1826

Solutio problematis Fermatiani de duobus numeris, quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa biquadratum, ad mentem illustris La Grange adornata

Leonhard Euler

SOLUTIO
PROBLEMATIS FERMATIANI
DE DUOBUS NUMERIS, QUORUM SUMMA SIT QUADRATUM, QUADRATORUM VERO SUMMA BIQUADRATUM, AD MENTEM ILL. *LA GRANGE* ADORNATA

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhib. die 5 Junii 1780.

§. 1. In solutionibus hujus problematis, quae hactenus passim in medium sunt allatae, Ill. *La Grange* id potissimum merito reprobat, quod nimium casui et vagis tentaminibus tribuatur, unde fit, ut certi esse nequeamus, omnesne solutiones, atque adeo simplicissimas, hoc modo inventas esse. Huic igitur desiderato sequenti analysi satisfactum iri confido.

§. 2. Sint x et y bini numeri quaesiti, ita ut esse debeat $x + y = \square$ et $xx + yy = \square^2$, si pro conditione posteriore sumamus $x = pp - qq$ et $y = 2pq$, fiet $xx + yy = (pp + qq)^2$. Quod si porro statuatur $p = rr - ss$ et $q = 2rs$, fiet $pp + qq = (rr + ss)^2$, ideoque $xx + yy = (rr + ss)^4$, uti requiritur. Hinc autem erit $x = r^4 - 6rrss + s^4$ et $y = 4rs(rr - ss)$.

§. 3. Pro conditione priore ergo summa numerorum e[...]

$$x + y = r^4 + 4r^3s - 6rrss - 4rs^3 + s^4,$$

quae formula idcirco quadratum est efficienda. Hunc in finem, [...] quidquam tentamini tribuatur, istam expressionem sub hac form[...] repraesento:

$$x + y = (rr + 2rs - ss)^2 - 8rrss,$$

ita ut jam talis formula: $AA - 2BB$ quadratum reddi debeat, quo[...] fit sumendo $A = tt + 2uu$ et $B = 2tu$; tum enim fiet

$$AA - 2BB = (tt - 2uu)^2.$$

§. 4. Nunc loco A et B scribamus nostros valores et h[...] bebimus $rr + 2rs - ss = tt + 2uu$ et $2rs = 2tu$, hocque mod[...] summa numerorum nostrorum erit $x + y = (tt - 2uu)^2$, ideoqu[...] jam ambabas conditionibus erit satisfactum, dummodo formulae m[...] do inventae fuerint expeditae.

§. 5. Quoniam autem haec duo producta rs et tu inter [...] aequalia esse debent, loco litterae s hic tuto unitatem assumere lic[...] bit. Quamquam enim tum pro r fractiones sint prodituræ, id sol[...] tioni neutiquam officit, quia solutio in fractis inventa facile ad int[...] gros reducitur. Hoc igitur modo erit $r = tu$, qui valor in alte[...] aequatione substitutus dabit $ttuu + 2tu - 1 = tt + 2uu$, sicque [...] tum negotium reductum est ad justam relationem inter t et u inv[...] niendam. Sive ergo t per u, vel u per t, definire velimus, resol[...] tio aequationis quadraticae binas sequentes suppeditabit formulas:

$$t = \frac{u \pm \sqrt{2u^4 - 1}}{1 - uu} \quad \text{et} \quad u = \frac{t \pm \sqrt{t^4 - 2}}{2 - tt}.$$

Quin etiam hinc statim valores radicalium pro sequenti usu spon[...] se produnt, ut extractione radicis non amplius indigeamus. Ex pri[...] re enim erit $\sqrt{2u^4 - 1} = t(1 - uu) - u$; ex altera ve[...] $\sqrt{t^4 - 2} = u(2 - tt) - t$. Hic autem commode usu venit, [...] utraque formula geminos praebeat valores.

§. 6. Incipiamus a formula priore, quia casus $u = 1$ st[...] tim in oculos incurrit. Quoniam vero hoc casu denominator $1 - u[...]$

evanescit, recurrendum est ad remedium notissimum, quo poni solet $uu = 1 - 2\omega$, denotante ω quantitatem evanescentem, ita ut ejus potestates altiores tuto rejicere liceat. Hinc igitur erit $2u^4 = 2 - 8\omega$ ideoque $\sqrt{2u^4 - 1} = \sqrt{1 - 8\omega} = 1 - 4\omega$ et $1 - uu = 2\omega$, hincque colligitur $t = \frac{3}{2}$, qui valor in altera formula substitutus dat $\sqrt{t^4 - 2} = \frac{7}{4}$.

§. 7. Progrediamur nunc ad alteram aequationem, pro qua jam novimus valores $u = 1$ et $t = \frac{3}{2}$, et quia geminos valores complectitur, novum valorem pro u elicimus, scil. $u = -13$. Hunc valorem feramus in priorem formulam, pro qua jam novimus alterum valorem esse $t = \frac{3}{2}$, ex quo innotescit

$$\sqrt{2u^4 - 1} = t(1 - uu) - u,$$

unde, ob $u = -13$ et $t = \frac{3}{2}$, erit $\sqrt{2u^4 - 1} = -239$. Nunc vero haec ipsa aequatio nobis insuper praebet novum valorem pro t, scil. $t = -\frac{113}{84}$.

§. 8. Simili modo istum valorem inferamus in alteram aequationem, et quia erat $u = -239$, inde deducimus

$$\sqrt{t^4 - 2} = u(2 - tt) - t = -\frac{311485}{7056},$$

quo valore adhibito altera radix nobis nobis dabit novum valorem pro u scil. $u = \frac{301993}{1343}$. Quod si denuo iste valor in priore formula assumatur, pro t iterum novum adipiscimur valorem, sicque quousque libuerit facile progredi licebit. Mox autem, ob numeros immensos, laborem abrumpere cogemur.

§. 9. Vis igitur istius novae methodi in hoc consistit, quod singulis valoribus ipsius t gemini valores ipsius u, eodemque modo singulis ipsius u gemini valores ipsius t respondeant, quos ergo, quousque sumus progressi, hic conspectui exhibeamus

$$u = 1;\quad t = \tfrac{3}{2},$$
$$u = -13;\quad t = -\tfrac{113}{84},$$
$$u = \tfrac{301993}{1343}.$$

quorum valorum quilibet cum binis adjacentibus combinari pot
Ex talibus autem binis valoribus ipsi numeri quaesiti x et y h
modo determinantur

$$x = t^4 u^4 - 6\, tt\, uu + 1$$
$$y = 4\, t\, u\, (tt\, uu - 1).$$

Facile autem perspicitur hoc modo omnes plane solutiones pos
biles necessario prodire debere.

§. 10. Hic imprimis notatu dignum est, quod valores p
litteris t et u successive inventi egregio ordine progrediantur,
ut ex singulis facile sequentes definiri queant. Ita si habeantur d
quicunque valores pro t et u, qui formulae $t = \frac{u \pm \sqrt{2u^4 - 1}}{1 - uu}$ s
tisfaciant, cum sit $\sqrt{2\,u^4 - 1} = t\,(1 - uu) - u$, ob signu
radicale ambiguum insuper alius valor pro t eruetur, quem si p
namus $= t'$, erit quoque $t'(1 - uu) = 2u - t\,(1 - uu)$, ide
que $t' = \frac{2u}{1 - uu} - t$.

§. 11. Eodem modo ex iisdem valoribus t et u cogni
per alteram formulam $u = \frac{t \pm \sqrt{t^4 - 2}}{2 - tt}$, ob $\sqrt{t^4 - 2} = u\,(2 - tt) -$
alius valor pro u elici poterit, qui si ponatur $= u'$, erit

$$u'\,(2 - tt) = 2t - u\,(2 - tt), \text{ ideoque } u' = \frac{2\,t}{2 - tt} - u.$$

Hi valores cum sint cogniti, per utramque formulam denuo alii no
erui poterunt, qui si ordine designentur per t'', u''; t''', u'''; et
ob $t' = \frac{2\,u}{1 - uu} - t$ et $u' = \frac{2t}{2 - tt} - u$, simili modo habebimu
$t'' = \frac{2\,u'}{1 - u'u'} - t'$ et $u'' = \frac{2\,t'}{2 - t't'} - u'$, tum vero $t''' = \frac{2\,u''}{1 - u''u''} -$
et $u''' = \frac{2\,t''}{2 - t''t''} - u''$; et ita porro.