{ et } y = \frac{a}{2} \cos \frac{\Phi}{2}.$$

Hinc igitur erit $Z = \frac{a}{2} \cos \frac{\Phi}{2}$. Cum igitur sit $\operatorname{tag} \Phi = \frac{X}{Y}$ erit $\cos \Phi = \frac{Y}{Z}$. Cum autem $\cos \frac{1}{2} \Phi = \sqrt{\frac{1 + \cos \Phi}{2}}$; pro curva quaesita oritur haec aequatio:

$$Z = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{Z + Y}{2Z}}, \text{ ideoque } 8Z^3 = aa(Z + Y),$$

quae expressio, ob $Z = \sqrt{XX + YY}$ ad rationalitatem perducta ad gradum sextum ascendit.

## Evolutio casus,

quo pro curva data est $ny = b + \sqrt{aa - xx}$.

§. 17. Evidens est hanc aequationem semper esse pro ellipsi, quicunque valor litterae $b$ tribuatur, atque adeo casu $n = 1$

hanc curvam fore circulum. Tum autem habebimus $\partial\Phi = \frac{n\,\partial x}{b+\sqrt{aa-xx}}$, quae expressio, posito $x = \frac{2au}{1+uu}$, unde fit $\partial x = \frac{2a\partial u(1-uu)}{(1+uu)^2}$ et $\sqrt{aa-xx} = \frac{a(1-uu)}{1+uu}$, induit hanc formam: $\partial\Phi = \frac{2na\partial u(1-uu)}{(1+uu)(b+a+uu(b-a))}$, quam in duas hujusmodi partes discerpere licet

$$\frac{\alpha\,\partial u}{1+uu} + \frac{\beta\,\partial u}{b+a+(b-a)uu},$$

quarum integratio utraque ad arcum circuli deducitur, si modo fuerit $b > a$.

§. 18. Resolutione autem facta reperitur $\alpha = 2n$ et $\beta = -2nb$, ita ut habeamus $\partial\Phi = \frac{2n\partial u}{1+uu} - \frac{2nb\,\partial u}{b+a+(b-a)uu}$. Cum jam in genere sit $\int\frac{\partial u}{f+guu} = \frac{1}{\sqrt{fg}}\,\mathrm{A\ tag}\,\frac{u\sqrt{g}}{\sqrt{f}}$, erit

$$\Phi = 2n\,\mathrm{A\ tag}\,u - \frac{2nb}{\sqrt{bb-aa}}\,\mathrm{A\ tag}\,u\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}.$$

Haec igitur aequatio ut primo fiat realis necesse est ut sit $b > a$; deinde ut etiam algebraica fiat necesse est ut tam $2n$ quam $\frac{2nb}{\sqrt{bb-aa}}$ sint numeri rationales. Hunc in finem ejusmodi rationem inter $b$ et $a$ statui oportet, ut fiat $\frac{b}{\sqrt{bb-aa}} = \lambda$, numerus rationalis, unde fit $\frac{b}{a} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda\lambda-1}}$, sicque erit

$$\frac{b-a}{b+a} = \frac{\lambda-\sqrt{\lambda\lambda-1}}{\lambda+\sqrt{\lambda\lambda-1}} = \frac{1}{(\lambda+\sqrt{\lambda\lambda-1})^2} \text{ ideoque } \sqrt{\frac{b-a}{b+a}} = \frac{1}{\lambda+\sqrt{\lambda\lambda-1}},$$

quo valore substituto fiet

$$\Phi = 2n\,\mathrm{A\ tag}\,u - 2n\lambda\,\mathrm{A\ tag}\,\frac{u}{\lambda+\sqrt{\lambda\lambda-1}}.$$

§. 19. Componitur ergo angulus $\Phi$ ex duobus angulis quos vocemus $\zeta$ et $\eta$, quorumque ergo tangentes per $u$ ita exprimuntur, ut sit $\mathrm{tag}\,\zeta = u$ et $\mathrm{tag}\,\eta = \frac{u}{\lambda+\sqrt{\lambda\lambda-1}}$, tum vero erit $\Phi = 2n\zeta - 2n\lambda\eta$ sive $\frac{\Phi}{2n} = \zeta - \lambda\eta$. Nunc evidens est si modo $\lambda$ fuerit numerus rationalis etiam anguli $\lambda\eta$ tangentem algebraice per $u$ exprimi; ergo etiam tangens differentiae horum angulorum, hoc est anguli $\frac{\Phi}{2n}$, aequabitur functioni algebraicae ipsius $u$ ideoque etiam tangens ipsius anguli $\Phi$, si modo $n$ fuerit numerus rationalis, unde patet hanc solutionem ad alias ellipses adaptari non posse.

§. 20. Cum igitur ellipsis quam consideremus eadem maneat quicunque valor ipsi $b$ tribuatur, ad ejus indolem cognoscendam sumamus $b = 0$, ut sit $y = \frac{\sqrt{aa - xx}}{n}$, unde patet ejus semiaxem transversum fore $= a$, ubi scilicet $y = 0$, conjugatum vero $= \frac{a}{n}$. Quare noster calculus ad alias ellipses accommodari nequit, nisi quarum axes inter se teneant rationem rationalem. Praeterea vero pro $b$ alios valores assumere non licet, nisi quibus fit $\frac{b}{\sqrt{bb - aa}}$ numerus rationalis. Unde patet, nihilominus semper innumeras curvas algebraicas inveniri posse quae cum tali ellipsi communem rectificationem contineant.

§. 21. Cum igitur pro curva quaesita sit $\frac{X}{Y} =$ tag $\Phi$, etiam haec fractio $\frac{X}{Y}$ per functionem algebraicam ipsius $u$ exprimetur. Deinde quia invenimus $\sqrt{X^2 + Y^2} = y = \frac{b + \sqrt{aa - xx}}{n}$, etiam haec chorda per functionem algebraicam ipsius $u$ exprimetur, cum sit $x = \frac{2au}{1 + uu}$, et $\sqrt{aa - xx} = \frac{a(1 - uu)}{1 + uu}$, unde fit

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{b + a + (b - a)uu}{n(1 + uu)}.$$

Quamobrem cum ambae hae formulae: $\frac{X}{Y}$ et $\sqrt{X^2 + Y^2}$ per functiones algebraicas ejusdem quantitatis $u$ determinentur, eliminando hanc quantitatem $u$, id quod facile fit ex valore ipsius $\sqrt{X^2 + Y^2}$, quippe quo posito $= Z$, colligitur $uu = \frac{b + a - nZ}{nZ - (b - a)}$. Hic igitur valor, in formula pro tag $\Phi$ inventa, cui $\frac{X}{Y}$ aequatur, substitutus, praebebit aequationem algebraicam inter binas coordinatas curvae quaesitae X et Y, ob $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$, quae autem plerumque ad plurimas dimensiones exsurget.

§. 22. Hic probe notandum est, quoniam (vid. Nov. Act. T. V.) infinitas curvas algebraicas determinavi, quae cum data Ellipsi quacunque communi gaudeant rectificatione solo circulo excepto eas curvas ab iis quas nunc invenimus prorsus esse diversas; neque etiam patet quomodo illae ex solutione particulari qua hic usi sumus deduci queant. Facile autem derivari possunt ex formulis generalibus primae solutionis, id quod hic ostendisse operae pretium videtur.

§. 23. Quia ibi pro altera curva dedimus hos valores:

$$x = \frac{\partial P \sin\Phi + \partial Q \cos\Phi}{\partial \Phi} \text{ et } y = \frac{\partial Q \sin\Phi - \partial P \cos\Phi}{\partial \Phi}$$

sumamus $\frac{\partial P}{\partial \Phi} = -a \cos(n+1)\Phi + b\cos(n-1)\Phi$ et

$$\frac{\partial Q}{\partial \Phi} = a \sin(n+1)\Phi + b\sin(n-1)\Phi, \text{ eritque}$$

$$x = (a+b)\sin n\Phi \text{ et } y = (a-b)\cos n\Phi$$

unde manifesto fit $\frac{xx}{(a+b)^2} + \frac{yy}{(a-b)^2} = 1$, quae aequatio est pro ellipsi, cujus semiaxes sunt $a+b$ et $a-b$.

§. 24. Ex his autem valoribus differentialibus colligitur integrando:

$$P = -\frac{a\sin(n+1)\Phi}{n+1} + \frac{b\sin(n-1)\Phi}{n-1}$$

$$Q = -\frac{a\cos(n+1)\Phi}{n+1} - \frac{b\cos(n-1)\Phi}{n-1}.$$

Quare cum pro altera curva invenerimus:

$$X = \frac{\partial Q}{\partial \Phi} + P \text{ et } Y = \frac{\partial P}{\partial \Phi} - Q,$$

isti valores ita se habebunt:

$$X = \frac{na}{n+1}\sin(n+1)\Phi + \frac{nb}{n-1}\sin(n-1)\Phi$$

$$Y = -\frac{na}{n+1}\cos(n+1)\Phi + \frac{nb}{n-1}\cos(n-1)\Phi.$$

Unde patet, quoniam numerus $n$ penitus arbitrio nostro relinquitur, ex his formulis infinitas prodire curvas algebraicas, nulla alia conditione restrictas, nisi ut $n$ sit numerus rationalis, exceptis tantum duobus casibus $n = 1$ et $n = -1$, simul vero intelligitur, utcunque ratio inter axes fuerit irrationalis curvas quaesitas non turbari.

### *Problema.*

*Consensum inter ambas solutiones generales monstrare et substitutiones indagare, quibus altera in alteram converti queat.*

### Solutio.

§. 25. Quoniam in formulis supra datis tam coordinatas quam functiones inter se permutare licet, ad calculi commoditatem priores coordinatas $x$ et $y$ sequenti modo repraesentemus:

| pro priore solutione | pro posteriore solutione |
|---|---|
| $x = \frac{\partial P \cos\Phi - \partial Q \sin\Phi}{\partial \Phi}$ | $x = \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{t \partial V}{\partial t} + V$ |
| $y = \frac{\partial P \sin\Phi + \partial Q \cos\Phi}{\partial \Phi}$ | $y = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{t \partial U}{\partial t} - U.$ |

Hic igitur ostendendum, qualem relationem primo inter $\Phi$ et $t$, deinde vero inter functiones $p$, $q$ et V, U statui oporteat, ut isti duplices valores ipsarum $x$ et $y$ ad identitatem revocentur.

§. 26. Hunc in finem ante omnia necesse est multitudinem quantitatum quae hic occurrunt imminuere, id quod pulcherrime succedit, si pro priore solutione statuamus $P + Q\sqrt{-1} = \Theta$; tum enim fiet $x + y\sqrt{-1} = \frac{\cos\Phi + \sqrt{-1}\sin\Phi}{\partial\Phi}\partial\Theta$. Pro altera vero solutione ponamus $U + V\sqrt{-1} = \Pi$, ac reperietur

$$x + y\sqrt{-1} = \frac{\partial\Pi}{\partial t}(1 + t\sqrt{-1}) - \Pi\sqrt{-1}.$$

Haec autem expressio ad hanc formam redigitur:

$$x + y\sqrt{-1} = \frac{(1 + t\sqrt{-1})^2}{\partial t}\,\partial\,.\,\frac{\Pi}{1 + t\sqrt{-1}}.$$

Totum negotium ergo huc redit, ut hae duae formulae pro $x+y\sqrt{-1}$ inventae consentientes reddantur.

§. 27. Quo factores priores ad majorem uniformitatem revocemus ponamus $t = \operatorname{tag}\omega$ eritque $1 + t\sqrt{-1} = \frac{\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega}{\cos\omega}$ et $\partial t = \frac{\partial\omega}{\cos\omega^2}$ unde fit $\frac{(1+t\sqrt{-1})^2}{\partial t} = \frac{\cos 2\omega + \sqrt{-1}\sin 2\omega}{\partial\omega}$. Quamobrem nunc ista aequalitas erit docenda:

$$\frac{\cos\Phi + \sqrt{-1}\sin\Phi}{\partial\Phi}.\partial\Theta = \frac{\cos 2\omega + \sqrt{-1}\sin 2\omega}{\partial\omega}\partial.\frac{\Pi\cos\omega}{\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega}$$

et nunc evidens est statui debere $\Phi = 2\omega$; tum enim dividendo utrinque per $\frac{\cos 2\omega + \sqrt{-1}\sin 2\omega}{\partial\omega}$ orietur ista aequalitas satis simplex:

$$\tfrac{1}{2}\partial\Theta = \partial\frac{\Pi\cos\omega}{\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega}.$$

Integralibus igitur sumendis debet esse $\Theta = \frac{2\Pi\cos\omega}{\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega}$ sive

$$\Theta(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega) = 2\Pi\cos\omega.$$

§. 28. Restituamus nunc loco $\Theta$ et $\Pi$ valores assumtos orieturque haec aequatio:

$$(P + Q\sqrt{-1})(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega) = 2\cos\omega(U + V\sqrt{-1})$$

unde partes reales et imaginarias seorsim inter se aequari oportet, hincque ergo duae sequentes determinationes deducuntur:

$$2U\cos\omega = P\cos\omega - Q\sin\omega$$
$$2V\cos\omega = P\sin\omega + Q\cos\omega.$$

ubi meminisse oportet esse $t = \operatorname{tag}\omega$ et $\Phi = 2\omega$ sicque si in solutione posteriore loco U et V isti valores substituantur:

$$U = \frac{P\cos\omega - Q\sin\omega}{2\cos\omega} \quad\text{et}\quad V = \frac{P\sin\omega + Q\cos\omega}{2\cos\omega},$$

ea in priorem convertetur.

§. 29. Vicissim igitur functiones P et Q per U et V ita definientur, $P = 2U\cos\omega^2 + 2V\sin\omega\cos\omega$ sive

$$P = U(1 + \cos 2\omega) + V\sin 2\omega$$
$$\text{et } Q = V(1 + \cos 2\omega) - U\sin 2\omega.$$

Hoc igitur modo patet non solum binas expressiones perfecte inter se consentire, sed etiam substitutiones habentur, quibus altera in alteram converti potest.

§. 30. Ostendamus igitur clarius quomodo posteriores formulae ad priores reduci debeant. Ac primo quidem cum sit:

$$t = \operatorname{tag}\omega = \operatorname{tag}\tfrac{1}{2}\Phi\,,\ \text{erit}\ t = \frac{\sin\Phi}{1+\cos\Phi}\ \text{et}\ \partial t = \frac{\partial\Phi}{1+\cos\Phi}\,;$$

tum vero erit etiam:

$$U = \frac{P}{2} - \frac{Q\sin\Phi}{2(1+\cos\Phi)}\ \text{et}\ V = \frac{Q}{2} + \frac{P\sin\Phi}{2(1+\cos\Phi)}\,.$$

Simili modo priores ex posterioribus nascentur; namque ob

$$\operatorname{tag}\tfrac{1}{2}\Phi = t\ \text{erit}\ \sin\Phi = \frac{2t}{1+tt}\ \text{et}\ \cos\Phi = \frac{1-tt}{1+tt}$$

tum vero $\partial\Phi = \frac{2\partial t}{1+tt}$, functiones vero P et Q ita definientur ut sit

$$P = \frac{2U+2Vt}{1+tt}\ \text{et}\ Q = \frac{2V-2Ut}{1+tt}\,.$$

§. 31. Sufficiet autem consensum inter formulas binas pro coordinatis $x$ et $y$ ostendisse quandoquidem nullum dubium superesse potest quin per has substitutiones etiam formulae pro coordinatis X et Y alterae in alteras convertantur, atque hoc modo quaestioni principali quam hic tractare suscepimus perfecte est satisfactum, dum nostrae formulae omnia binarum curvarum algebraicarum paria largiuntur, quae eadem rectificatione sint praeditae.