1824

Methodus nova et generalis problema synchronarum inversum aliaque eiusdem generis resolvendi

Leonhard Euler

METHODUS NOVA ET GENERALIS
PROBLEMA SYNCHRONARUM
INVERSUM
ALIAQUE EJUSDEM GENERIS RESOLVENDI.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhib. die 28. Maii 1781.

§. 1. Quo clarius haec methodus excoli queat ipsum problema Synchronarum directum breviter considerari convenit. Tab. II. Fig. 1. Propositae igitur sint infinitae curvae AMM′, amm', etc. quae contineantur aequatione quacunque inter binas coordinatas $IP = x$ et $PM = y$, quam ingrediatur parameter $= a$, ex cujus variatione omnes hae infinitae curvae nascantur. Jam super singulis his curvis concipiantur corpora descendere, quorum celeritates ubique sint ut radix quadrata ex abscissa, sicque cum elementum curvae AM, posito $\partial y = p \partial x$, sit $\partial x \sqrt{1+pp}$, erit tempus descensus per arcum $AM = \int \frac{\partial x \sqrt{1+pp}}{\sqrt{x}}$.

§. 2. Jam in problemate Synchronarum directo quaeruntur ejusmodi curvae CMm, quae ab omnibus illis curvis abscindant arcus AM, am, aequalibus temporibus percursos, sive isochronos; quam ob causam istae curvae CMm vocatae sunt Synchronae, quarum numerus etiam manifesto est infinitus, prout pro qualibet tempus descensus sive majus fuerit sive minus assumtum. Hinc igitur constructio harum Synchronarum nulla laborat difficultate. Quando vero pro iis aequatio inter binas coordinatas $IP = x$ et $PM = y$ requiritur, saepenumero utique maximae difficultates occurrunt. Postquam enim positum fuerit $\int \frac{\partial x \sqrt{1+pp}}{\sqrt{x}} = C$, scilicet constantis magnitudinis, hac formula integrali parameter ille a continetur et pro consta habetur, qui quoniam pro diversis curvis AM est variabilis, is n tiquam in aequationem pro curva synchrona CM ingredi pot Quamobrem ex aequatione pro illis curvis, data inter x, y et a, lor ipsius a per x et y expressus erui debet; qui pro a in aeq tione $\int \frac{\partial x \sqrt{1+pp}}{\sqrt{x}} = C$, postquam jam fuerit integrata, substitut dabit aequationem pro curva synchrona. Tum vero ipsa quanti C, quae pro diversis Synchronis est diversa, tanquam earum pa meter variabilis spectari potest.

§. 3. Quoniam autem hujusmodi quaestiones multo latius e tendi possunt, dum scilicet aliae formulae integrales proponunt quae pro omnibus arcubus abscindendis AM aequales valores s tiantur, curvas istas AM in sequentibus appellabo *secandas*, atq curvas, quae hactenus Synchronae sunt vocatae, in posterum cur *secantes* vocabo, et problema inversum, nunc ita erit enunciand ut datis omnibus curvis secantibus CM, C′M′, aequatione quacun inter coordinatas x et y, una cum parametro earum variabili contentis curvae secandae investigentur, a quibus scilicet quaeli secans AM ejusmodi portiones abscindat, quibus idem valor cer formulae integralis conveniat, hocque modo quaestio, quam hic tr tandam suscepi, in latissimo sensu enunciatur. Interim tamen, d nec ipsam methodum a me inventam exposuero, formulam illam te poris $\int \frac{\partial x \sqrt{1+pp}}{\sqrt{x}}$ in calculo retinebo, quippe cui deinceps facile e ampliorem significatum tribuere.

§. 4. In superiore quidem dissertatione super hoc argume jam eos casus feliciter expedivi, quibus lineae secantes sunt rec quaecunque inter se parallelae, neque vero eo tempore mihi qui licuit hanc investigationem, sive ad alias rectas inter se non pa lelas, sive adeo ad lineas curvas, instituere. Postquam autem multum de hoc argumento essem meditatus in methodum satis facilem atque adeo maxime generalem incidi, quam ad quasvis hujus generis quaestiones accommodare licebit. Eam igitur hic clare ac dilucide explicare constitui.

§. 5. Cum igitur quaelibet linearum secantium CM suo parametro c determinetur, atque omnia tempora per curvas secandas eo usque etiam sint eadem, ea vel ipsi parametro c, vel cuivis ejus functioni C aequalia erunt statuenda, ita ut sit $\int \frac{\partial x \sqrt{1 + pp}}{\sqrt{x}} = C$, unde cum C infinitos valores recipere possit, ex quorum quolibet totus ordo curvarum secandarum oriri possit, manifestum est problema inversum, quod hic tractamus, multo latius patere quam directum.

§. 6. Cum igitur pro curvis secandis habeatur haec aequatio generalissima: $\int \frac{\partial x \sqrt{1 + pp}}{\sqrt{x}} = C$, si ponamus, dum ipse parameter c incrementum accipit ∂c, fieri $\partial C = C' \partial c$, tum omnia tempora per curvas secandas usque ad proximam curvam secantem pertingere debebunt, unde differentiatio nos perducit ad hanc aequationem: $\frac{\partial x \sqrt{1 + pp}}{\sqrt{x}} = C' \partial c$, cujus aequationis integrale completum, ob constantem arbitrariam ingressam, infinitas producet curvas secandas, quarum scilicet variabilis parameter erit illa ipsa constans.

§. 7. Verum ista aequatio nihil plane lucri adferre videtur ad ipsas curvas secandas definiendas, siquidem parameter ille curvarum secantium c nullo modo in determinationem secandarum admitti potest, quoniam curvae secandae ad omnes plane secantes pari ratione referri debent, quemadmodum etiam in problemate directo parameter curvarum secandarum a penitus ab investigatione curvarum secantium removeri debuit, dum scilicet ex aequatione pro cur-

vis secandis inter binas coordinatas x et y et parametrum a va
ipsius a erui debebat ejusque loco substitui.

§. 8. Cum igitur hic similis occurrat casus, dum natura cu
varum secantium aequatione inter coordinatas x, y et parametr
c data sumitur, nihil aliud opus est, nisi ut ex hac ipsa aequatio
valorem parametri c per ambas coordinatas x et y exprimamu
hoc enim valore substituto formula $\int \frac{\partial x \sqrt{1+pp}}{\sqrt{x}}$ aequari debebit ce
tae functioni binarum tantum variabilium x et y, quam statuam
$= V$, unde differentiando prodeat $\partial V = P\partial x + Q\partial y$, ita ut is
forma sit differentiale verum ideoque $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$. Hinc igitur p
curvis secandis obtinebitur ista aequatio differentialis:

$$\frac{\partial x \sqrt{1+pp}}{\sqrt{x}} = P\partial x + Q\partial y,$$

et quia posuimus $\partial y = p\partial x$, differentialia penitus ex calculo exc
dent, eritque $\frac{\sqrt{1+pp}}{\sqrt{x}} = P + Qp$, quae praeter binas variabiles
et y adhuc litteram p involvit, cujus valor hinc facile definiri pot
rit, ope scilicet aequationis tantum quadraticae. Invento autem is
valore p, ejus loco restituatur valor $\frac{\partial y}{\partial x}$, hocque modo habebim
aequationem differentialem primi gradus inter binas coordinatas x et
cujus integratio completa suppeditabit omnes curvas secandas, ha
que solutione in genere aequiescere oportet.

§. 9. Quando autem omnes curvae secantes sunt inter
similes, centro similitudinis in initio coordinatarum I constituto, qu
fit si aequatio inter x, y et c fuerit homogenea, tum pro c i
venietur semper functio homogenea unius dimensionis ipsarum
et y, hocque modo pro V habebitur functio homogenea ipsarum
et y, cujus numerus dimensionum si fuerit n, posito $y = ux$
functio V induet hanc formam $x^n U$, denotante U certam function
ipsius u, ideoque pro curvis secandis hebebimus istam aequatione

$$\int \frac{\partial x \sqrt{1+pp}}{\sqrt{x}} = x^n U,$$

ad quam differentiandam sit $\partial U = U \partial u$, et quia $\partial y = u\partial x + x\partial u$, simulque $\partial y = p\partial x$, hinc oritur $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p-u}$. Instituta ergo differentiatione loco ∂x ubique scribamus $\frac{x\,\partial u}{p-u}$, atque differentialia ex calculo excedent; reperietur enim talis aequatio:

$$\frac{\sqrt{x(1+pp)}}{p-u} = \frac{nx^n U}{p-u} + x^n U', \text{ sive } \sqrt{x(1+pp)} = nx^n U + x^n (p-u) U',$$

quae quidem tres variabiles p, u, x involvit, at vero hoc nobis praestat commodum, ut inde x facile eliminari possit; dividendo enim per $\sqrt{x}$ pervenietur ad hanc aequationem:

$$\sqrt{1+pp} = x^{n-\frac{1}{2}}(nU + (p-u)U'),$$

unde sumtis differentialibus logarithmicis et loco $\frac{\partial x}{x}$ scribendo $\frac{\partial u}{p-u}$ oritur haec aequatio:

$$\frac{p\,\partial p}{1+pp} = (n-\tfrac{1}{2})\frac{\partial u}{p-u} + \frac{\partial(nU + (p-u)U')}{nU + (p-u)U'},$$

quae jam binas tantum variabiles p et u involvit; unde si valorem ipsius p per u completo modo definire licuerit, sine ulteriore integratione, omnia elementa pro curvis secandis assignare valebimus, per solam variabilem u. Primo enim erit

$$x^{n-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1+pp}}{nU + (p-u)U'};$$

unde cognito valore ipsius x erit $y = ux$, hocque modo omnia erunt praestita, quae desiderari possunt.

§. 10. Casus autem hic singularis occurrit prae ceteris maxime memorabilis, scilicet quando $n = \frac{1}{2}$; tum enim statim se offert aequatio duas tantum variabiles p et u involvens, scilicet:

$$\sqrt{1+pp} = \tfrac{1}{2}U + (p-u)U,$$

unde jam facile definitur p, qui valor si in formula $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p-u}$ substituatur, integratione completa peracta exprimetur x per u, indeque fit $y = ux$, quae relatio, una cum constante ingressa, infinitas curvas secandas exhibebit. Cum autem pro C functionem quamcunque ipsius c assumere liceat, semper pro V talis functio $x^n U$ accipi poterit, ubi sit $n = \frac{1}{2}$, ex quo casu plerumque simplicissimae so tiones eruuntur.

§. 11. Superfluum jam foret monere, eandem methodum pa successu adhiberi posse, si loco formulae $\int \frac{\partial x \sqrt{1+pp}}{\sqrt{x}}$, qua temp exprimitur, quaecunque alia formula integralis proponatur, cu omnes valores inter binas quascunque curvas secantes intercep sint inter se aequales. Quin etiam res extendi poterit ad formul integralem maxime generalem $\int Z \partial x$, qualis in doctrina de cu maximi minimive proprietate gaudentibus tractari solet, ubi scilic posito $\partial y = p \partial x$, $\partial q = r \partial x$, etc. sit

$$\partial Z = M \partial x + N \partial y + P \partial p + Q \partial q + \text{etc.}$$

veluti si tales curvae secandae quaerantur, ut lineae secantes da ab iis omnibus arcus aequales abscindant. At vero exposita metho generali omnes hujusmodi quaestionus resolvendi nihil aliud sup esse videtur, nisi ut quaedam problemata hujus generis specialissi resolvamus.

Problema I.

Tab. II. Fig. 2. *Si lineae secantes omnes fuerint lineae rectae, ex ipso mo initio I tanquam radii emissae, invenire curvas secan simpliciores saltem, quarum arcus inter binos radios qu vis intercepti aequalibus temporibus percurrantur.*

Solutio.

§. 12. Sit igitur IM talis radius quicunque, et posita absc $IP = x$, applicata $PM = y$, aequatio omnes has lineas secantes se complectens erit $y = cx$; ubi scilicet c locum tenet param variabilis. Cum igitur hinc sit $c = \frac{y}{x}$, tempus descensus per c vam secandam IM aequari debebit functioni cuicunque ipsius haecque aequatio omnes plane curvas secandas in se continebit.

§. 113. Ponamus nunc $y = ux$, et cum posuerimus $\partial y = p\partial x$, hinc sequitur fore $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p - u}$. Denotante jam v functionem quamcunque ipsius u, aequatio generalis pro omnibus curvis secandis erit $\int \frac{\partial x \sqrt{1+pp}}{\sqrt{x}} = \int v \partial u$, ideoque $\frac{\partial x \sqrt{1+pp}}{\sqrt{x}} = v \partial u$. Nunc loco ∂x scribatur valor $\frac{x \partial u}{p - u}$, orieturque haec aequatio finita:

$$\sqrt{x(1+pp)} = v(p - u).$$

§. 114. Sumantur nunc differentialia logarithmorum, ut loco $\frac{\partial x}{x}$ scribi possit $\frac{\partial u}{p - u}$, atque obtinebitur ista aequatio:

$$\frac{\partial u}{p-u} + \frac{2p\partial p}{1+pp} = \frac{2\partial v}{v} + \frac{2(\partial p - \partial u)}{p - u}, \text{ sive } \frac{3\partial u}{p-u} - \frac{2\partial v}{v} = \frac{2\partial p(1+pu)}{(p-u)(1+pp)},$$

ubi quidem variabiles p et u non parum sunt permixtae. Verum in talibus formulis haec substitutio $p = \frac{t+u}{1-tu}$ optimo successu adhiberi potest; hinc enim fit $p - u = \frac{t(1+uu)}{1-tu}$ et $1 + pu = \frac{1+uu}{1-tu}$, ita ut $\frac{1+pu}{p-u} = \frac{1}{t}$. Deinde vero erit $1 + pp = \frac{(1+tt)(1+uu)}{(1-tu)^2}$ et $\partial p = \frac{\partial t(1+uu) + \partial u(1+tt)}{(1-tu)^2}$, ex quo derivatur $\frac{\partial p}{1+pp} = \frac{\partial t}{1+tt} + \frac{\partial u}{1+uu}$.

§. 115. Facta ergo hac substitutione aequatio nostra induet hanc formam:

$$\frac{3(1-tu)\partial u}{t(1+uu)} - \frac{2\partial v}{v} = \frac{2\partial t}{t(1+tt)} + \frac{2\partial u}{t(1+uu)}.$$

Resolvatur jam primum hujus aequationis membrum in suas partes $\frac{3\partial u}{t(1+uu)} - \frac{3u\partial u}{1+uu}$, atque evidens est, si fiat $\frac{2\partial v}{v} + \frac{3u\partial u}{1+uu} = 0$, unde fit $v = \frac{b}{(1+uu)^{\frac{3}{4}}}$, reliqua membra aequationis per t multiplicata praebere $\frac{\partial u}{1+uu} = \frac{2\partial t}{1+tt}$, cujus integrale est:

$$\text{Arc. tag. } u + \text{Arc. tag. } \alpha = 2 \text{ Arc. tag. } t = \text{A tag. } \frac{2t}{1-tt}.$$

§. 116. Quo jam haec solutio clarior reddatur ponatur A tag. $u = \Phi$, ut sit $u = \text{tag. } \Phi$, atque nunc habebimus $\frac{2t}{1-tt} = \text{tag.}(\Phi + \alpha)$;

unde deducitur $t = \frac{1 - \cos.(\Phi + \alpha)}{\sin.(\Phi + \alpha)}$, quo valore invento, regredien ad valores praecedentes, sine ulteriori integratione omnes curvas se candas determinare licebit, siquidem constans α vicem gerit pa metri variabilis.

§. 17. Initio invenimus $\sqrt{x} = \frac{v(p-u)}{\sqrt{1+pp}}$, quae aequatio, in troducta littera t, in hanc abit: $\sqrt{x} = \frac{vt\sqrt{1+uu}}{\sqrt{1+tt}}$. Quare cum s $v = \frac{b}{(1+uu)^{\frac{3}{4}}}$, fiet $\sqrt{x} = \frac{bt}{\sqrt{1+tt}\sqrt[4]{(1+uu)}}$, et loco u posito tag. hic valor erit $\sqrt{x} = \frac{bt}{\sqrt{1+tt}\sqrt{\frac{1}{\cos.\Phi}}} = \frac{bt\sqrt{\cos.\Phi}}{\sqrt{(1+tt)}}$. Tandem etia pro t valor inventus substituatur, quo facto habebimus

$$\sqrt{x} = b\sqrt{\frac{\cos.\Phi(1 - \cos.(\Phi + \alpha))}{2}}.$$

Ponatur $\frac{b}{\sqrt{2}} = f$, sumtisque quadratis colligitur

$$x = f\cos.\Phi(1 - \cos.(\Phi + \alpha)), \text{ hincque}$$
$$y = xu = x\,\text{tag}.\Phi = f\sin.\Phi(1 - \cos.(\Phi + \alpha)).$$

§. 18. Cum igitur sit tag. $\Phi = u = \frac{y}{x}$, patet Φ exprim angulum PIM; unde si ponatur chorda IM $= z$ erit

$$z = f(1 - \cos.(\Phi + \alpha)),$$

unde manifestum est, omnes curvas ex variabilitate anguli α or aliter a se invicem non differre, nisi quod eadem curva IM ci punctum I convertatur, tum enim in quolibet situ dabit omnes c vas secandas, quae ergo omnes facile describentur, si modo u curva, veluti pro casu $\alpha = 0$, fuerit constructa, pro qua ergo c habeamus inter angulum PIM $= \Phi$ et rectam IM $= z$ aequation $f(1 - \cos.\Phi) = z$, haud difficulter perspicietur hanc curvam e *Epicycloidem* ex revolutione circuli super alio sibi aequali nat quippe cujus cuspis in ipsum punctum I incidit, quae ergo cu circa punctum I promota, in quolibet situ exhibebit unam curvarum secandarum.

§. 19. Plurimum etiam ostendisse juvabit hanc ipsam aequationem $z = f(1 - \cos.(\Phi + \alpha))$ conditionibus problematis perfecte satisfacere. Quaeratur primo elementum curvae, quod est $\sqrt{\partial z^2 + zz\partial\Phi^2}$, et cum sit $\partial z = f\partial\Phi \sin.(\Phi + \alpha)$, erit

$$\partial z^2 + zz\,\partial\Phi^2 = 2ff\partial\,\Phi^2\,(1 - \cos.(\Phi + \alpha))$$

atque elementum curvae erit $f\partial\Phi\sqrt{2(1 - \cos.(\Phi + \alpha))}$, quod per celeritatem $\sqrt{x} = \sqrt{z}\cos.\Phi = \sqrt{f}\cos.\Phi\,(1 - \cos.(\Phi + \alpha))$ divisum dabit elementum temporis $\frac{\partial\Phi\sqrt{2f}}{\sqrt{\cos.\Phi}}$, unde cum parameter variabilis z ex calculo sponte excesserit, patet omnia tempora a quovis angulo Φ ad quemvis alium extensa aequalia inter se esse futura. Tales curvas figura adjecta exhibet. Tab. II. Fig. 3.

Eadem solutio ita brevissime eruitur:

§. 20. Quia methodus nostra generalis non tantum ad coordinatas orthogonales, sed etiam ad obliquangulas, atque adeo ad binas alias variabiles, quibus curvae determinari solent, extendi potest, utamur hic distantia $IM = z$, cum angulo $PIM = \Phi$, eritque pro lineis secantibus $\Phi = c$, unde cum sit $c = \Phi$, tempus descensus, quod est $\int\frac{\sqrt{\partial z^2 + zz\partial\Phi^2}}{\sqrt{z\cos.\Phi}}$, functioni cuicunque ipsius Φ aequari debet. Sumatur ergo $\int\partial\Phi\sqrt{\frac{2b}{\cos.\Phi}}$ pro hac functione, ut obtineamus hanc aequationem $\frac{\sqrt{\partial z^2 + zz\partial\Phi^2}}{\sqrt{z\cos.\Phi}} = \partial\Phi\sqrt{\frac{2b}{\cos.\Phi}}$, unde prodit $\partial\Phi = \frac{\partial z}{\sqrt{2bz - zz}}$, cujus integrale est $\Phi + \alpha = \text{A}\,\sin.\text{vers}\,\frac{z}{b}$, ideoque $\Phi + \alpha = \text{A}.\cos.\frac{b - z}{b}$, unde sequitur $\cos.(\Phi + \alpha) = \frac{b - z}{b}$, consequenter

$$z = b(1 - \cos.(\Phi + \alpha)).$$

Problema II.

Si lineae secantes fuerint circuli IMC, horizontalem IB in I tangentes, invenire lineas secandas simpliciores, quarum Tab. II. Fig. 4.

*portiones inter binos quosque horum circulorum inter-
ptae aequalibus temporibus percurrantur, descensus ini-
semper in puncto I constituto.*

Solutio.

§. 21. Vocentur iterum coordinatae $IP = x$, $PM = y$, ac denotan- c diametrum IC singulorum horum circulorum habebimus $xx + yy = c$ unde sequitur fore $c = \frac{xx+yy}{x}$, cujus ergo cuipiam functioni tempo- descensus $\int \frac{\partial x \sqrt{1+pp}}{\sqrt{x}}$ aequari debebunt. Quo hoc facilius fieri pos- sit ponamus $y = ux$, atque ob $\partial y = p\partial x$ erit $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p-u}$. Nun- igitur erit $c = x(1+uu)$; quamobrem tempus descensus statu- mus $= \frac{2}{n}\sqrt{x(1+uu)}$, et per differentiationem impetramus

$$\frac{n\partial x\sqrt{1+pp}}{\sqrt{x}} = \frac{\partial x(1+uu)+2xu\partial u}{\sqrt{x(1+uu)}}$$

ubi si loco ∂x scribamus $\frac{xdu}{p-u}$, perveniemus ad hanc aequationem

$$n\sqrt{1+pp} = \sqrt{1+uu} + \frac{2u(p-u)}{\sqrt{1+uu}}.$$

§. 22. Sumamus $n = 1$, quandoquidem hoc casu statim so- lutio se offert simplicissima. Manifesto enim satisfacit $p = u$, un- cum sit $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p-u}$, necesse est ut u sit constans $= a$, ita ut h- beamus $y = ax$, quae aequatio sumto a variabili complectitur om- lineas rectas ex puncto I eductas, quae cum futurae sint chordae c- jusque circuli, manuducunt ad notissimam proprietatem, qua in om- circulo tempora descensus per omnes chordas sunt inter se aequal-

§. 23. Quia autem iste casus tantum est integrale parti- lare nostrae aequationis, praeter illas chordas exhiberi quoque po- nunt lineae curvae pari proprietate praeditae, ad quas inveniend- utamur iterum hac substitutione $p = \frac{t+u}{1-tu}$, unde fit

$$\sqrt{1+pp} = \frac{\sqrt{(1+tt)(1+uu)}}{1-tu} \quad \text{et} \quad p-u = \frac{t(1+uu)}{1-tu}$$

ideoque nostra aequatio hanc induet formam: $\sqrt{1+tt} = 1 + tu$, quae sumtis quadratis praebet $t = \frac{2u}{1-uu}$, ubi quia per t dividere licuit, etiam $t = 0$ dat solutionem, unde fit $p = u$, qui est ipse casus jam supra observatus. Curvas igitur praeterea satisfacientes ex hoc valore $t = \frac{2u}{1-uu}$ erui oportet, qui cum det $p = \frac{3u-u^3}{1-3uu}$, notatu maxime dignum est, quod posito $u = \text{tag.}\,\Phi$ prodierit $t = \text{tag.}\,2\Phi$ et $p = \text{tag.}\,3\Phi$, ubi Φ est angulus quo chorda IM ad axem IB inclinatur, et quia $p = \frac{\partial y}{\partial x}$, angulus, quem tangens curvae IM in M cum verticali facit, erit 3Φ, quae est insignis proprietas curvarum quas invenimus. Tab. II. Fig. 5.

§. 24. Ad has autem penitus evolvendas cum sit $p - u = \frac{2u(1+uu)}{1-3uu}$, habebimus $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u(1-3uu)}{2u(1+uu)}$, quae hoc modo repraesentetur: $\frac{2\partial x}{x} = \frac{\partial u}{u} - \frac{4u\partial u}{1+uu}$, cujus integrale est $2lx = lu - 2l(1+uu) + 2la$; unde deducitur haec aequatio algebraica $xx = \frac{aau}{(1+uu)^2}$, quae ob $u = \frac{y}{x}$ praebet hanc aequationem biquadraticam: $(xx+yy)^2 = aaxy$, ideoque pro linea quarti ordinis. Simul vero in hac aequatione, ob parametrum a variabilem, infinitae curvae secandae continentur, quae omnes hac insigni gaudent proprietate, quod tempus descensus per arcum quemcunque IM semper aequale sit tempori descensus per ejus chordam IM.

§. 25. Ad figuram hujus curvae explorandam introducamus angulum BIM $= \Phi$, ponamusque IM $= z$, erit $xx(1+uu) = zz$, unde prodit haec aequatio: $zz = aa\,\text{tag.}\,\Phi\,\cos.\,\Phi^2 = \frac{1}{2}aa\,\sin.\,2\Phi$. Unde patet distantiam z evanescere tam casu $\Phi = 0$ quam casu $\Phi = 90°$, maxima autem fiet haec distantia z, quando $\Phi = 45°$; tum enim fit $z = \frac{a}{\sqrt{2}}$, atque haec ipsa maxima distantia simul erit diameter. Tota scilicet curva formam habebit in figura exhibitam, nimirum foliis duobus IM, IM′ praeditam. Dum autem parameter Fig. 6.

a augetur vel diminuitur infinitae tales curvae describi poterunt t ampliores quam arctiores, quae omnes praescriptam habebunt p prietatem, ut earum portiones, inter binos quosvis circulos rect IB in I tangentes interceptae, aequalibus temporibus percurrant atque adeo iisdem, quibus chordae absolvuntur.

Ceterum curva jam dudum propter alias proprietates maxi memorabiles cognita est sub nomine *Lemniscatae.*

Fig. 1

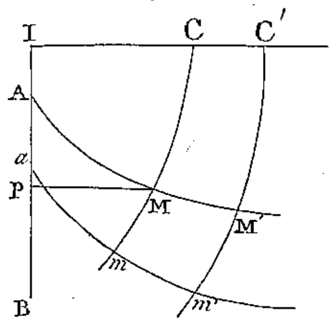

Fig. 2

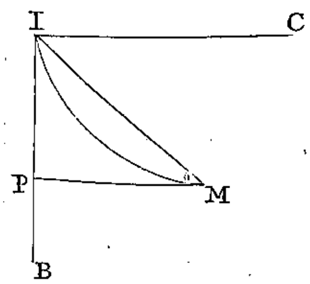

Fig. 3

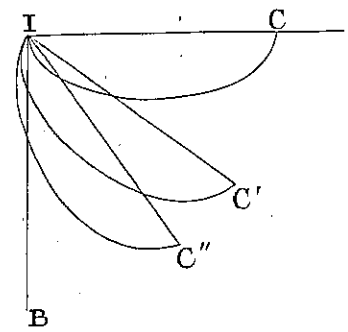

Fig. 4.

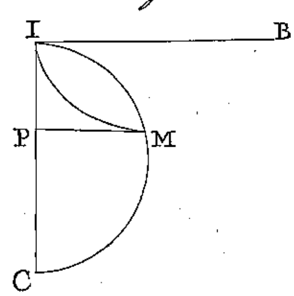

Fig. 5

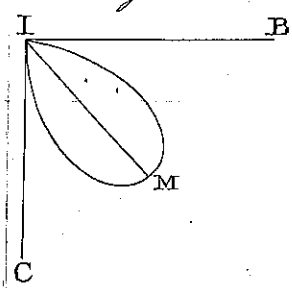

Fig. 6

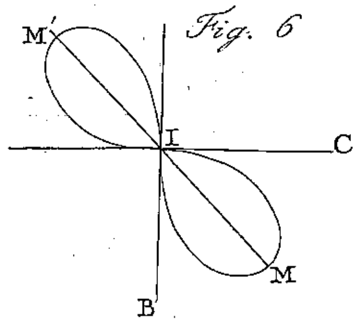

Fig. 7

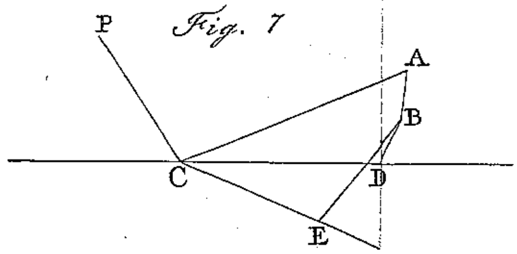

Fig. 8