



1830

## De binis numeris, quorum summa sive aucta sive minuta tam unius quam alterius quadrato producat quadrata

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

Record Created:

2018-09-25

---

### Recommended Citation

Euler, Leonhard, "De binis numeris, quorum summa sive aucta sive minuta tam unius quam alterius quadrato producat quadrata" (1830). *Euler Archive - All Works*. 775.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/775>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact [mgibney@pacific.edu](mailto:mgibney@pacific.edu).

B I N I S N U M E R I S  
 QUORUM SUMMA SIVE AUCTA SIVE MINUTA TAM UNIUS  
 QUAM ALTERIUS QUADRATO PRODUCAT QUADRATA.

Conventui exhibita die 1. Aug. 1780.

§. 1.

Quod si bini numeri quaesiti ponantur  $\frac{x}{z}$  et  $\frac{y}{z}$  has duas formulas ambiguas:  $\frac{x+y}{z} \pm \frac{xx}{zz}$  et  $\frac{x+y}{z} \pm \frac{yy}{zz}$  quadrata effici oportet. Hinc ergo per  $zz$  multiplicando hae. duae formulae:  $(x+y)z \pm xx$  atque  $(x+y)z \pm yy$  quadratis aequari debeunt. His autem conditionibus satisfaciunt hi numeri, qui sine dubio sunt minimi:

$$x = 9028 = 4 \cdot 37 \cdot 61, \quad y = 3124 = 4 \cdot 11 \cdot 71 \quad \text{et} \quad z = \frac{5 \cdot 37^2 \cdot 61^2}{2 \cdot 49 \cdot 31}$$

Tum enim erit

$$(x+y)z = 20 \cdot 37^2 \cdot 61^2 \quad \text{et} \quad xx = 16 \cdot 37^2 \cdot 61^2,$$

quorum numerorum summa est  $6^2 \cdot 37^2 \cdot 61^2$  et differentia  $2^2 \cdot 37^2 \cdot 61^2$ ; tum vero est  $yy = 16 \cdot 11^2 \cdot 71^2$  unde per 4 dividendo ostendendum est tam summam quam differentiam horum numerorum:

$$5 \cdot 37^2 \cdot 61^2 \quad \text{et} \quad 4 \cdot 11^2 \cdot 71^2$$

esse quadrata. Cum autem sit  $5 = 2^2 + 1^2$ ;  $37^2 = 35^2 + 12^2$  et  $61^2 = 60^2 + 11^2$  erit  $5 \cdot 37^2 = 82^2 + 11^2$ , hincque porro  $5 \cdot 37^2 \cdot 61^2 = 5041^2 + 242^2$  cui summae quadratorum sive addatur sive subtrahatur duplum radicum productum quod est

$$2 \cdot 242 \cdot 5041 = 4 \cdot 11^2 \cdot 71^2.$$

qui est ipse numerus sive addendus sive subtrahendus.

Analysis ad hanc solutionem ducens.

§. 2. Numerus  $(x + y)z$  duplici modo statuatur summa duorum quadratorum scilicet  $= A^2 + B^2$  et  $= C^2 + D^2$ , atque manifestum est quaesito satisfieri, si fuerit  $xx = 2AB$  et  $yy = 2CD$ .

Hinc in finem fiat  $(x + y)z = (aa + bb)(cc + dd)$ , unde deducatur  $A = ac + bd$  et  $B = ad - bc$ ; tum vero  $C = ad + bc$  et  $D = ac - bd$ , sicque habebimus

$$xx = 2(ac + bd)(ad - bc) \text{ et } yy = 2(ad + bc)(ac - bd).$$

Et jam hae formulae evadant quadrata ponatur  $x = (ac + bd)f$  et  $y = (ad + bc)g$ , factaque evolutione prodibunt hae aequationes:

$$2(ad - bc) = (ac + bd)ff \text{ et } 2(ac - bd) = (ad + bc)gg$$

ex quarum priore deducitur  $\frac{a}{b} = \frac{2c + dff}{2d - cff}$ , ex posteriore vero

$\frac{d}{c} = \frac{2c + dff}{2d - cff}$ . Hi autem valores inter se coaequati praebent hanc aequationem:

$$cc(4 + ffgg) + 4cd(ff - gg) = dd(4 + ffgg)$$

unde radice extracta reperitur:

$$\frac{d}{c} = \frac{2(ff - gg) \pm \sqrt{4(ff - gg)^2 + (4 + ffgg)^2}}{4 + ffgg} \text{ sive}$$

$$\frac{d}{c} = \frac{2(ff - gg) \pm \sqrt{(4 + f^4) \cdot (4 + g^4)}}{4 + ffgg}.$$

§. 3. Totum ergo negotium huc redit, ut hoc productum  $(4 + f^4)(4 + g^4)$  quadratum reddatur et, quia duas quantitates  $f$  et  $g$  continet, alterutram pro lubitu accipere licebit. Sumamus ergo  $g = 1$  fietque  $\frac{d}{c} = \frac{2(ff - 1) \pm \sqrt{5(4 + f^4)}}{4 + ff}$ ; tum vero regrediendo erit  $\frac{a}{b} = \frac{2d + c}{2c - d}$ , porroque  $(ac + bd)f$  et  $y = ad + bc$ . Denique autem habebimus  $z = \frac{(aa + bb)(cc + dd)}{x + y}$ .

§. 4. Ponatur nunc  $\sqrt{5(4 + f^4)} = 5v$ , ut sit

$$\frac{d}{c} = \frac{2(ff - 1) \pm 5v}{4 + ff}.$$

Erit ergo  $25vv = 20 + 5f^4$ , quae ergo formula casu  $f = 1$  commode fit quadratum hoc vero modo ad solutionem incongruam perveniretur. Ut igitur alii valores pro  $f$  eruantur ponamus:

$f = 1 + t$  fietque  $25vv = 25 + 20t + 30tt + 20t^3 + 5t^4$  cujus radix statuatur  $5 + at + \beta tt$  et erit

$$20 + 30t + 20tt + 5t^3 = 10a + (10\beta + aa)t + 2a\beta tt + \beta\beta t^3.$$

Ut nunc bina membra priora se destruant fieri debet  $a = 2$ , atque ut etiam secunda se destruant sumi oportet  $\beta = \frac{13}{5}$ , sicque habebimus  $5v = 5 + 2t + \frac{13}{5}tt$  et nunc tandem remanent membra tertium et quartum quae denuo per  $tt$  divisa praebent  $t = \frac{60}{11}$ .

Ex quo valore invento colligitur  $5v = \frac{11285}{121}$ ; tum vero est  $f = \frac{71}{11}$ .

ex quibus valoribus colligitur  $\frac{d}{c} = \frac{2(71^2 - 11^2) + 11285}{4 \cdot 11^2 + 71^2}$  unde sumto

signo superiore oritur  $\frac{d}{c} = \frac{21126}{5525} = \frac{846}{221} = \frac{5 \cdot 169}{13 \cdot 17}$ . Sumamus igitur

$d = 5 \cdot 169$  et  $c = 13 \cdot 17$  eritque  $\frac{a}{b} = \frac{147}{31}$ . Sumto ergo  $a = 147$

et  $b = -31$ , fiet  $x = 4 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 71$  et  $y = 4 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 61$ .

Hinc ergo colligitur  $x + y = 4 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 7^2 \cdot 31$  ideoque  $z = \frac{5 \cdot 13 \cdot 37^2 \cdot 61^2}{2 \cdot 49 \cdot 31}$

ob  $aa + bb = 10 \cdot 37 \cdot 61$  et  $cc + dd = 13^2 \cdot 2 \cdot 37 \cdot 61$ . Cum

igitur hi tres numeri  $x, y, z$  habeant factorem communem 13, eo per divisionem sublato, valores harum litterarum ita fient simpliciores:

$$x = 4 \cdot 11 \cdot 71; \quad y = 4 \cdot 37 \cdot 61; \quad z = \frac{5 \cdot 37^2 \cdot 61^2}{2 \cdot 49 \cdot 31}$$

unde ipsi numeri quaesiti jam erunt:

$$\frac{x}{z} = \frac{8 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 49 \cdot 71}{5 \cdot 37^2 \cdot 61^2} \quad \text{et} \quad \frac{y}{z} = \frac{8 \cdot 31 \cdot 49}{5 \cdot 37 \cdot 61},$$

qui sunt ipsi numeri initio allati. Quemadmodum autem hi numeri ex hypothesi  $g = 1$  sunt deducti, simili modo ex alio quovis valore pro  $g$  assumpto solutiones investigari poterunt. Quae autem mox ad immensos numeros excrescent. Ceterum notandum est, sumto  $g = 2$ , eandem solutionem prodituram fuisse, cum  $g^4 + 4 = 4 \cdot 5$  ubi quaternarius per operationes sequentes iterum, ex calculo excedit.