1830

Methodus nova et facilis formulas cubicas et biquadraticas ad quadratum reducendi

Leonhard Euler

VII.

METHODUS NOVA ET FACILIS

FORMULAS CUBICAS ET BIQUADRATICAS AD QUADRATUM REDUCENDI.

Conventui exhibita die 16. Oct. 1780.

§. 1.

Quando in Analysi Diophantea pervenitur ad formulas cubicas vel adeo biquadraticas quadrato aequandas, ante omnia necesse est, ut unus saltem casus innotescat, quo hoc eveniat; tum vero praecepta constant, ex tali casu cognito alium eruendi, quo invento formulam propositam ope certae substitutionis in aliam tranformari oportet, unde simili modo novus valor investigari solet. Hoc modo per continuo repetitas substitutiones et transformationes totum negotium absolvi debet, quae autem mox ob numeros continuo majores occurrentes tam fiunt molestae ac taediosae, ut vix quisquam reperiatur, qui has operationes aliquoties reiterare voluerit. Quamobrem non dubito, quin methodus, quam hic sum traditurus insigne incrementum Analysi sit allatura cujus beneficio sine ulla substitutione vel transformatione ex casu quovis cognito alios derivare licet; cujus quidem methodi jam aliquot specimina in medium attuli, hic autem eam dilucide explicare, ejusque usum ostendere accuratius constitui.

§. 2. Sit igitur formula ad quadratum reducenda:

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 = V,$$

ac totum negotium huc redit, ut ista formula ad hanc speciem revocetur $V = P^2 + QR$, ubi literae P, Q, R tales designent formas:

$$P = a + bx + cxx$$
$$Q = d + ex + fxx$$
$$R = g + hx + ixx$$

tum enim cum V debeat esse quadratum, statuatur ejus radix $= P + Qy$, unde orietur ista aequatio: $2Py + Qyy = R$, quam in posterum canonicam vocemus, in qua ergo duae variabiles x et y reperientur quarum utraque non ultra secundam dimensionem exsurgit, ita ut cuilibet valori ipsius x gemini valores ipsius y respondeant, ac vicissim cuilibet valori ipsius y duo valores ipsius x. Haec ergo aequatio, substitutis valoribus ita erit comparata:

$$yy(d + ex + fxx) + 2y(a + bx + cxx) - g - hx - ixx = 0,$$

unde pro variabili x formabitur ista aequatio:

$$xx(fyy + 2cy - i) + x(eyy + 2by - h) + dyy + 2ay - g = 0,$$

ubi brevitatis gratia ponamus:

$$fyy + 2cy - i = S$$
$$eyy + 2by - h = T$$
$$dyy + 2ay - g = U$$

ita ut habeamus hanc aequationem: $Sxx + Tx + U = 0$, quam ergo cum altera aequatione: $Qyy + 2Py - R = 0$ convenire necesse est.

§. 4. Cum igitur cuilibet valori ipsius x respondeant duo valores ipsius y, quorum alter sit y, alter vero y', ex natura aequationum habebitur:

$$y + y' = -\frac{2P}{Q} \text{ et } yy' = -\frac{R}{Q}.$$

Simili modo cum singulis valoribus ipsius y respondeant duo valores ipsius x, qui sint x et x', erit $x + x' = -\frac{T}{S}$ et $xx' = \frac{U}{S}$, quarum formularum ope ex cognitis quibusvis valoribus ipsarum x et y, alii novi assignari poterunt, ex quibus deinde pariter alii novi hocque modo sine fine plures erui poterunt, in qua insigni proprietate consistit natura novae methodi quam hic sum traditurus, quae ergo sine ullis substitutionibus et transformationibus continuo plures novos valores idoneos suppeditat.

§. 5. Quod quo clarius appareat ponamus primos valores ipsarum x et y cognitos esse $x = \alpha$ et $y = \beta$ et quia valori $y = \beta$ respondent duo valores ipsius x, quorum alter est α, alter vero, qui sit γ reperietur ex hac formula:

$$\gamma = -\frac{(e\beta\beta + 2b\beta - b)}{f\beta\beta + 2c\beta - i} - \alpha;$$

eodem modo, quia ipsi γ respondent duo valores ipsius y, quorum alter habetur β, si alter statuatur $= \delta$ erit

$$\delta = -\frac{2(a + b\gamma + c\gamma\gamma)}{d + e\gamma + f\gamma\gamma} - \beta.$$

Nunc quia ipsi δ respondet primo $x = \gamma$, si alter ponatur $= \varepsilon$ reperietur:

$$\varepsilon = -\frac{(e\delta\delta + 2b\delta - b)}{f\delta\delta + 2c\delta - i} - \gamma,$$

hocque modo ulterius progrediendo habebimus:

$$\zeta = -\frac{2(a + b\varepsilon + c\varepsilon\varepsilon)}{d + e\varepsilon + f\varepsilon\varepsilon} - \delta; \quad \eta = -\frac{(e\zeta\zeta + 2b\zeta - b)}{f\zeta\zeta + 2c\zeta - i} - \varepsilon;$$

etc. etc.

Unde patet hanc seriem secundum legem satis simplicem quousque libuerit continuari posse. Inventis autem terminis hujus seriei: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, etc. alterni α, γ, ε, η, etc. praebebunt valores idoneos pro litera x, quibus formula proposita revera fit quadratum.

§. 6. Possunt etiam bini valores cogniti $x = \alpha$ et $y = \beta$ in ordine permutari, ita ut incipiamus ab $y = \beta$ et $x = \alpha$; atque ope earundem formularum similis series retrograda formari poterit, cujus tertius terminus erit novus valor ipsius y, quartus ipsius x, quintus ipsius y et ita porro; ita ut istius seriei termini secundus, quartus, sextus, etc. etiam valores idoneos pro littera x sint exhibituri. Interdum quidem usu venit ut alterutra harum serierum alicubi abrumpatur, quod contingit quando ad terminum infinite magnum pervenitur. Quin etiam ejusmodi casus occurrere possunt, quibus valores ipsius x iterum ad praecedentes revolvuntur, id quod necessario evenire debet pro ejusmodi formulis, quae vel unico tantum casu vel tantum duobus tribusve quadrata evadere possunt; veluti evenit pro hac formula $1 + x^3 = \square$, quae tantum tribus casibus quadratum fieri potest.

§. 7. Cum autem hac operationes institui nequeunt nisi pro litteris x et y valores idonei, quos posuimus $x = \alpha$ et $y = \beta$, fuerint cogniti, tales valores plerumque suppeditat ipsa aequatio canonica

$$yy\mathrm{Q} + 2y\mathrm{P} - \mathrm{R} = 0.$$

Si enim fieri queat $\mathrm{Q} = 0$, sive $d + ex + fxx = 0$, quod evenit quando fuerit $ee - 4df = \square$, tum erit $y = \frac{\mathrm{R}}{2\mathrm{P}}$. Deinde si fuerit $\mathrm{R} = 0$, hoc est $g + hx + ixx = 0$, quod fit quando fuerit $hh - 4gi = \square$ tum bini prodeunt valores pro y, alter $y = 0$, alter $y = -\frac{2\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$. Hoc igitur modo evenire potest, ut pro x quatuor valores idonei reperiantur, simulque iis valores ipsius y respondentes innotescant. Praeterea vero etiam altera forma aequationis canonicae, quae erat $\mathrm{S}xx + \mathrm{T}x + \mathrm{U} = 0$ valores idoneos praebere potest; si enim reddi queat $\mathrm{S} = fyy + 2cy - i = 0$, unde pro y duo valores resultare possunt, id contingit, quando fuerit $cc + fi = \square$; tum autem erit $x = -\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{T}}$. Denique etiam quando fuerit $\mathrm{U} = dyy + 2ay - g = 0$, quod evenit si $aa + dg = \square$ pro x gemini prodeunt valores, alter $x = 0$, alter $x = -\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{S}}$, unde ergo etiam plures casus cogniti erui possunt. Omnes autem istos valores cognitos, qui immediate ex aequatione canonica derivantur vocemus *primitivos*; quandoquidem ex his per praecepta ante tradita innumerabiles alii deduci possunt. Ad hoc autem imprimis requiritur, ut formula proposita V quadrato aequanda ad hanc formam: $\mathrm{V} = \mathrm{PP} + \mathrm{QR}$ redigi queat. Hoc igitur aliquot exemplis illustremus.

Exemplum 1.

§. 8. Sit formula quadrato aequanda:

$$V = 4xx + (x - 1)(3xx - x - 1), \text{ sive}$$

$V = 3x^3 + 1$ erit $P = 2x$; $Q = x - 1$; $R = 3xx - x - 1$ unde aequationis canonicae prior forma erit:

$$(x - 1)yy + 4xy - (3xx - x - 1);$$

altera vero forma:

$$-3xx + (yy + 4y + 1)x - (yy - 1) = 0,$$

unde binae formulae, quas vocemus *directrices* erunt:

$$y + y' = -\frac{4x}{x - 1}; \quad x + x' = \frac{yy + 4y + 1}{3}.$$

At vero ex formula priore canonica oritur valor cognitus $x = 1$, cui respondet $y = \frac{1}{4}$; altera autem forma, facto $yy - 1 = 0$ praebet vel $y = +1$ vel $y = -1$, quorum priori respondet vel $x = 0$ vel $x = 2$; alteri vero $y = -1$ respondet etiam vel $x = 0$ vel $x = -\frac{2}{3}$.

§. 9. Instituamus igitur operationes supra praescriptas et incipiamus primo a valoribus $x = 1$ et $y = \frac{1}{4}$ ac reperiemus sequentem seriem:

$$x = 1; \; y = \tfrac{1}{4}; \; x = -\tfrac{5}{16}; \; y = -\tfrac{101}{84};$$

Sumamus nunc $x = 0$ et $y = +1$, unde formulae directrices producent sequentem seriem valorum idoneorum:

$$x = 0; \; y = 1; \; x = 2; \; y = -9; \; x = \tfrac{40}{3}; \; y = +\tfrac{173}{37}; \text{ etc.}$$

Invertamus ordinem incipiendo ab $y = 1$ et $x = 0$ series valorum idoneorum erit:

$$y = 1; \; x = 0; \; y = -1; \; x = -\tfrac{2}{3}; \; x = \tfrac{8}{25}; \text{ etc.}$$

In his jam seriebus omnes reliqui valores primitivi continentur. In praecedente autem serie ordinem valorum primitivorum $x = 1$ et $y = \frac{1}{4}$ ideo non invertimus, quia sequens y jam prodiisset infinitum.

§. 10. Formula ergo proposita $V = 3x^3 + 1$ ad quadratum reducitur his valoribus ipsius x:

$x=0$; $x=1$; $x=-\frac{2}{3}$; $x=2$; $x=-\frac{5}{16}$; $x=\frac{8}{25}$; $x=\frac{40}{3}$; etc.
qui quomodo satisfaciant videamus.

Si $x=0$ fit $V=1^2$
.. $x=1$ .. $V=2^2$
.. $x=-\frac{2}{3}$ .. $V=\frac{1}{3^2}$
.. $x=2$ .. $V=5^2$
.. $x=-\frac{5}{16}$ .. $V=\frac{61^2}{64^2}$
.. $x=\frac{8}{25}$ .. $V=\frac{151^2}{125^2}$
.. $x=\frac{40}{3}$ .. $V=\frac{253^2}{3^2}$
etc.

Exemplum 2.

§. 11. Proposita sit haec formula quadrato aequanda:

$$V=xx+(xx+1)(xx-2)\text{; sive}$$

$V=x^4-2$, ubi est $P=x$; $Q=xx+1$; $R=xx-2$.
Hinc aequatio canonica erit:

$$(xx+1)yy+2xy-(xx-2)=0;$$

altera autem ejus forma erit:

$$(yy-1)xx+2xy+(yy+2)=0$$

unde formantur hac formulae directrices:

$$y'=-\frac{2x}{xx+1}-y \quad \text{et} \quad x'=-\frac{2y}{yy-1}-x.$$

Prior autem forma cum neque fieri queat $Q=0$ neque $R=0$ nullos dat valores primitivos; altera autem forma dat $S=0$ ideoque $y=\pm 1$, cui respondet $x=\mp\frac{3}{2}$. Praeterea vero cum fieri nequeat $U=yy+2=0$, alios valores primitivos non suppeditat.

§. 12. Incipiamus igitur a valoribus $y=1$ et $x=-\frac{3}{2}$ et formulae directrices sequentem nobis administrant seriem valorum:

$$y=1\text{; } x=-\tfrac{3}{2}\text{; } y=\tfrac{1}{13}\text{; } x=-\tfrac{113}{84}.$$

Invertendo autem $x = -\frac{3}{2}$; $y = 1$; $x = \infty$. Alteri autem valores primitivi $x = +\frac{3}{2}$ et $y = -1$ eosdem manifesto producent valores signis tantum mutatis, qui ergo, quoniam in formula proposita tantum occurrit xx, novas solutiones non dabunt. Valores ergo ipsius x hactenus inventi sunt $x = \pm\frac{3}{2}$ et $x = \frac{113}{84}$, quibus formula proposita $x^4 - 2$ quadratum redditur hoc modo:

$$\text{si } x = \tfrac{3}{2} \text{ erit } V = \frac{7^2}{4^2}$$
$$x = \tfrac{113}{84} \;..\; V = \frac{7967^2}{7056^2}.$$

Exemplum 3.

§. 13. Proposita sit haec formula quadrato aequanda:

$$V = (x+1)^2 + x(x+1)(x-2) \text{ sive } V = x^3 + 1,$$

quam certum est aliis casibus quadratum fieri non posse praeter $x = 0$, $x = -1$ et $x = 2$, id quod etiam nostrae operationes declarabunt. Cum autem hic sit $P = x+1$; et $QR = x(x+1)(x-2)$, sumamus $Q = x(x+1)$ et $R = x - 2$; aequatio ergo canonica erit $x(x+1)yy + 2(x+1)y - (x-2) = 0$, cujus altera forma erit $yyxx + (yy + 2y - 1)x + (2y + 2) = 0$. Formulae autem directrices ita se habebunt:

$$y' = -\frac{2}{x} - y \quad \text{et} \quad x' = -\frac{(yy + 2y - 1)}{yy} - x.$$

Ex priori forma posito $Q = 0$ oriuntur duo valores primitivi vel $x = 0$ vel $x = -1$, pro quorum priore fit $y = -1$, pro altero $y = \infty$. Facto autem $R = 0$, sive $x = 2$ erit vel $y = 0$, vel $y = -1$. Altera autem forma, posito $S = 0$ dat $y = 0$, cui respondet $x = 2$; at posito $U = 0$ dat $y = -1$, cui respondet $x = 2$ quos ergo valores primitivos evolvamus.

§. 14. Sit igitur primo $x = 0$ et $y = 1$ et formulae nostrae directrices producent:

$$x = 0;\; y = -1;\; x = +2;\; y = 0;\; x = \infty.$$

Invertendo $y = -1$; $x = 0$; $y = \infty$. Sumamus nunc hos primitivos valores $x = -1$; $y = \infty$ qui dant

$$x = -1;\ y = \infty;\ x = 0;\ y = \infty;\ x = 0;\ \text{etc.}$$

Sumatur denique $x = 2$ et $y = 0$, et valores erunt:

$$x = 2;\ y = 0;\ x = \infty;\ y = 0;\ x = \infty;\ \text{etc.}$$

Patet ergo ex omnibus primitivis, qui erant $x = 0$; $x = -1$; $x = 2$, nullos alios novos deduci posse.

Exemplum 4.

§. 15. Proposita sit quadrato aequanda haec formula:

$$V = xx + (xx - 1)(2xx + 1), \text{ sive } V = 2x^4 - 1,$$

ad quam pervenitur quando quaeruntur duo numeri, quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa biquadratum. Cum igitur hic sit $P = x$; $Q = xx - 1$; $R = 2xx + 1$ erit aequatio canonica ita expressa:

$$(xx - 1)yy + 2xy - (2xx + 1) = 0,$$

ejusque inversa

$$(yy - 2)xx + 2yx - (yy + 1) = 0.$$

Hinc formulae directrices erunt:

$$y' = -\frac{2x}{xx - 1} - y \text{ et } x' = -\frac{2y}{yy - 2} - x.$$

Prior forma, posito $Q = 0$ dat $x = \pm 1$, cui respondet $y = \pm \frac{3}{2}$; at $R = 0$ nihil dat. Ex altera forma itidem nulli valores primitivi oriuntur.

§. 16. Evolvamus ergo valores $x = 1$ et $y = \frac{3}{2}$ ex quibus per formulas directrices reperiuntur:

$$x = 1;\ y = \tfrac{3}{2};\ x = -13;\ y = -\tfrac{113}{84};\ \text{etc.}$$

Permutando autem primos valores fient $y = \frac{3}{2}$; $x = 1$; $y = \infty$. Reliqui primitivi non nisi signo differunt ideoque eosdem praebent valores. At vero valor $x = 13$ dat $V = 239^2$.

§. 17. Hactenus autem assumsimus formulam propositam quadrato aequandam:

$$A + Bx + Cxx + Dx^3 + Ex^4 = V,$$

jam esse ad formam $PP + QR$ revocatam, atque insuper aequationem canonicam inde formatam $Q\,yy + 2\,Py - R = 0$, ejusque alteram formam $Sxx + Tx + U = 0$ ita esse comparatam, ut saltem una harum aequalitatum $Q = 0$; $R = 0$; $S = 0$; $U = 0$ praebeat radicem rationalem, quod si non eveniat, operationes supra desriptae ne institui quidem possunt, nisi forte divinando casus quispiam reperiri queat, quo formula proposita revera evadat quadratum. Quod si enim hoc modo innotuerit valor ipsius x, ei respondens y ex aequatione canonica derivare poterit; unde deinceps operationes praescriptae institui poterunt.

§. 18. Verum etiam reductio formulae propositae ad formam $PP + QR$ saepenumero maxime est difficilis, praecipue si nullus casus jam fuerit cognitus. Quoties autem unus saltem casus quo formula proposita quadratum evadit innotuerit, tum ea semper ad formam $PP + QR$ reduci, et quia casus jam est cognitus, operationes optimo successu institui poterunt. Quemadmodum igitur ex casu cognito formula proposita ad formam $PP + QR$ reduci queat imprimis nobis erit ostendendum, quo ista tractatio completa reddatur id quod in sequentibus Problematibus expediemus.

Problema I.

Si Proposita fuerit formula cubica haec:

$$A + Bx + Cxx + Dx^3 = V,$$

quae evadat quadratum casu $x = a$, *eam ad formam* $PP + QR$ *revocare, indeque aequationem canonicam constituere, ex qua deinceps operationes supra descriptas instituere liceat.*

Solutio.

§. 19. Fiat igitur, posito $x = a$ nostra formula:

$$A + Ba + Ca^2 + Da^3 = ff,$$

tum sumto $P = f$ semper pro QR ejusmodi formula prodibit quae in factores resolvi potest, quarum ergo alter pro Q alter pro R accipi poterit. Tum enim erit $QR = V - ff$, unde loco ff valorem substituendo, itemque loco V, prodibit:

$$QR = B(x - a) + C(x^2 - a^2) + D(x^3 - a^3), \text{ ideoque}$$

$$QR = (x - a)\big(B + C(x + a) + D(xx + ax + a)\big),$$

ubi jam sumi poterit $Q = x - a$ et

$$R = B + C(x + a) + D(xx + ax + aa).$$

Possent etiam hi valores inter se permutari; verum hinc nullum discrimen, in valoribus ipsius x, quos operationes nostrae suppeditabunt, orietur.

§. 20. Inventis jam valoribus litterarum P, Q, R, aequatio canonica erit:

$$yy(x - a) + 2fy - B - C(x + a) - D(xx + ax + aa) = 0$$

unde pro valore cognito:

$$x = a \text{ fit } y = \frac{B + 2Ca + 3Daa}{2f},$$

et jam facile erit ex his valoribus ope formularum supra datarum innumerabiles alios valores litterarum x et y eruere, nisi forte ad valores infinitos perveniatur, vel iidem recurrant.

§. 21. Hic autem non absolute necesse est, ut sumatur $P = f$, sed pari successu ejus loco talis functio ipsius x assumi posset, quae posito $x = a$ abeat in f, tum enim prorsus ut ante $V - PP$ factorem habebit $x - a$. Interim tamen hinc nulli alii valores pro x prodibunt: tota enim res eo ridibit ac si pro y sumeremus $y + W$, denotante W functionem quandam ipsius x, unde pro calculi facilitate expediet statui $P = f$.

Problema II.

Si formula proposita cubica:

$$V = A + Bx + Cx^2 + Dx^3,$$

duobus casibus $x = a$ *et* $x = b$ *quadratum evadat, eam ad formam* $PP + QR$ *ita reducere, ut aequatio canonica utrumque valorem* $x = a$ *et* $x = b$ *involvat.*

Solutio.

§. 32. Ponamus igitur casu $x = a$ fieri

$$A + Ba + Ca^2 + Da^3 = ff$$

at vero altero casu $x = b$ fieri $A + Bb + Cb^2 + Db^3 = gg$, atque pro aequatione canonica statuamus

$$V = (p + q(x - a) + y(x - a)(x - b))^2 \text{ sive}$$

$$V = pp + 2pq(x - a) + 2py(x - a)(x - b) + qq(x - a)^2$$
$$+ 2qy(x - a)^2(x - b) + yy(x - a)^2(x - b)^2$$

ubi p et q denotent certas quantitates constantes ab x non pendentes, quas sequenti modo definire licebit.

§. 33. Ponamus primo $x = a$, et quia tum fit $V = ff$ habebimus hanc aequationem: $ff = pp$ ideoque $p = f$; deinde ponamus $x = b$, et quia tum fit $V = gg$ nostra aequatio hanc induet formam: $gg = ff + 2fq(b - a) + qq(b - a)^2$, unde fit $g = f + q(b - a)$ ideoque $q = \frac{g - f}{b - a}$, quibus valoribus substitutis. Inventis nunc binis valoribus p et q sumatur $P = p + q(x - a)$, atque manifestum est formulam $V - PP$ factorem habituram esse $(x - a)(x - b)$, unde statuamus $V - PP = M(x - a)(x - b)$, atque nunc fiat

$$V = (P + y(x - a)(x - b))^2,$$

factaque evolutione et translato PP ad alteram partem tota aequatio divisibilis erit per $(x - a)(x - b)$, orieturque

$$M = 2Py + yy(x - a)(x - b).$$

Quod autem facta evolutione aequatio prodeat per $(x - a)(x - b)$

divisibilis inde colligi potest, quod ambo casus $x = a$ et $x = b$ inter se permutari possunt; quare cum formula $V - PP$ sponte factorem habeat $x - a$, necesse est, ut etiam habeat factorem $x - b$. Quia enim invenimus $P = f + \frac{(g-f)(x-a)}{b-a}$ facta permutatione erit $P = g + \frac{(f-g)(x-b)}{a-b}$ hae duae formulae prorsus inter se congruunt. Quare cum formula $V - PP$ divisibilis fuerit per $x - a$, etiam divisibilis erit per $x - b$, ideoque etiam per productum $(x - a)(x - b)$.

Exemplum.

§. 24. Sit $V = 3x^3 + 1$, quae aequatio casu $x = 1$ fit $V = 2^2$, casu autem $x = 2$ fit $V = 5^2$, ideoque habebimus $a = 1$, $f = 2$; $b = 2$, $g = 5$, unde fiet $P = 3x - 1$. Hinc igitur fiet $V - PP = 3x^3 + 9xx + 6x$, quae est divisibilis per $(x - 1)(x - 2)$, cum sit $V - PP = (x - 1)(x - 2)\,3x$, quamobrem hoc casu erit $M = 3x$. Quocirca pro formula $3x^3 + 1$ quadrato aequanda aequatio canonica erit: $3x = 2(3x - 1)y + (x - 1)(x - 2)yy$. Altera igitur forma erit $yyxx + (6y - 3yy - 3)x + 2yy - 2y = 0$. Prior forma ex $Q = 0$ dat statim ipsos valores per se cognitos $x = 1$ et $x = 2$; at vero $R = 0$ dat $x = 0$. Altera forma ex $S = 0$ praebet $y = 0$ et $x = 0$; ex $U = 0$ fit $y = 0$ vel $y = 1$ quibus respondet $x = 0$ sicque habemus tres valores primitivos $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, quibus conveniunt $y = 0$; $y = 1$; $y = +\frac{3}{4}$; $y = +\frac{3}{5}$.

§. 25. Formulae jam directrices erunt:

$$y' = \frac{-2(3x-1)}{(x-1)(x-2)} - y \text{ et } x' = \frac{3yy - 6y + 3}{yy} - x.$$

Hinc percurramus casus cognitos, ac primo quidem $x = 0$ et $y = 0$ nihil dat; at vero invertendo obtinetur:

$$y = 0;\ x = 0;\ y = 1;\ x = 0;\ y = 0;\ \text{etc.}$$

unde patet primum valorem $x = 0$ ad nullos novos valores perducere. Sumamus igitur $x = 1$; $y = +\frac{3}{4}$ atque series erit:

$x = 1$; $y = +\frac{3}{4}$; $x = -\frac{2}{3}$; $y = \frac{3}{5}$: $x = 2$; ordinem invertendo: $y = +\frac{3}{4}$; $x = 1$; $y = \infty$; $x = 2$. Denique si sumatur $x = 2$ et $y = \frac{3}{5}$ valores erunt:

$$x = 2;\ y = \tfrac{3}{5};\ x = -\tfrac{2}{3};\ y = \tfrac{3}{4};\ x = 1;\ y = \infty,$$

invertendo autem nihil prodit. Mirum est hanc aequationem canonicam pro x alios valores non suppeditare, praeter $x = 0$; $x = 1$; $x = 2$; $x = -\frac{2}{3}$, cum tamen idem casus jam supra sit tractatus in exemplo primo, ubi adeo innumerabiles casus invenire licuit. Unde intelligitur plurimum interesse, ut aequatio canonica idonea eligatur. Praesenti scilicet casu perperam duo valores primitivi ad aequationem canonicam constituendam sunt adhibiti. Praestat enim unico valore cognito uti secundum problema I. quod operae pretium erit ostendisse.

§. 26. Utamur ergo unico valore cognito $x = 1$, quo casu fit $V = 4 = 2^2$, sicque habebimus $a = 1$ et $f = 2$. Per primum igitur problema habebimus $P = 2$, ideoque

$$QR = 3(x^3 - 1) = 3(x - 1)(xx + x + 1).$$

Sumamus ergo $Q = x - 1$ erit $R = 3(xx + x + 1)$ et aequatio canonica erit $(x - 1)yy + 4y - 3(xx + x + 1) = 0$ cujus altera forma est $-3xx + (yy - 3)x + 4y - yy - 3 = 0$ unde formulae directrices erunt:

$$y' = -\frac{4}{x - 1} - y \ \text{ et } \ x' = \frac{yy - 3}{3} - x.$$

Ex priore autem aequatione, posito $Q = 0$ fit $x = 1$ cui respondet $y = \frac{9}{4}$; at vero posito $R = 0$ nullus prodit valor rationalis. Ex altera, aequatio $S = 0$ itidem nihil dat; at vero $U = 0$ dat $y = 1$ cui respondet $x = 0$ et $x = -\frac{2}{3}$; praeterea dat $y = 3$ cui respondet $x = 2$.

§. 27. Incipiamus ab $x = 1$ et $y = \frac{3}{4}$ et reperientur sequentes valores idonei:

$$x = 1;\ y = \tfrac{9}{4};\ x = -\tfrac{5}{16};\ y = \tfrac{67}{84};\ \text{etc.}$$

Inversio autem ordinis nihil praebet ob sequens $y = \infty$. Evolvamus ergo casum primitivum $y = 1$ et $x = 0$ fietque series valorum:

$$y = 1;\ x = 0;\ y = 3;\ x = 2;\ y = -7;\ x = \tfrac{40}{3};\ \text{etc.}$$

ordinem autem invertendo:

$$x = 0;\ y = 1;\ x = -\tfrac{2}{3};\ y = \tfrac{7}{5};\ x = \tfrac{8}{25};\ \text{etc.}$$

In his operationibus reliqui bini casus primitivi jam continentur, quos ergo superfluum foret prosequi. Atque hic jam omnes valores supra inventi prodierunt.

§. 28. Neque vero ob hanc circumstantiam secundum problema omni usu carere censendum est. Postquam enim pro exemplo allato sumto $P = 3x - 1$, invenimus

$$QR = 3(x - 1)(x - 2) \text{ et sumsimus}$$
$$Q = 3x \text{ et } R = (x - 1)(x - 2);$$

unde aliquos tantum valores pro x eruere licuit. At vero productum illud $3x(x-1)(x-2)$ aliis duobus modis in duos factores discerpi potest, sumendo vel $Q = 3(x - 1)$ et $R = x(x - 2)$, vel $Q = 3(x - 2)$ et $R = x(x - 1)$; tum vero hi duo casus secundum praecepta evoluti omnes valores idoneos pro x dedissent, uti tentanti facile patebit. Ex quo generatim hoc probe tenendum erit; quoties pro QR reperitur productum ex tribus vel quatuor factoribus simplicibus constans omnes plane resolutiones in duos factores pro Q et R sumendos in usum vocari et operationes supra traditas institui debere. Tum enim asseverare non dubito, omnes plane valores idoneos pro x repertum iri, id quod in sequentibus problematibus probe est observandum. Quamobrem progrediamur ad formulas biquadraticas, sub hac forma generali $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$ contentas, ad quadratum reducendas.

Problema III.

Proposita tali formula quadrato aequanda:

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 = V,$$

quae quadratum evadat casu $x = a$, *eam ad formam* $P^2 + QR$ *reducere, hincque aequationem* $Qyy + 2Py - R = 0$ *formare.*

Solutio.

§. 29. Sumto $x = a$ fiat $V = ff$ et supra jam ostendimus, sumto $P = f$, unde fit $QR = V - ff$, hanc expressionem factorem habituram esse $x - a$; in altero ergo factore x ad tertiam potestatem ascendet, quem ergo neque pro Q neque pro R assumere licet, nisi forte factorem simplicem involvat, quem cum $x - a$ conjungere liceret. Quare hoc casu excepto negotium alio modo est instituendum, id quod facillime sequenti modo praestabitur.

§. 30. Cum formula proposita V posito $x = a$ quadratum praebeat $= ff$, ponatur statim $x = a + t$, atque manifestum est talem formulam esse prodituram: $V = ff + \alpha t + \beta tt + \gamma t^3 + \delta t^4$, quam ergo ad speciem $PP + QR$ reduci oportet. Hunc in finem sumamus $P = f + \frac{\alpha t}{2f}$, unde orietur

$$QR = V - PP = (\beta - \tfrac{\alpha\alpha}{4ff})\, tt + \gamma t^3 + \delta t^4,$$

quae ergo forma hos continet factores:

$$tt\,(\beta - \tfrac{\alpha\alpha}{4ff} + \gamma t + \delta tt),$$

quorum alterum pro Q alterum pro R assumere licebit; perinde vero est quinam pro Q vel pro R accipiatur. Tum autem aequatio canonica erit $Qyy + 2Py - R = 0$ unde facile altera forma ad potestates ipsius x accommodata formari poterit, quo facto constructio seriei literarum x et y nulla amplius laborat difficultate, cum constet casus $t = 0$, sive $x = a$. Quin etiam hic si lubuerit loco t valor $x - a$ restitui poterit.

§. 31. Alio autem praeterea modo aequatio canonica formari poterit ponendo $P = f + \frac{\alpha t}{2f} + \theta tt$ sumendo θ ita, ut etiam terminus βtt tollatur quod fit posito $\theta = \frac{\beta}{2f^2} + \frac{\alpha\alpha}{8f^3}$; tum autem reperietur $QR = \gamma' t^3 + \delta' t^4 = t^3(\gamma' + \delta' t)$, unde pro Q et R hi valores accipi poterunt: tt et $t(\gamma' + \delta' t)$. Reliqua vero ut ante expedientur.

Exemplum.

§. 32. Sit formula proposita $V = 2x^4 - 1$, quae casu $x = 1$ fit quadratum, sicque erit $a = 1$ et $f = 1$; unde posito $x = 1 + t$ fiet $V = 1 + 8t + 12tt + 8t^3 + 2t^4$; quare si pro priore solutione sumamus $P = 1 + 4t$, prodibit:

$$QR = V - PP = tt(2tt + 8t - 4).$$

Sumto ergo $Q = tt$ erit $R = 2tt + 8t - 4$, quocirca aequatio canonica erit $ttyy + 2(1 + 4t)y - (2tt + 8t - 4)$ cujus altera forma ad t instructa erit $(yy - 2)tt + (8y - 8)t + 2y + 4$; hincque formulae nostrae directrices erunt:

$$y' = -\frac{2(1+4t)}{tt} - y \quad \text{et} \quad t' = -\frac{8(y-1)}{yy-2} - t.$$

§. 33. Nunc vero valorem primitivum habemus $t = 0$, cui respondet $y = -2$; praeterea vero aequatio $U = 0$ etiam dat $y' = -2$, ita ut hi duo valores primitivi conveniant. Inchoëmus ergo nostram seriem a terminis $x = 0$ et $y = 2$ eaque erit

$$t = 0; \quad y = -2; \quad t = 12; \quad y = \tfrac{95}{72}; \text{ etc.}$$

hinc ergo valores ipsius x erunt $x = 1$ et $x = 13$.

§. 34. Applicemus etiam alteram solutionem et statuamus $P = 1 + 4t - 2tt$ fietque $QR = V - PP = tt(24t - 2tt)$ quia igitur alter factor necessario est tt sumamus $Q = tt$ et $R = 2t(12 - t)$, sicque aequatio canonica erit:

$$ttyy + 2(1 + 4t - 2tt)y - 2t(12 - t) = 0,$$

cujus altera igitur forma ita se habebit:

$$(yy - 4y + 2)tt + 8(y - 3)t + 2y = 0,$$

unde formantur directrices, qui erunt:

$$y' = -\frac{2(1+4t-2tt)}{tt} - y;\quad t' = -\frac{8(y-5)}{yy-4y+2} - t.$$

§. 35. Quod jam ad valores primitivos attinet, ex priore aequationis canonicae forma $Q=0$ dat $t=0$, cui respondet $y=0$; aequatio vero $R=0$ dat $t=12$, cui respondet $y=0$. Ex posteriore vero forma aequatio $S=0$ nullum dat valorem rationalem; et $U=0$ dat $y=0$, qui jam in praecedentibus continetur. Incipiamus ergo seriem a $t=0$ et $y=0$ et sequens terminus erit $t=12$; et quia alter primitivus $t=12$ jam occurrit, pro eo novam operationem instituere non est opus.

Problema IV.

Proposita formula biquadratica:

$$V = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4,$$

si duo dentur casus $x=a$ *et* $x=b$, *quibus ea fiat quadratum, eam reducere ad formam* $V=PP+QR$, *hincque aequationem canonicam constituere.*

Solutio.

§. 36. Pro casu $x=a$ fiat $V=ff$, et pro altero casu $x=b$ fiat $V=gg$, atque nunc pro P talis formula requiritur, ut QR obtineat factorem $(x-a)(x-b)$. Quamobrem, si ponatur vel $x=a$ vel $x=b$ fieri debet $PP=V$, ideoque $P=\sqrt{V}$. Hunc in finem statuamus $P=p+qx$, et quia pro casu $x=a$ fit $\sqrt{V}=f$, habebitur haec aequatio $p+qa=f$; pro altero vero casu $x=b$, fiet $p+bq=g$; ubi probe notandum est, litteras f et g tam negative quam positive accipi posse. At vero ex istis binis aequalitatibus colligitur: $p=\frac{bf-ag}{b-a}$ et $q=\frac{g-f}{b-a}$.

§. 37. Ex his igitur valoribus productum $QR = V - PP$ certo habebit factorem $(x - a)(x - b)$. Sit igitur

$$QR = M(x - a)(x - b),$$

ac si M nullos contineat factores rationales necessario statui debebit $Q = (x - a)(x - b)$ et $R = M$; at si M etiam involvat duos factores reales, puta $M = (x - \zeta)(x - \eta)$ uterque vel cum $x - a$ vel cum $x - b$ conjungi poterit unde duo novae positiones oriuntur, sicque tres aequationes canonicae formari poterunt.

Exemplum.

§. 38. Sit $V = 1 + 7xx + x^4$, quae forma casu $x = 0$ fit 1, casu vero $x = 1$ fit 9. Erit ergo $a = 0$, $f = \pm 1$; deinde $b = 1$ et $g = \pm 3$, unde aliud discrimen non nascitur nisi ex aequalitate et inaequalitate signorum. Sint igitur signa aequalia $f = 1$ et $g = 3$ fiet nostra formula $P = p + qx = 1 + 2x$. Pro casu vero $f = -1$ et $g = 3$ fit $P = p + qx = -1 + 4x$; utrumque ergo casum evolvamus.

§. 39. Pro priore erit $QR = V - P^2 = x^4 + 3xx - 4x$ sive $QR = x(x - 1)(xx + x + 4)$, ubi posterior factor nullas continet radices reales. Fiat ergo $Q = x(x-1)$ et $R = xx + x + 4$ et aequatio canonica erit:

$$x(x - 1)yy + 2(1 + 2x)y - (xx + x + 4) = 0,$$

cujus altera forma est:

$$(yy - 1)xx + (4y - yy - 1)x + 2y - 4 = 0,$$

unde hae formulae directrices oriuntur:

$$y' = -\frac{2(1 + 2x)}{x(x - 1)} - y; \quad x' = \frac{yy - 4y + 1}{yy - 1} - x.$$

§. 40. Ex priore forma aequationis canonicae aequatio $Q = 0$ praebet $x = 0$, cui respondet $y = 2$; deinde etiam praebet $x = 1$, cui respondet $y = 1$. Ex altera autem forma aequatio $S = 0$ fit vel $y = 1$, cui respondet $x = 1$, vel $y = -1$, cui respondet $x = -1$. Denique ex aequatione $U = 0$ fit $y = 2$, cui respondet $x = 0$ et $x = -1$. Quia autem in formula proposita tantum potestates pares ipsius x occurrunt, perinde est, sive x habeat valorem negativum sive positivum, duo tantum valores primitivi relinquuntur $x = 0$ et $x = 1$, unde seriem quaeramus pro $x = 0$ et $y = 2$ quae erit $x = 0$; $y = 2$; $x = -1$; $y = \infty$; ordinem autem invertendo statim ad infinitum deducimur. Quare incipiamus ab $x = 1$ et $y = 1$ unde series oritur $x = 1$; $y = 1$; $x = \infty$, atque etiam invertendo nihil oritur. Unde concludere licet, formulam propositam quadratum fieri non posse praeter binos casus alias cognitos $x = 0$ et $x = 1$.

§. 41. Consideremus interim etiam casum quo $P = -1 + 4x$, eritque $QR = x^4 - 9xx + 8x = x(x-1)(xx-8)$ quamobrem sumamus $Q = x(x-1)$ et $R = xx - 8$ et aequatio canonica erit:

$$x(x-1)yy + 2(4x-1)y - (xx+x-8) = 0,$$

cujus altera forma ita se habet:

$$(yy-1)xx + (8y - yy - 1)x - 2y + 8 = 0.$$

Formulae autem directrices erunt:

$$y' = -\frac{2(4x-1)}{x(x-1)} - y \text{ at } x' = -\frac{(8y - yy - 1)}{yy-1} - x.$$

§. 42. Hic iterum habemus valores primitivos $x = 0$ et $x = 1$, quorum priori respondet $y = 4$; posteriori vero $y = 1$. Ex altera forma prodit vel $y = +1$ vel $y = -1$, quorum illi respondet $x = -1$, huic vero $x = +1$. Denique ex $U = 0$ fit $y = 4$, cui respondet $x = 0$ et $x = -1$. Incipiamus a terminis $x = 0$ et $y = +2$ series valorum erit $x = 0$; $y = 4$; $x = -1$; $y = 1$; $x = \infty$. Sumamus $x = 1$ et $y = -\frac{7}{6}$, fiet series $x = 1$; $y = 1$; $x = \infty$. Hic jam reliqui casus omnes continentur, unde certum manet, alios praeterea nullos dari valores idoneos.

Problema V.

Si in formula proposita quadrato aequanda:

$$V = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4,$$

tres constent casus, quibus ea fit quadratum, scilicet $x = a$, $x = b$, $x = c$, *quibus fiat* $V = ff$, $V = gg$, $V = hh$, *eam reducere ad formam* $PP + QR$, *indeque aequationem canonicam formare.*

Solutio.

§. 43. Hic igitur quantitatem P ita definire oportet, ut productum $QR = V - PP$ obtineat factores $(x - a)(x - b)(x - c)$; quamobrem necesse est ut casibus $x = a$, $x = b$, $x = c$, fiat $QR = 0$, ideoque $PP = V$ et $P = \sqrt{V}$. Hunc in finem statuatur $P = p + qx + rxx$ et quia $x = a$ fit $V = ff$, ideoque $\sqrt{V} = \pm f$, casu vero $x = b$ erit $\sqrt{V} = \pm g$ et pro casu $x = 0$ habebitur $\sqrt{V} = \pm h$; unde nascuntur hae tres aequationes:

$$\text{I.} \quad \pm f = p + qa + raa,$$
$$\text{II.} \quad \pm g = p + qb + rbb,$$
$$\text{III.} \quad \pm h = p + qc + rcc.$$

Ex his jam tribus aequationibus eliciantur valores litterarum p, q, r, id quod pluribus modis fieri poterit ob signa ambigua radicum f, g, h; quibus inventis colligatur valor producti $QR = V - P^2$, quod cum jam habeat tres factores simplices $x - a$, $x - b$, $x - c$; quia non ultra quartam potestatem ipsius x ascendit, necesse est ut etiam quartus factor sit simplex, qui ergo novum valorem pro x suppeditabit.

§. 44. Quoniam igitur QR quatuor factores simplices continet, producta binorum pro litteris Q et R accipi poterunt; perinde autem est, utrum pro Q vel R assumatur, unde tres casus oriri poterunt, prout primus factor $x - a$ vel cum secundo $x - b$, vel cum tertio $x - c$ vel cum quarto modo invento combinetur.

Quacunque autem combinatione utamur posito $V = (P + Qy)^2$, ob $V = PP + QR$ orietur ista aequatio canonica $Qyy + 2Py - R = 0$ cujus deinde alteram formam $Sxx + Tx + U = 0$ elicere possumus, quo facto, constitutis formulis directricibus $y + y' = -\frac{2P}{Q}$ vel $yy' = -\frac{R}{Q}$; tum vero $x + x' = -\frac{T}{S}$ sive $xx' = \frac{U}{S}$, innumerabiles alios valores idoneos pro x investigare licebit, nisi forte numerus horum valorum ob indolem formulae propositae fuerit finitus.

§. 45. Si ex tribus aequationibus pro litteris p, q, r, datis has litteras in genere determinare vellemus in formulas valde complexas incideremus, cum tamen quovis casu oblato negotium facillime absolvatur. Quamobrem usum hujus solutionis in exemplo speciali ostendamus.

Exemplum

§. 46. Proposita sit ista formula $V = 1 + 3x^4$, quae his tribus casibus $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, evadit quadratum scilicet casu $x = 0$ fit $V = 1$, casu vero $x = 1$, fit $V = 4$, et casu $x = 2$ fit $V = 49$. Quamobrem posito $P = p + qx + rxx$ orientur tres sequentes aequationes:

1. Si $x = 0$ erit $\pm 1 = p$,
2. .. $x = 1$ .. $\pm 2 = p + q + r$
3. .. $x = 2$ .. $\pm 7 = p + 2q + 4r$.

Sumamus autem omnes tres radices positive eritque $p = 1$, duae reliquae vero aequationes erunt $1 = q + r$ et $b = 2q + 4r$, unde eruitur $r = 2$ et $q = -1$ sicque habebimus $P = 1 - x + 2xx$.

§. 47. Hinc igitur reperiemus $QR = V - P^2$ h. e.

$$QR = -x^4 + 4x^3 - 5xx + 2x = -x(x-1)(x-2)(x-1)$$

quamobrem sumamus $Q = (x-1)^2$ et $R = -x(x-2)$ unde ob $P = 1 - x + 2xx$ habebitur aequatio canonica:

$$(x-1)^2 yy + 2(1 - x + 2xx)y + x(x-2) = 0$$

cujus altera forma erit:

$$(yy + 4y + 1)xx - 2(yy + y + 1)x + y(y+2) = 0$$

unde formulae directrices oriuntur:

$$y' = -\frac{2(1-x+2xx)}{(x-1)^2} - y \quad \text{et} \quad y' = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2 y}$$

$$x' = \frac{2(yy+y+1)}{yy+4y+1} - x \quad \text{et} \quad x' = \frac{y(y+2)}{(yy+4y+1)x}.$$

§. 48. Incipiamus a valore cognito $x = 0$, cui respondet $y = 0$, hincque series valorum erit:

$$x = 0;\ y = 0;\ x = 2;\ y = -14;\ x = \frac{28}{47};\ \text{etc.}$$

Invertendo autem ordinem prodeunt sequentes valores:

$$y = 0;\ x = 0;\ y = -2;\ x = -2;\ y = -\frac{4}{9};\ x = -\frac{28}{47};\ \text{etc.}$$

Sit nunc $x = 1$, cui respondet $y = \frac{1}{4}$, hinc series ista $x = 1$; $y = \frac{1}{4}$; $x = \frac{5}{11}$; etc. At invertendo haec $y = \frac{1}{4}$; $x = 1$; $y = \infty$. Superfluum foret a tertio valore $x = 2$, incipere, quia in praecedentibus jam continetur.

§. 49. Sumamus nunc $Q = x(x-1)$ eritque:

$$R = -(x-1)(x-2),$$

unde aequatio canonica erit:

$$x(x-1)yy + 2(1 - x + 2xx)y + (x-1)(x-2) = 0,$$

cujus altera forma est:

$$(yy + 4y + 1)xx - (yy + 2y + 3)x + 2(y+1) = 0.$$

Formulae ergo directrices erunt:

$$y' = -\frac{2(1-x+2xx)}{x(x-1)} - y \quad \text{sive} \quad y' = \frac{x-2}{xy}$$

$$x' = \frac{yy+2y+3}{yy+4y+1} - x \quad \text{sive} \quad x' = \frac{2(y+1)}{(yy+4y+1)x}.$$

§. 50. Incipiamus iterum ab $x = 0$, cui hic respondet $y = -1$, unde valores idonei hinc nati:

$$x = 0;\ y = -1;\ x = -1;\ y = -3;\ x = -2;$$
$$y = -\tfrac{2}{3};\ x = +\tfrac{3}{11};\ \text{etc.}$$

tum vero invertendo fiet $y = -1$; $x = 0$; $y = \infty$. Sit porro $x = 1$, cui respondet $y = 0$, unde sequentes deducuntur valores

$$x = 1;\ y = 0;\ x = 2;\ y = -7;\ x = -\tfrac{3}{11};\ y = \tfrac{26}{21};\ \text{etc.}$$

§. 51. Simili modo etiam reliqui casus aequationis canonicae tractari poterunt, ubi una quaepiam radicum f, g, h, sumitur negative, unde alii valores pro P oriuntur, verum his uberius evolvendis non immoror, cum quae hactenus sunt allata abunde sufficiant ad utilitatem et praestantiam hujus novae methodi declarandam.