1830

De insigni promotione Analysis Diophantaeae

Leonhard Euler

COMMENTATIONES

Cel. L. EULERI.

I.

DE INSIGNI PROMOTIONE ANALYSIS DIOPHANTAEAE.

Conventui exhibita die 12. Junii 1780.

§. 1.

Quando in Analysi Diophantaea ad formulas biquadraticas, quadrato aequandas, pervenitur, methodus eas tractandi adhuc parum est exculta et nimis taediosas ambages requirit, quando plures solutiones desideramus. Qualibet enim solutione inventa formula biquadratica per substitutionem continuo in alias formas transmutari debet, quibus operationibus mox ad tam enormes numeros pervenitur, ut vix quicquam tantum laborem suscipere voluerit.

§. 2. Cum igitur nuper pro Problemate notissimo, quo duo numeri requiruntur, quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa biquadratum, in solutionem satis commodam et cocinnam incidissem, mox perspexi, eandem methodum multo magis generalem reddi posse. Semper enim in usum vocari poterit, quoties talis formula biquadratica ad quadratum reducenda proponitur:

$$aax^4 + 2abx^3y + cxxyy + 2bdxy^3 + ddy^4 = \Box.$$

Quia enim ad hanc formam reduci potest:

$$(axx + bxy + dyy)^2 + (c - bb - 2ad)\, xxyy$$

ponamus brevitatis gratia $c - bb - 2ad = mn$ ut habeamus

$$(axx + bxy + dyy)^2 + mnx^2y^2 = \square$$

huic satisfiet, statuendo

$$axx + bxy + dyy = \lambda(mpp - nqq) \text{ et } xy = 2\lambda pq$$

tum enim nostra formula evadet quadratum, scilicet $\lambda\lambda(mpp + nqq)^2$; ubi notetur, quo plures numerus mn habeat factores, eo pluribus modis hanc expressionem immutari posse.

§. 3. Hic omnes numeros m, n, p, q, tanquam integros spectamus; sin autem fractos admittere velimus, loco y unitatem scribere licebit, sicque erit $x = 2\lambda pq$, qui valor in praecedente aequatione substitutus praebet

$$4\lambda\lambda appqq + 2\lambda bpq + d = \lambda mpp - \lambda nqq,$$

quae aequatio cum sit quadratica respectu utriusque litterae p et q, pro utraque radicem extrahendo inveniemus has duas formulas:

$$p = \frac{-\lambda bq \pm \sqrt{\lambda md + \lambda\lambda qq(bb - 4ad + mn) - 4\lambda^3 naq^4}}{4\lambda\lambda aqq - \lambda m}$$

$$q = \frac{-\lambda bp \pm \sqrt{-\lambda nd + \lambda\lambda(bb - 4\ d + mn)pp + 4\lambda^3 amp^4}}{4\lambda\lambda app + \lambda n}.$$

§. 4. Quia littera λ nostro arbitrio est relicta haud difficile erit ei talem valorem tribuere, ut in altera saltem formula extractio radicis quadratae succedat, quam si fuerimus nacti, ita ut pro p et q determinatos valores impetravimus, inde sequenti modo plures alios valores, atque adeo infinitos eruere licebit. Sint enim p et q valores inventi atque ob ambiguitatem signi radicalis pro p simul alius valor innotescit, qui si ponatur p' erit $p + p' = \frac{-2bq}{4\lambda aqq - m}$. Hic jam valor p' in altera formula loco p substitutus dabit quoque novum valorem pro q, qui sit q', eritque simili modo

$$q + q' = \frac{-2bp}{4\lambda app + n}.$$

Neque vero opus est, istam alteram substitutionem facere, cum inventio novorum valorum pro p et q sequenti modo facillime expediri queat.

§. 5. Simul enim atque duos valores p et q fuerimus nacti, inde statim sequens series assignari poterit: $p, q, p', q', p'', q'', p''', q'''$, etc. cum sit

$$p' = \frac{-2bq}{4\lambda aqq - m} - p; \quad q' = \frac{-2bp'}{4\lambda ap'p' + n} - q$$
$$p'' = \frac{-2bq'}{4\lambda aq'q' - m} - p'; \quad q'' = \frac{-2bp''}{4\lambda ap''p'' + n} - q'$$
$$p''' = \frac{-2bq''}{4\lambda aq''q'' - m} - p''; \quad q''' = \frac{-2bp'''}{4\lambda ap'''p''' + n} - q''$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

§. 6. Quin etiam ambas litteras p et q permutare possumus, ut obtineamus hanc seriem: q, p, q', p', q'', p'', etc., ubi iterum erit:

$$q' = \frac{-2bp}{4\lambda app + n} - q; \quad p' = \frac{-2bq'}{4\lambda aq'q' - m} - p$$
$$q'' = \frac{-2bp'}{4\lambda ap'p' + n} - q'; \quad p'' = \frac{-2bq''}{4\lambda aq''q'' - m} - p'$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

sicque sine ulla transformatione et substitutione ex binis valoribus initio cognitis p et q, quotcunque libuerit, alios valores elicere poterimus, quorum adeo lex progressionis innotescit. Unde patet hanc methodum vulgari plurimum antecellere.

§. 7. Inventa autem tali serie litterarum p et q binis quibuslibet conjungendis adipiscemur totidem valores idoneos pro ipsa littera quaesita x quippe cujus valores ex priori serie erunt

$$2\lambda pq; \quad 2\lambda qp'; \quad 2\lambda p'q'; \quad 2\lambda q'p''; \quad \text{etc.}$$

ex altera vero serie valores ipsius x erunt

$$2\lambda qp; \quad 2\lambda pq'; \quad 2\lambda q'p'; \quad 2\lambda p'q''; \quad \text{etc.}$$

posito scilicet $y = 1$; unde patet, si illi valores fuerint fractiones, earum denominatores pro y assumi posse, dum soli numeratores ipsi x tribuuntur.

§. 8. Totum ergo negotium eo redit, ut bini saltem valores initiales p et q investigentur, id quod plerumque facile fieri poterit, quia littera λ a lubitu nostro pendet. Interim tamen tales valores initiales ex ipsa formula biquadratica per methodum vulgarem derivari poterunt. Sumto enim $y = 1$ hujus formulae biquadraticae:

$$aax^4 + 2abx^3 + cxx + 2bdx + dd$$

radix statuat $axx + bx - d$ et calculo subducto fiet

$$x = \frac{4bd}{bb - 2ad - c} = \frac{-4bd}{mn + 4ad} \text{ ob } c = mn + bb + 2ad.$$

Simili modo posita radice $axx - bx - d$ fiet

$$x = \frac{bb - 2ad - c}{4ab} = \frac{-mn - 4ad}{4ab}.$$

§. 9. Iidem valores alio quoque modo obtineri possunt. Posita enim radice $axx + bx + \frac{c - bb}{2a}$, colligitur $x = \frac{-mn - 4ad}{4ab}$, quae cum praecedentium posteriore convenit. Simili modo si radix fingeretur $d + bx + \frac{c - bb}{2d} xx$ foret $x = \frac{-4bd}{mn + 4ad}$, prior valor §. praecedentis. Interim tamen duobus valoribus inventis annumerari possunt etiam hi: $x = 0$ et $y = 0$, unde autem raro aliquid deduci potest.

§. 10. Invento autem valore idoneo pro x manente $y = 1$ haud difficulter pro eo litterae p et q reperiri poterunt. Cum enim posuerimus $axx + bx + d = \lambda(mpp - nqq)$ et $x = 2\lambda pq$ erit $\frac{axx + bx + d}{x} = \frac{mpp - nqq}{2pq}$. Ex cognito ergo valore fiat

$$\frac{axx + bx + d}{x} = A,$$

ut habeamus $mpp - nqq = 2Apq$, colligitur $\frac{p}{q} = \frac{A + \sqrt{AA + mn}}{m}$, ubi radix certo extrahi poterit, unde oritur fractio $\frac{f}{g} = \frac{p}{q}$. Sumto igitur $p = f$ et $q = g$ sponte patescet quid pro λ accipi debeat, ut fiat $2\lambda pq = x$ hincque statim binae series memoratae formari poterunt. Ceterum superfluum foret hanc methodum per exempla illustrare, quia insignis casus jam in dissertatione praecedente (*), accurate est pertractatus.

§. 11. Etsi formula hic tractata non parum restricta videtur, tamen plurimae aliae formulae maxime discrepantes ope idoneae substitutionis ad eam reduci possunt, cujusmodi est ista satis generalis $\alpha A^4 \pm \beta B^4 = \Box$, vel posito $\frac{A}{B} = C$ haec simplicior $\alpha C^4 \pm \beta = \Box$, dummodo casus praesto sit, quo ea fit quadratum, veluti casu $C = 1$, ita ut tum sit $\alpha \pm \beta = \Box$. Omnes autem hujusmodi formulae ad nostram formam reducentur ope substitutionis $C = \frac{1+x}{1-x}$; tum enim posito $\alpha + \beta = aa$, ista formula induet hanc formam:

$$aa + 4(\alpha - \beta)x + 6\,aaxx + 4(\alpha - \beta)x^3 + aax^4 = \Box,$$

quae pro casu, quo $a = 1$, manifesto reducitur ad hanc:

$$(a + 2(\alpha - \beta)x + axx)^2 + 16\,\alpha\beta xx,$$

quam ergo secundum praecepta praescripta tractare licebit, id quod aliquot exemplis illustrasse juvabit.

Exemplum 1.

Formulae $2A^4 - B^4 = \Box$.

§. 12. Haec formula convenit cum ea, unde vulgo bini numeri quorum summa sit quadratum quadratorum vero summa biquadratum derivari solet. Facto ergo $\frac{A}{B} = C$ ut sit $2C^4 - 1 = \Box$, erit $\alpha = 2$ et $\beta = -1$, unde $\alpha + \beta = 1 = aa$ ergo $a = 1$.

(*) Solutio Problematis *Fermatiani* de duobus numeris, quorum summa sit quadratum quadratorum vero summa biquadratum (*V. Mém. Tom. IX. pag.* 3.)

Quocirca posito $C = \frac{1+x}{1-x}$ prodibit ista expressio:

$$1 + 12x + 6xx + 12x^3 + x^4 = \square \text{ sive haec:}$$
$$(1 + 6x + xx)^2 - 32xx = \square.$$

Statuatur ergo secundum praecepta tradita

$$1 + 6x + xx = \lambda(pp + 2qq) \text{ et } 4x = 2\lambda pq,$$

sive $x = \frac{1}{2}\lambda pq$ vel ut fractiones evitemus, si loco q scribamus $2q$ ut habeamus $1 + 6x + xx = \lambda(pp + 8qq)$ et $x = \lambda pq$, nascitur ista aequatio:

$$1 + 6\lambda pq + \lambda\lambda ppqq = \lambda pp + 8\lambda qq.$$

Hinc deducuntur sequentes radices

$$p = \frac{-3\lambda q \pm \sqrt{8\lambda^3 q^4 + \lambda}}{\lambda\lambda qq - \lambda}$$
$$q = \frac{-3\lambda p \pm \sqrt{\lambda^3 p^4 + 8\lambda}}{\lambda\lambda pp - 8\lambda}$$

unde cum quaelibet involvat duos valores sequitur fore

$$p + p' = \frac{-6q}{\lambda qq - 1} \text{ et } q + q' = \frac{-6p}{\lambda pp - 8}.$$

Videamus nunc quinam valores pro p et q ex priore saltem formula prodeant, unde sumto $\lambda = 1$ statim se offert casus $q = 0$, unde fit $p = 1$: Praeterea vero alius casus se offert, quo $q = 1$, qui dat $p = \frac{3 \pm 3}{1 - 1}$; at vero hoc casu ipsa aequatio quadratica dat $p = +\frac{7}{6}$. Statuamus ergo $\lambda = 1$ et geminos pro p et q habemus valores satisfacientes quorum alteri sunt $q = 0$ et $p = 1$, alteri vero $q = 1$ et $p = +\frac{7}{6}$ ex quibus fit $x = pq$. Relationes inter valores ex p et q derivatos erunt:

$$p + p' = \frac{-6q}{qq - 1} \text{ et } q + q' = \frac{-6p}{pp - 8}.$$

Quocirca si constituamus seriem q, p, q', p', q'', etc. erit

$$q' = \frac{-6p}{pp - 8} - q\,; \quad p' = \frac{-6q'}{q'q' - 1} - p$$
$$q'' = \frac{-6p'}{p'p' - 8} - q'\,; \quad p'' = \frac{-6q''}{q''q'' - 1} - p'.$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

Ex valoribus igitur $q = 0$ et $p = 1$ nascetur ista series:

$$0\,;\ 1\,;\ \tfrac{6}{7}\,;\ \tfrac{239}{19}\,;\ \text{etc.}$$

Jam omnia producta ex binis terminis contiguis hujus seriei dabunt valores idoneos pro x (§. 7.), unde fit $C = \frac{1+x}{1-x}$. Hinc ergo pro x obtinentur hi valores: 0; $\frac{6}{7}$; $\frac{1434}{91}$; etc. unde pro C deducuntur sequentes: 1; 13; $-\frac{1525}{1343}$. etc. Alteri valores inventi $q = 1$ et $p = \frac{7}{6}$ pro serie q, p, q', p', etc. hos dant numeros $1, \frac{7}{6}, \frac{13}{239}$, etc., unde patet priores valores pro q et p assumtos solutionem penitus exhaurire neque adeo posterioribus ad Problema solvendum opus fuisse.

Exemplum 2.

Formulae $3A^4 + B^4 = \square$.

§. 13. Ad quadratum ergo redigi debet haec formula $3C^4 + 1$, cui statim tres valores satisfacere deprehenduntur, scilicet

$$C = 0, \quad C = 1, \quad C = 2.$$

Cum igitur hic sit $\alpha = 3$ et $\beta = 1$ posito $C = \frac{1+x}{1-x}$ nascetur sequens formula $4 + 8x + 24xx + 8x^3 + 4x^4 = \square$ quae per 4 divisa fit $1 + 2x + 6xx + 2x^3 + x^4 = \square$ quae ita repraesentata $(1 + x + xx)^2 + 3xx = \square$ dabit has substitutiones:

$$1 + x + xx = \lambda(pp - 3qq) \quad \text{et} \quad x = 2\lambda pq,$$

unde ista aequatio inter p et q emergit

$$1 + 2\lambda pq + 4\lambda\lambda ppqq = \lambda pp - 3\lambda qq,$$

unde pro casu $\lambda = 1$ et $q = \frac{1}{2}$ statim deducitur $p = -\frac{7}{4}$. Binae autem radices quadratae pro p et q erunt

$$p = \frac{-\lambda q \pm \sqrt{\lambda - 12\lambda^3 q^4}}{4\lambda\lambda qq - \lambda}$$

$$q = \frac{-\lambda p \pm \sqrt{4\lambda^3 p^4 - 3\lambda}}{4\lambda\lambda pp + 3\lambda}.$$

Ex his ergo formulis erit

$$p + p' = \frac{-2\lambda q}{4\lambda\lambda qq - \lambda} \quad \text{et} \quad q + q' = \frac{-2\lambda p}{4\lambda\lambda pp + 3\lambda}.$$

Quoniam jam casum invenimus $\lambda = 1$ et $q = \frac{1}{2}$, unde fit $p = -\frac{7}{4}$

hinc statim nostra series q, p, q', p', q'', p'', etc. formari potest, ope formularum:

$$p + p' = \frac{-2q}{4qq - 1} \quad \text{et} \quad q + q' = \frac{-2p}{4pp + 3}$$

atque termini hujus seriei fient $\frac{1}{2}$, $\frac{-7}{4}$, $\frac{-33}{122}$, etc. unde cum sit $x = 2pq$, hinc nanciscimur istos valores, $x = \frac{-7}{4}$ et $x = \frac{231}{448}$ unde fit $C = \frac{-3}{11}$; tum enim erit $\sqrt{3C^4 + 1} = \frac{122}{121}$.

Exemplum 3.

Formulae $\frac{3A^4 - B^4}{2} = \Box$.

§. 14. Quia igitur quadratum esse debet $\frac{3}{2}C^4 - \frac{1}{2}$ erit $\alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$, ideoque $a = 1$ et $\alpha - \beta = 2$, oritur haec formula biquadratica

$$1 + 8x + 6xx + 8x^3 + x^4 = \Box$$

sive

$$(1 + 4x + xx)^2 - 3(2x)^2 = \Box.$$

Quamobrem statuatur

$$1 + 4x + xx = \lambda(pp + 3qq) \quad \text{et} \quad x = \lambda pq,$$

unde prodit ista aequatio inter p et q

$$1 + 4\lambda pq + \lambda\lambda ppqq = \lambda pp + 3\lambda qq,$$

unde statim quosdam valores satisfacientes eruere possumus ita ut non opus sit ad extractionem radicis confugere. Primo enim sumto $\lambda = 1$ et $q = 1$ ista aequatio dabit $p = \frac{1}{2}$ et sumto $\lambda = 3$ et $p = 1$ erit $q = \frac{1}{6}$. Hos ergo ambos casus evolvamus. Sit igitur primo $\lambda = 1$, ita ut sit $x = pq$ et novimus casum ubi $q = 1$ et $p = \frac{1}{2}$, et quia aequatio quadratica

$$pp(qq - 1) + 4pq + 1 = 3qq$$

evidens est summam radicum ipsius p esse $p + p' = \frac{-4q}{qq - 1}$ similique modo cum sit $qq(pp - 3) + 4pq + 1 = pp$ erit $q + q' = \frac{-4p}{pp - 3}$. Hinc ergo formetur series q, p, q', p', etc. quae in numeris ita se habebit $1, \frac{1}{2}, \frac{-3}{11}, \frac{47}{28}$, etc. unde deducuntur hi valores pro x, $\frac{1}{2}, \frac{-3}{22}, \frac{-141}{308}$, ideoque pro C sequentes $3, \frac{19}{25}, \frac{449}{967}$, etc.

Simili modo pro altero casu ubi $\lambda = 3$, $p = 1$ et $q = \frac{1}{6}$ ob formulas generales $p + p' = \frac{-4q}{\lambda qq - 1}$ et $q + q' = \frac{-4p}{\lambda pp - \lambda}$ erit unde $p + p' = \frac{-4q}{3qq - 1}$ et $q + q' = \frac{-4p}{3pp - 3}$

hinc series p, q, p', q', etc. ita se habebit $1, \frac{1}{6}, \frac{-3}{11}, \frac{-47}{84}$, etc. Quia igitur hic $x = 3pq$ erit iterum $x = \frac{1}{2}, \frac{-3}{22}, \frac{-141}{308}$, sicque amplissimum usum hujus methodi me satis abunde declarasse video.

§. 15. Haec exempla nonnulla insignia compendia nobis suppeditarunt, quibus totum hoc negotium multo facilius et elegantius expediri potest, quae in sequenti Problemate clarius explicabimus.

Problema.

Proposita formula biquadratica in hac forma contenta:

$$(axx + 2bx + c)^2 - 4mnxx$$

invenire infinitos valores ipsius x, quibus ista formula evadit quadratum.

Solutio.

§. 16. Primo ista formula fit quadratum, si fuerit

$$axx + 2bx + c = \lambda(mpp - nqq) \text{ et } x = \lambda pq$$

tum enim ejus radix erit $\lambda(mpp + nqq)$. Posito igitur $x = \lambda pq$ prior aequatio induet hanc formam:

$$\lambda\lambda appqq + 2\lambda bpq + c = \lambda mpp - \lambda nqq;$$

unde statim unus casus quaesito satisfaciens elicitur sumendo $p = 0$, tum enim erit $c = \lambda nqq$. Sumto igitur $\lambda = nc$ fiet $q = \frac{1}{n}$, hicque solus casus innumerabiles alios sequenti modo producet.

§. 17. Cum aequatio modo inventa tam pro p quam pro q sit quadratica, pro utraque etiam geminum valorem continebit, unde si pro quovis q gemini valores ipsius p ponantur p et p', erit ex natura aequationum

$$p + p' = \frac{2\lambda bq}{\lambda m - \lambda\lambda aqq} \text{ sive } p + p' = \frac{2bq}{m - \lambda aqq}.$$

Simili modo pro quovis p si gemini valores ipsius q ponantur q et q' erit $q + q' = \frac{2bp}{n - \lambda app}$. Quare cum pro casu cognito invenerimus $\lambda = nc$, ubi scilicet erat $p = 0$ et $q = \frac{1}{n}$ erit pro omnibus reliquis casibus

$$p' = \frac{2bq}{m - nacqq} - p \quad \text{et} \quad q' = \frac{2bp}{n - nacpp} - q.$$

Harum igitur formularum ope sequentem seriem formare licebit:

$$p,\ q,\ p',\ q',\ p'',\ q'', \text{ etc.}$$

quippe pro qua erit

$$p' = \frac{2bq}{m - nacqq} - p; \quad q' = \frac{2bp}{n - nacpp} - q$$

$$p'' = \frac{2bq'}{m - nacq'q'} - p'; \quad q'' = \frac{2bp'}{n - nacp'p'} - q'$$

§. 18. Cum igitur hujus seriei ex casu cognito $p = 0$ et $q = \frac{1}{n}$ ope harum formularum termini sequentes haud difficulter formari possint, erit

$$p' = \frac{2b}{mn - ac}; \quad q' = \frac{4mnbb - (mn - ac)^2}{n(mn - ac)^2 - 4nabbc}.$$

Si hoc modo etiam sequentes definire vellemus, ad expressiones nimis prolixas perveniremus, verum in exemplis numericis hunc laborem quousque libuerit haud difficulter continuare licebit.

§. 19. Inventa autem hac serie valores idonei pro ipsa quantitate x expedite assignari poterunt. Cum enim ob. $\lambda = nc$ sit $x = ncpq$ ejus valores successivi erunt

$$x = ncpq, \quad x = ncp'q = \frac{2bc}{mn - ac},$$

$$x = ncp'q' = \frac{2bc\,(4mnbb - (mn - ac)^2)}{(mn - ac)^3 - 4abbc\,(mn - ac)}$$

et ita porro.

§. 20. Ex singulis autem istis valoribus ipsius x totidem alii affines sine ullo labore exhiberi poterunt. Cum enim ipsa forma proposita posito $x = \frac{1}{y}$ induat hanc formam:

$$\frac{(a + 2by + cyy)^2}{y^4} - \frac{4mn}{yy} = \square,$$

quae per y^4 multiplicata praebet istam formulam quadrato aequandam: $(a + 2by + cyy)^2 - 4mnyy$, quae a proposita aliter non differt, nisi ut litterae x et c sint permutatae. Quamobrem si in omnibus valoribus pro x inventis litteras a et c inter se permutemus, totidem valores pro littera y obtinebimus, qui inversi dabunt totidem novos valores pro x, scilicet si valor quicunque pro x inventus fuerit $x = \frac{f}{g}$, atque in quantitatibus f et g literae a et c permutentur, unde prodeant f' et g', tum quoque erit $x = \frac{g'}{f'}$, hocque modo vix ullum dubium superesse poterit, quin pro x omnes plane valores satisfacientes eruantur.