



1826

Solutio problematis Fermatiani de duobus numeris, quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa biquadratum, ad mentem illustris La Grange adornata

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Solutio problematis Fermatiani de duobus numeris, quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa biquadratum, ad mentem illustris La Grange adornata" (1826). *Euler Archive - All Works*. 769.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/769>

SOLUTIO
PROBLEMATIS FERMATIANI

DE DUOBUS NUMERIS,
QUORUM SUMMA SIT QUADRATUM,
QUADRATORUM VERO SUMMA BIQUADRATUM,
AD MENTEM ILL. LAGRANGE ADORNATA

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhib. die 5 Junii 1780.

§ 1. In solutionibus hujus problematis, quae hactenus passim in medium sunt allatae, Ill. La Grange id potissimum merito reprobat, quod nimium casui et vagis tentaminibus tribuatur, unde fit, ut certi esse nequeamus, omnesne solutiones, atque adeo simplicissimas, hoc modo inventas esse. Huic igitur desiderato sequenti analysi satisfactum iri confido.

§ 2. Sint x et y bini numeri quaesiti, ita ut esse debeant $x + y = \square$ et $xx + yy = \square^2$, si pro conditione posteriore sumamus $x = pp - qq$ et $y = 2pq$, fiet $xx + yy = (pp + qq)^2$. Quod si porro statuatur $p = rr - ss$ et $q = 2rs$, fiet $pp + qq = (rr + ss)^2$, ideoque $xx + yy = (rr + ss)^4$, uti requiritur. Hinc autem erit $x = r^4 - 6rrss + s^4$ et $y = 4rs(rr - ss)$.

§. 3. Pro conditione priore ergo summa numerorum erit

$$x + y = r^4 + 4r^3s - 6rrss - 4rs^3 + s^4,$$

quae formula idcirco quadratum est efficienda. Hunc in finem, in quidquam tentamini tribuatur, istam expressionem sub hac forma repraesento:

$$x + y = (rr + 2rs - ss)^2 - 8rrss,$$

ita ut jam talis formula: $AA - 2BB$ quadratum reddi debeat, quod fit sumendo $A = tt + 2uu$ et $B = 2tu$; tum enim fiet

$$AA - 2BB = (tt - 2uu)^2.$$

§. 4. Nunc loco A et B scribamus nostros valores et habebimus $rr + 2rs - ss = tt + 2uu$ et $2rs = 2tu$, hocque modo summa numerorum nostrorum erit $x + y = (tt - 2uu)^2$, ideoque jam ambabas conditionibus erit satisfactum, dummodo formulae modo inventae fuerint expeditae.

§. 5. Quoniam autem haec duo producta rs et tu inter se aequalia esse debent, loco litterae s hic tuto unitatem assumere licebit. Quamquam enim tum pro r fractiones sint proditurae, id solutioni nequitiam officit, quia solutio in fractis inventa facile ad integros reducitur. Hoc igitur modo erit $r = tu$; qui valor in altera aequatione substitutus dabit $tuu + 2tu - 1 = tt + 2uu$, sicque totum negotium reductum est ad justam relationem inter t et u invenendam. Sive ergo t per u , vel u per t , definire velimus, resolutio aequationis quadraticae binas sequentes suppeditabit formulas:

$$t = \frac{u \pm \sqrt{2u^2 - 1}}{1 - uu} \quad \text{et} \quad u = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 2}}{2 - tt}.$$

Quin etiam hinc statim valores radicalium pro sequenti usu sponte se produnt, ut extractione radicis non amplius indigeamus. Ex priorum enim erit $\sqrt{2u^2 - 1} = t(1 - uu) - u$; ex altera vero $\sqrt{t^2 - 2} = u(2 - tt) - t$. Hic autem commode usu venit, ut utraque formula geminos praebet valores.

§. 6. Incipiamus a formula priore, quia casus $u = 1$ statim in oculos incurrit. Quoniam vero hoc casu denominator $1 - uu$

recurrendum est ad remedium notissimum, quo poni solet
 denotante ω quantitatem evanescentem, ita ut ejus po-
 restates altiores tuto rejicere liceat. Hinc igitur erit $2u^4 = 2 - 8\omega$
 ideoque $\sqrt{2u^4 - 1} = \sqrt{1 - 8\omega} = 1 - 4\omega$ et $1 - uu = 2\omega$,
 hincque colligitur $t = \frac{3}{2}$, qui valor in altera formula substitutus dat
 $\sqrt{2u^4 - 1} = \frac{311485}{7656}$.

§. 7. Progrediamur nunc ad alteram aequationem, pro qua
 jam novimus valores $u = 1$ et $t = \frac{3}{2}$, et quia geminos valores com-
 plectitur, novum valorem pro u elicimus, scil. $u = -13$. Hunc
 valorem feramus in priorem formulam, pro qua jam novimus alte-
 rum valorem esse $t = \frac{3}{2}$, ex quo innotescit

$\sqrt{2u^4 - 1} = t(1 - uu) - u$,
 unde, ob $u = -13$ et $t = \frac{3}{2}$, erit $\sqrt{2u^4 - 1} = -239$. Nunc
 vero haec ipsa aequatio nobis insuper praebet novum valorem pro
 t , scil. $t = -\frac{113}{84}$.

§. 8. Simili modo istum valorem inferamus in alteram ae-
 quationem, et quia erat $u = -239$, inde deducimus

$\sqrt{t^4 - 2} = u(2 - tt) - t = -\frac{311485}{7656}$,
 quo valore adhibito altera radix nobis dabit novum valorem pro
 u scil. $u = \frac{301993}{1343}$. Quod si denuo iste valor in priore formula as-
 sumatur, pro t iterum novum adipiscimur valorem, sicque quous-
 que libuerit facile progredi licebit. Mox autem, ob numeros im-
 mensos, laborem abrumpere cogemur.

§. 9. Vis igitur istius novae methodi in hoc consistit, quod
 singulis valoribus ipsius t gemini valores ipsius u , eodemque modo
 singulis ipsius u gemini valores ipsius t respondeant, quos ergo,
 quousque sumus progressi, hic conspectui exhibeamus

$$\begin{aligned} u &= 1; & t &= \frac{3}{2}, \\ u &= -13; & t &= -\frac{113}{84}, \\ u &= \frac{301993}{1343}. \end{aligned}$$

quorum valorum quilibet cum binis adjacentibus combinari potest. Ex talibus autem binis valoribus ipsi numeri quaesiti x et y modo determinantur

$$\begin{aligned}x &= t^4 u^4 - 6 tt uu + 1 \\y &= 4 t u (tt uu - 1).\end{aligned}$$

Facile autem perspicitur hoc modo omnes plane solutiones posibles necessario prodire debere.

§. 10. Hic imprimis notatu dignum est, quod valores litteris t et u successive inventi egregio ordine progrediantur, ut ex singulis facile sequentes definiiri queant. Ita si habeantur quicumque valores pro t et u , qui formulae $t = \frac{u + \sqrt{2u^4 - 1}}{1 - uu}$ satisfaciant, cum sit $\sqrt{2u^4 - 1} = t(1 - uu) - u$, ob signum radicale ambiguum insuper alius valor pro t eruetur, quem si ponamus $= t'$, erit quoque $t'(1 - uu) = 2u - t(1 - uu)$, ideoque $t' = \frac{2u}{1 - uu} - t$.

§. 11. Eodem modo ex iisdem valoribus t et u cognitis per alteram formulam $u = \frac{t + \sqrt{t^4 - 2}}{2 - tt}$, ob $\sqrt{t^4 - 2} = u(2 - tt) - t$ alius valor pro u elici poterit, qui si ponatur $= u'$, erit $u'(2 - tt) = 2t - u(2 - tt)$, ideoque $u' = \frac{2t}{2 - tt} - u$. Hi valores cum sint cogniti, per utramque formulam denuo alii noviter erui poterunt, qui si ordine designentur per t'', u'' ; t''', u''' ; etc. ob $t' = \frac{2u}{1 - uu} - t$ et $u' = \frac{2t}{2 - tt} - u$, simili modo habebimus $t'' = \frac{2u'}{1 - u'u'} - t'$ et $u'' = \frac{2t'}{2 - t't'} - u'$, tum vero $t''' = \frac{2u''}{1 - u''u''} - t''$ et $u''' = \frac{2t''}{2 - t''t''} - u''$; et ita porro.



EN

IN

IN

IN

IN

IN

IN

IN

IN

IN

IN

IN

IN

IN

IN

IN

IN

IN

IN

IN

IN

IN

IN

IN

IN

IN

IN

IN