1824

De problemate curvarum synchronarum, eiusque imprimis inverso

Leonhard Euler

DE PROBLEMATE
CURVARUM SYNCHRONARUM
EJUSQUE IMPRIMIS *INVERSO*.

AUCTORE
L. EULERO.

Conventui exhibuit die 28. Maji 1781.

§. 1. Problema directum jam olim satis copiose est tractatum. Proposita scilicet infinita curvarum multitudine, quae omnes sub certa quadam aequatione inter binas coordinatas et parametrum variabilem contineantur, super quarum singulis corpora ita descendere concipiantur, ut celeritates, ubique sint debitae profunditati infra rectam horizontalem, tales quaerebantur curvae, quae ab illis arcus isochronos sive aequalibus temporibus percursos abscinderent, quae propterea curvae synchronae sunt appellatae. Hoc ipsum igitur problema breviter sum expositurus, quo facilius transitus aperiatur ad ejus problema inversum, quo datis curvis synchronis priores illae curvae sunt investigandae, a quibus arcus eodem tempore percursi abscindantur.

Tab. I. Fig. 1. §. 2. Sit igitur IC recta horizontalis, a cujus distantiis celeritates motus ubique pendeant; tum vero sit IB recta verticalis, in qua initia descensuum fieri statuantur. Sint jam curvae AY et A′Y′ propositae, quarum multitudo infinita est intelligenda quarumque natura exprimatur aequatione quacunque inter binas coordinatas $IX = x$ et $XY = y$ et parametrum variabilem a, ita ut pro qualibet earum parameter constans accipi debeat. Quaecunque autem fuerit ista aequatio inter tres quantitates x, y, et a, assumere licebit inde cujuslibet valorem per binas reliquas definiri posse, ita ut sit y certa quaedam functio ipsarum a et x, x autem functio ipsarum y et a, quin etiam a functio quaepiam ipsarum x et y.

§. 3. Consideremus nunc unam quandam harum curvarum AY, pro qua ergo parameter a erit quantitas constans; et cum y aequetur certae cuipiam functioni ipsarum a et x, ponatur $\partial y = p\partial x$, ut habeamus elementum curvae $Yy = \partial x\sqrt{1+pp}$, quod ergo divisum per celeritatem in hoc loco, quae est ut $\sqrt{y}$, dabit elementum temporis $\frac{\partial x\sqrt{1+pp}}{\sqrt{y}}$, cujus ergo integrale $\int\frac{\partial x\sqrt{1+pp}}{\sqrt{y}}$ quantitati constanti C aequari debet. Quemadmodum autem ex hac aequatione aequatio pro curva arcus isochronos abscindente, quae sit DYY′, erui queat, ante omnia accuratius erit ostendendum. Statim enim patet aequationem illam integralem $\int\frac{\partial x\sqrt{1+pp}}{\sqrt{y}} = C$ neutiquam naturam hujus curvae exprimere, quoniam involvit parametrum a, qui cum sit variabilis, ab eo ipsa curva DYY′ pendere nequit, quandoquidem pro omnibus ejusdem valoribus eadem manere concipitur.

§. 4. Cum autem curva synchrona DYY′ per ipsum punctum Y transeat, eaedem coordinatae X et Y etiam curvae synchronae convenient, unde quia parameter a hinc exturbari debet, hoc obtinebitur, si ejus loco functio illa ipsarum x et y scribatur, quam ex aequatione pro curvis propositis sortitur. Hoc ergo modo orietur aequatio binas tantum variabiles x et y, una cum constante C involvens, quae idcirco erit aequatio naturam curvae synchronae ∂y exprimens; simul vero manifestum est, variata constante C innumerabiles quoque curvas synchronas oriri, quarum ergo respectu haec ipsa littera C erit parameter variabilis.

§. 5. Evidens autem est, substitutionem illam loco parametri a nonnisi post integrationem formulae $\int\frac{\partial x\sqrt{1+pp}}{\sqrt{y}}$ fieri posse, propterea quod in ipsa integratione a pro quantitate constante habetur; quamobrem demum peracta integratione, illam substitutionem instituere licebit, quod ergo negotium nulla laborat difficultate, quoties illam formulam actu integrare licuerit. Hoc autem si non succedat, problema solutu difficillimum evadit, et sub certis tantum conditionibus resolutionem admittit, quemadmodum jam olim est observatum. Quomodo autem hoc negotium expediri queat aliquot exemplis declarasse juvabit.

Tab. I. Fig. 2.

§ 6. Propositae ergo sint infinitae lineae rectae ex ipso puncto I eductae, ac posito $IX = x$, $XY = y$ aequatio $y = ax$ omnes has rectas in se complectetur, dum scilicet litterae a omnes valores successive tribuuntur. Cum igitur sit $\partial y = a\partial x$, erit $p = a$, ac formula integralis pro tempore inventa erit $\int \frac{\partial x \sqrt{1 + aa}}{\sqrt{ax}} = C$, cujus integrale manifesto erit $2\sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{1 + aa}{a}} = C$, sicque facta reductione erit $(1 + aa)\, x = ac$. Jam quia est $a = \frac{y}{x}$, pro curva synchrona prodibit aequatio pro circulo horizontalem IC in ipso puncto I tangente, cujus diameter $= c$. Quamobrem omnes hujusmodi circuli rectam IC in I tangentes a rectis IY, IY′ arcus eodem tempore percursos abscindent, quemadmodum quidem notissimum est.

§ 7. Tales autem casus, quibus formulam temporis integrare licet, rarissime occurrunt. Interim tamen etiam integratione non succedente casus memorabiles exhiberi possunt, quibus hoc problema resolvi potest. Evenit enim hoc semper, quoties aequatio inter x, y, a, fuerit homogenea, ita ut in omnibus terminis aequationis ternae hae litterae junctim sumtae ad eundem dimensionum numerum assurgant; tum autem semper y aequabitur functioni homogeneae unius tantum dimensionis ipsarum x et a. Hanc ob rem posito $x = at$ semper valor ipsius y hujus erit formae: $y = aT$, existente T functione ipsius t tantum; unde quia posuimus $\partial y = p\partial x$, erit etiam $\partial T = p\partial t$ et formula nostra pro tempore erit:

$$\int \frac{a\partial t\sqrt{1+pp}}{\sqrt{aT}} = \sqrt{a}\,.\int \frac{\partial t\sqrt{1+pp}}{\sqrt{T}}.$$

Quod si jam ponatur $\int \frac{\partial t\sqrt{1+pp}}{\sqrt{T}} = \Theta$, erit Θ certa quaedam functio ipsius t tantum, quam quovis casu per quadraturas construere licebit.

§. 8. Inventa igitur ista functione Θ habebimus pro synchronismo hanc aequationem: $\Theta\sqrt{a} = C$, et nunc a etiam aequabitur functioni cuipiam unius dimensionis ipsarum x et y. At vero ne opus quidem est ex ipsa aequatione principali inter x, y et a proposita hunc valorem eruere. Cum enim ex ultima formula sit $\sqrt{a} = \frac{C}{\Theta}$, erit $a = \frac{CC}{\Theta\Theta}$, qua ergo formula littera a ex calculo eliminabitur. Habebimus enim $x = \frac{CC}{\Theta\Theta}t$ et $y = \frac{CC}{\Theta\Theta}T$, ita ut hoc modo pro curvis synchronis binae coordinatae x et y per eandem novam variabilem T exprimantur, cujus scilicet functiones cognitae erunt T et Θ, tum vero, variata constante C, simul obtinebuntur innumerabiles synchronae.

§. 9. Hic autem plurimum observasse juvabit non opus esse ut aequatio inter x, y, et a proposita sit algebraica, sed etiam utcunque transcendens esse potest, dummodo pro formula $\frac{\partial x}{\partial y} = p$ prodeat functio nullius dimensionis ipsarum a et x, ita ut posito $x = at$ littera p aequetur functioni ipsius t tantum; tum igitur ob $\partial x = a\partial t$ habebitur $\partial y = ap\partial t$ et in integratione $y = a\int p\partial t$ pro constante adjicienda ipse parameter a ejusve multiplum accipi debet, ut scilicet y aequetur functioni unius dimensionis ipsarum a et x. Deinde etiam notari meretur omnes curvas in tali aequatione homogenea inter x, y et a inter se similes esse, ita ut unica inventa reliquae omnes inde formari queant, dum scilicet binae variabiles x et y secundum easdem rationes augentur vel minuuntur.

§. 10. Quin etiam ambas variabiles x et y inter se permutare licet, unde facta superiore substitutione littera t tanquam functio ipsius T spectari poterit, hocque modo saepius calculus facilior reddi poterit. Veluti si pro curvis propositis oriatur haec aequatio integralis: $x = \int \frac{y^n \partial y}{\sqrt{(a^{2n} - y^{2n})}}$, erit elementum curvae $\partial s = \frac{a^n \partial y}{\sqrt{(a^{2n} - y^{2n})}}$, ita ut jam elementum temporis sit $\frac{a^n \partial y}{\sqrt{y(a^{2n} - y^{2n})}}$. Hinc ergo posito $y = at$, primo fiet $x = a \int \frac{t^n \partial t}{\sqrt{1 - t^{2n}}}$ et formula integralis pro tempore erit $\sqrt{a} \int \frac{\partial t}{\sqrt{t(1 - t^{2n})}}$, quod integrale si designetur per Θ, ut esse debeat $\Theta \sqrt{a} = C$, habebimus $a = \frac{C^2}{\Theta^2}$ et jam ambae variabiles per hanc novam t exprimentur.

§. 11. His praemissis aggrediamur problema synchronarum inversum, quo datis lineis synchronis eae curvae quaeruntur, quarum portiones eodem tempore descriptae a singulis synchronis rescindantur. Ac primo quidem incipiamus a casu facillimo, quo omnes synchronae sint rectae horizontales, cujusmodi sunt DY, D′Y′, parallelae axi IC; ejusmodi igitur curvae AYY′ requiruntur, super quibus corpora simul descendentia eodem tempore ad singulas has lineas horizontales pertingant. Statim autem evidens est, hoc esse eventurum, si tempus descensus per quemvis arcum AY aequetur functioni cuicunque applicatae $XY = y$. Deinde vero etiam inter binas quasvis synchronas DY et D′Y′ portiones eodem tempore descriptae continebuntur.

Fig. 3.

§. 12. Quod si jam, ut ante, pro curvis inveniendis inter coordinatas $IX = x$ et $XY = y$ statuamus hanc relationem: $\partial y = p \partial x$, tota res huc redit, ut formula integralis $\int \frac{\partial x \sqrt{1 + pp}}{\sqrt{y}}$ functioni cuicunque ipsius y aequalis statuatur. Quare ut in hac aequatione tantum duae variabiles y et p occurrant, loco x scribatur $\frac{\partial y}{p}$, ut habeamus $\int \frac{\partial y \sqrt{1 + pp}}{p \sqrt{y}} = \Gamma : y$; atque differentiando more jam recepto fiet $\frac{\sqrt{1 + pp}}{p \sqrt{y}} = \Gamma : y$; unde patet quaesito satisfieri, si loco p functio quaecunque ipsius y accipiatur, et quia hinc fit $\partial x = \frac{\partial y}{p}$, erit $x = c + \int \frac{\partial y}{p}$, ubi littera c denotabit parametrum variabilem pro omnibus curvis quaesitis; unde manifestum est pro AYY′ curvam quamcunque pro lubitu accipi posse, quippe quae, horizontaliter promota, simul producet omnes infinitas curvas quaesitas.

§. 13. Progrediamur ad quaestionem magis arduam, qua lineae synchronae sint rectae verticales IB, XY, X Y′, hancque quaestionem in sequente problemate complectamur. Tab. I. Fig. 4.

Problema I.

Invenire omnes curvas AYY′, super quibus corpora ita descendere concipiantur, ut celeritates in singulis punctis Y sint ut radices quadratae ex profunditate XY infra axem horizontalem IC, qui autem motus ita sint comparati, ut corpora aequalibus temporibus a recta verticali fixa IB ad quamlibet aliam verticalem XY vel X Y′ perveniant.

Solutio.

§. 14. Positis igitur $IX = x$, $XY = y$ et $\partial y = p\partial x$ requisitae conditioni satisfiet, si expressio temporis $\int \frac{\partial x \sqrt{1+pp}}{\sqrt{y}}$ aequalis statuatur functioni cuicunque abscissae $IX = x$, ita ut sit

$$\int \frac{\partial x \sqrt{1+pp}}{\sqrt{y}} = \Gamma : x,$$

unde differentiando oritur $\frac{\sqrt{1+pp}}{\sqrt{y}} = \Gamma' : x$, quae aequatio cum ternas contineat variabiles x, y et p, unam ante omnia eliminari oportet. Hunc in finem loco $\Gamma' : x$ ponamus $\sqrt{X}$, ut fiat $y = \frac{1+pp}{X}$; unde differentiando et $p\partial x$ loco ∂y scribendo statim elicitur aequatio duas tantum variabiles x et p involvens, quae erit

$$p\partial x = \frac{2p\partial p}{X} - \frac{(1+pp)\partial X}{X^2}.$$

Veruntamen haec aequatio ita est comparata ut paucissimis tantum casibus resolvi queat. Nullus enim modus adhuc est inventus aequationes hujus formae: $p\partial x = Pp\partial p + Rpp\partial x + S\partial x$ resolvendi, ubi Q, R, S sint functiones ipsius x; atque adeo duo tantum casus occurrunt, quibus resolutio succedit: alter quo $\Gamma : x = \alpha x$, alter vero quo $\Gamma : x = \beta \surd x$, quos seorsim evolvere operae erit pretium.

Casus prior, quo $\int \frac{\partial x \sqrt{1+pp}}{\sqrt{y}} = \frac{x}{\sqrt{b}}$.

§. 15. Hoc igitur casu eae curvae quaeruntur, super quibus corpus secundum horizontem uniformiter promovetur, quae proprietas in Projectorias competit, quando scilicet corpora libere utcunque projiciuntur, id quod etiam calculus noster ostendet. Differentiatione enim facta erit $y = b(1 + pp)$, ideoque $p = \frac{\sqrt{y - b}}{\sqrt{b}} = \frac{\partial y}{\partial x}$, sicque $\partial x = \frac{\partial y \sqrt{b}}{\sqrt{y - b}}$ et integrando $x = a + 2\sqrt{b(y - b)}$, quae est aequatio pro parabola cujus focus incidit in axem IC, ubi jam a est parameter variabilis, ita ut omnes curvae sint eadem parabola horizontaliter promota.

Casus alter, quo $\int \frac{\partial x \sqrt{1+pp}}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{\alpha x}$.

§. 16. Differentiatio hic dat $\frac{\sqrt{1+pp}}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha x}}$, ita ut sit $y = \alpha x(1 + pp)$, hincque $\partial y = p\partial x = \alpha \partial x(1 + pp) + 2\alpha x p \partial p$, unde separando fiet $\frac{\partial x}{x} = -\frac{2\alpha p \partial p}{\alpha - p + \alpha pp}$, cui aequationi haec forma tribuatur: $\frac{\partial x}{x} = -\frac{2p\partial p}{1 - 2pp + pp}$, quae tres casus diversos involvit, prouti fuerit vel $n = 1$, vel $n > 1$, vel $n < 1$.

Casus I. §. 17. Sit primo $n = 1$, eritque $\frac{\partial x}{x} = -\frac{2p\partial p}{(1-p)^2}$, sive $\frac{\partial x}{x} = \frac{2\partial p}{1-p} - \frac{2\partial p}{(1-p)^2}$, cujus integrale est $lx = -2l(1-p) - \frac{2}{1-p} + lc$. Sit brevitatis gratia $\frac{1}{1-p} = q$, ut fiat $lx = lc + 2lq - 2q$, unde ad numeros progrediendo erit $x = cqqe^{-2q}$. Quia igitur loco $\frac{1}{\alpha}$ scripsimus $2n$, erit $\alpha = \frac{1}{2}$, ideoque $y = \frac{c(2qq - 2q + 1)e^{-2q}}{2}$, ubi constans per integrationem ingressa praebet parametrum variabilem pro omnibus curvis quaesitis. Quare si pro c scribamus $2a$, erit

$$y = a(2qq - 2q + 1)e^{-2q} \text{ et } x = 2aqqe^{-2q},$$

quae curvae infinitae omnes inter sunt sunt similes centro similitudinis in puncto I existente.

§. 18. Ut nunc figuram harum curvarum perscrutemur, primo patet, abscissam x nunquam negativam fieri posse. Incipiamus ergo a casu $x = 0$, sive $q = 0$, ideoque $p = -\infty$; tum vero fit $y = a$. Curva igitur verticalem IA tanget, sursum ascendens, donec fiat $p = 0$, ideoque $q = 1$. Hoc ergo loco erit abscissa $x = \frac{2a}{ee}$ et applicata $y = \frac{a}{ee}$. Ab hoc loco curva descendet, ob $p > 0$, idque in infinitum, ubi fiet $p = 1$ et $q = \infty$, vel potius $q = -\infty$, quo casu fiet $y = x$ et curva abibit in rectam sub angulo semirecto ad horizontem inclinatam, secundam hanc figuram, ubi IA $= a$. Tab. I. Fig. 5.

§. 19. Ex cognita autem unica curva pro certo valore parametri a facile innumerabiles aliae huic similes construentur, dum ipsi a sive majores sive minores valores tribuuntur. At si a prorsus evanescat, tota portio curvae finita in puncto A conglomerabitur, infinitesima vero portio dabit rectam IL cum horizonte angulam semirectum constituentem. Super omnibus his infinitis lineis corpora promota simul ad singulas verticales pervenient.

§. 20. Quia posuimus $a = \frac{1}{2nr^{\nu}}$, tempus descensus hoc casu, quo $n < 1$, erit $2\sqrt{2nx}$ et $y = \frac{x(1+pp)}{2n}$; tum vero pro x habebimus hanc aequationem: $\frac{\partial x}{x} = -\frac{2p\partial p}{1-2np+pp}$, unde statim fit Casus II.

$$lx = -l(1 - 2np + pp) - 2n\int\frac{\partial p}{1-2np+pp}.$$

Quia nunc assumimus $n < 1$, ponamus $n = \cos.\nu$, et constat fore $\int\frac{\partial p}{1-2p\cos.\nu+pp} = \frac{1}{\sin.\nu}\text{A tg.}\frac{p\sin.\nu}{1-p\cos.\nu}$ consequenter erit

$$lx(1 - 2p\cos.\nu + pp) = C - \frac{2}{\text{tag.}\nu}\text{A tg.}\frac{p\sin.\nu}{1-p\cos.\nu}.$$

§. 21. Introducamus nunc angulum Φ, ut sit $\Phi = \text{A tag.} \frac{p \sin. \nu}{1 - p \cos. \nu}$, ideoque $\frac{p \sin. \nu}{1 - p \cos. \nu} = \text{tag.}\ \Phi$, unde vicissim colligitur

$$p = \frac{\text{tag.}\ \Phi}{\sin \nu + \cos. \nu \,\text{tag}\ \Phi} = \frac{\sin. \Phi}{\sin. (\nu + \Phi)},$$

quem ergo valorem loco p in calculum introducamus. Hinc ergo habebimus $1 + pp = \frac{\sin. \Phi^2 + \sin. (\nu + \Phi)^2}{\sin. (\nu + \Phi)^2}$ et

$$1 - 2p \cos. \nu + pp = \frac{\sin \Phi^2 - 2 \cos. \nu \sin. \Phi \sin. (\Phi + \nu) + \sin. (\nu + \Phi)^2}{\sin (\nu + \Phi)^2}$$

cujus numerator reducitur simpliciter ad $\sin. \nu^2$, quod cum ex ipsa forma non nisi operose deduci queat, hoc modo facillime ostenditur. Fig. 6. Consideretur triangulum abc, in quo sit angulus $bac = \nu$ et $abc = \Phi$, eritque angulus $acd = \nu + \Phi$, quorum sinibus cum latera sint proportionalia, statuatur $ab = m \sin. (\nu + \Phi)$ et $ac = m \sin. \Phi$ et $bc = m \sin. \nu$. At vero ex lateribus ab et ac cum angulo intercepto ν colligitur

$$bc^2 = mm \sin. \Phi^2 - 2mm \sin. \Phi \sin. (\nu + \Phi) \cos. \nu + mm \sin. (\nu + \Phi)^2$$
$$= mm \sin. \nu^2.$$

§. 22. His jam valoribus introductis erit

$$l x \left(\frac{\sin. \nu}{\sin. (\nu + \Phi)}\right)^2 = C - \frac{2}{\text{tag.}\ \nu} \Phi,$$

hincque ad numeros progrediendo

$$x = \frac{a \sin. (\nu + \Phi)^2}{\sin. \nu^2} e^{-\frac{2 \Phi}{\text{tag.}\ \nu}},$$

tum vero applicata erit

$$y = \frac{a (\sin. \Phi^2 + \sin. (\nu + \Phi)^2)}{2 \cos. \nu \sin. \nu^2} e^{-\frac{2\Phi}{\text{tag.}\ \nu}}.$$

Quae formulae, sumto parametro a variabili, suppeditant innumerabiles curvas satisfacientes.

§. 23. Hic iterum manifestum est, abscissam x nunquam negativam fieri posse; evanescet autem sumto $\Phi = -\nu$, quo casu fit $y = \frac{a}{2 \cos. \nu} e^{\frac{2 \nu}{\text{tag.}\ \nu}}$, tum vero $p = \infty$, ideoque curva iterum verticalem in a tanget et ut casu praecedente curva ascendet, donec fiat $p = 0$, hoc est $\Phi = 0$. Hoc ergo loco fiet $x = a$ et $y = \frac{a}{2\cos.\nu}$. Quo usque autem angulus Φ increscet, tam abscissa quam applicata non ultra certum limitem excrescent. Posito enim $\Phi = \infty$ tam x quam y iterum evanescunt. Ceterum hoc casu nulla dabitur linea recta ex initio I descendens, super qua corpus eodem tempore ad singulas verticales perveniret.

§. 24. Plenior autem hujus casus evolutio maximis premitur difficultatibus. Cum enim corpora super his curvis secundum horizontem motu uniformiter accelerato progredi debeant, hinc necessario sequi videtur, has curvas in infinitum extendi debere, cum tamen per nostras formulas semper in spatium finitum redigantur, nisi angulus Φ negative accipiatur; tum enim, eo in infinitum aucto, formula $e^{-2\Phi} \cot.\nu$ utique in valorem infinitum excrescit. Interim tamen, dum iste arcus ulterius per totam peripheriam circuli augetur, interea sinus anguli $\Phi + \nu$ bis in nihilum abit, ideoque abscissa x quam continuo in infinitum extendere volebamus, bis adeo evanescet, quae omnia quamvis maxime inter se pugnare videantur, tamen egregie cum veritate conciliari possunt, quemadmodum in peculiari dissertatione sum ostensurus.

§. 25. Sit $n > 1$ et cum $\frac{\partial x}{x} = -\frac{2p\,\partial p}{1 - 2np + pp}$ et $y = \frac{x(1 + pp)}{2n}$, **Casus III.**
formula $1 - 2np + pp$ semper habebit duos factores reales, qui sint $p - \alpha$ et $p - \beta$, atque requiritur ut sit $\alpha\beta = 1$ et $\alpha + \beta = 2n$. unde fit $\alpha = n + \sqrt{nn - 1}$ et $\beta = n - \sqrt{nn - 1}$. Cum igitur sit $\frac{\partial x}{x} = -\frac{2p\,\partial p}{(p - \alpha)(p - \beta)}$, hinc statim duos casus satisfacientes eruere licet. Quoniam enim $\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{(p - \alpha)(p - \beta)}{2px}$, huic aequationi satisfacit tam $p = \alpha$, quam $p = \beta$, unde deducimus has duas solutiones particulares: 1°) $y = \frac{1 + \alpha\alpha}{2n}x$; 2°) $y = \frac{1 + \beta\beta}{2n}x$, quae praebent duas rectas ad horizontem inclinatas, pro quarum altera si sumamus $y = \mu x$ et pro altera $y = \nu x$, erit $\mu\nu = \frac{(1 + \alpha\alpha)(1 + \beta\beta)}{4nn} = 1$,

ita ut angulorum, sub quibus hae duae rectae ad horizontem inclinantur, alter alterius sit complementum ad rectum. Erit autem $\mu = n + \sqrt{nn-1}$ et $\nu = n - \sqrt{nn-1}$; scilicet $\mu = \alpha$ et $\nu = \beta$.

§. 26. Quatenus autem est $\frac{\partial x}{x} = -\frac{-2p\,\partial p}{1-2np+pp}$, erit ex parte integrando $lx(1-2np+pp) = -2n\int\frac{\partial p}{(p-\alpha)(p-\beta)}$. Haec vero formula differentialis $\frac{2n\,\partial p}{(p-\alpha)(p-\beta)}$, resolvitur in has partes:

$$\frac{2n}{\beta-\alpha}\cdot\frac{\partial p}{p-\alpha} - \frac{2n}{\beta-\alpha}\cdot\frac{\partial p}{p-\beta};$$

unde ejus integrale erit $\frac{2n}{\beta-\alpha}\,l\,\frac{p-\alpha}{p-\beta}$, sive $\frac{2n}{\alpha-\beta}\,l\,\frac{p-\beta}{p-\alpha}$. Est vero $\frac{2n}{\alpha-\beta} = \frac{n}{\sqrt{nn-1}}$, cujus loco scribamus λ, ita ut sit $\lambda = \frac{n}{\sqrt{nn-1}}$, ideoque $\lambda > 1$. Nunc igitur ad numeros adscendendo et constantem arbitrariam a introducendo nanciscemur hanc aequationem:

$$x = \frac{a}{(p-\alpha)(p-\beta)}\cdot\left(\frac{p-\beta}{p-\alpha}\right)^{\lambda},$$

existente $\alpha = n + \sqrt{nn-1}$ et $\beta = n - \sqrt{nn-1}$.

§. 27. Praeterea vero hinc erit

$$y = \frac{x(1+pp)}{2n} = \frac{a(1+pp)}{2n(p-\alpha)(p-\beta)}\cdot\left(\frac{p-\beta}{p-\alpha}\right)^{\lambda},$$

atque hae duae formulae pro x et y, siquidem parametrum a variabilem assumamus, infinitas complectitur curvas problemati satisfacientes, quae omnes inter se erunt similes, ita ut constructa una reliquae omnes ex principio similitudinis facillime construi possunt. Manifestum autem est, sumto $p = \beta = n - \sqrt{nn-1}$ fore tam $x = 0$ quam $y = 0$, scilicet pro curvae initio in puncto I constituto. Hinc autem, si p successive augeatur usque ad $p = \alpha = n + \sqrt{nn-1}$, tum ambae coordinatae x et y evadent infinitae, et ramus infinitesimus ad horizontem inclinabitur sub angulo cujus tangens est $\alpha = n + \sqrt{nn-1}$, dum in ipso initio tangens inclinationis erat
Tab. I. Fig. 7. $\beta = n - \sqrt{nn-1}$. Curva igitur habebit formam figura 7 re-

praesentatam. Ceterum patet hunc casum nullas plane difficultates involvere, uti praecedens, sed omnia esse planissima.

Problema II.

Si lineae synchronae omnes fuerint rectae IB, XY, inter se parallelae, atque ad axem horizontalem IC sub angulo quocunque $CIB = \zeta$ inclinatae, invenire curvas AY, super quibus corpus descendens aequalibus temporibus ad quamlibet synchronam XY perveniat, dum scilicet, ut ante, celeritas in Y fuerit debita distantiae hujus loci ab axe AC. Tab. I. Fig. 8.

Solutio.

§. 28. Quo hunc casum facilius ad calculum revocemus, statuamus applicatas XY sub eodem angulo $CXY = \zeta$ ad axem IC inclinatas; unde si ponamus abscissam $IX = x$, applicatam $XY = y$ et $\partial y = p\partial x$, fiet elementum curvae $Yy = \partial x \sqrt{1 + 2p\cos.\zeta + pp}$, unde tempus descensus per arcum AY erit $\int \frac{\partial x \sqrt{1 + 2p\cos\zeta + pp}}{\sqrt{y\sin\zeta}}$, quod cum pro tota synchrona XY debeat esse idem, necesse est ut aequetur functioni cuipiam abscissae $IX = x$, quae sit $= X$. Hinc posito $\partial X = X'\partial x$, habebimus differentiando $\frac{\sqrt{1 + 2p\cos.\zeta + pp}}{\sqrt{y\sin.\zeta}} = X'$, unde fit $y\sin.\zeta = \frac{1 + 2p\cos\zeta + pp}{X'X'}$, quae aequatio si differentietur et loco ∂y scribatur $p\partial x$, emerget aequatio differentialis inter binas tantum variabiles x et p, quae autem praeter duos casus vix ullo modo ad integrabilitatem reduci potest.

§. 29. Quod si motum corporis in singulis punctis resolvamus secundum directiones abscissae et applicatae, hi duo casus sunt quando celeritas horizontalis fuerit vel constans, vel ut radix quadrata ex abscissa IX. Hos ergo duos casus hic evolvamus.

Evolutio casus,

quo celeritas horizontalis est constans.

§. 30. Sit igitur ista celeritas $= \sqrt{c}\,\sin.\zeta$, eritque tempusculum per elementum $\frac{\partial x}{\sqrt{c}\,\sin.\zeta} = \frac{\partial x \sqrt{1 + 2p\cos.\zeta + pp}}{\sqrt{y}\,\sin.\zeta}$, unde oritur

$$y = c\,(1 + 2p\cos.\zeta + pp),$$

ubi brevitatis gratia ponamus $\cos.\zeta = \alpha$, eritque hinc

$$\partial y = p\partial x = 2\alpha c\partial p + 2p\partial p,$$

ideoque $\partial x = 2\alpha c\frac{\partial p}{p} + 2c\partial p$, unde integrando oritur

$$x = a + 2cp + 2\alpha c l p.$$

Unde patet hanc curvam esse transcendentem; neque tamen multum discrepabit a parabola, quam in praecedente problemate invenimus. Haec autem curva horizontaliter promota omnes praebebit curvas quas quaerimus.

Evolutio casus,

quo celeritas horizontalis est ut $\sqrt{x}$, *sive motus horizontalis uniformiter acceleratus.*

§. 31. Ponatur igitur celeritas horizontalis $\frac{\sqrt{x}\,\sin.\zeta}{n}$, eritque elementum temporis $= \frac{\partial x\sqrt{n}}{\sqrt{x}\,\sin.\zeta} = \frac{\partial x\sqrt{1 + 2\alpha p + pp}}{\sqrt{y}\,\sin.\zeta}$, unde colligimus $np\partial x = \partial x(1 + 2\alpha p + pp) + 2x\partial p\,(\alpha + p)$, ideoque

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{-2\partial p\,(\alpha + p)}{1 + (2\alpha - n)p + pp}.$$

§. 32. Ponamus $2\alpha - n = -2m$, ut habeamus hanc aequationem: $\frac{\partial x}{x} = \frac{-2\partial p\,(\alpha + p)}{1 - 2mp + pp}$, ubi etiam tres casus tractari convenit, prout fuerit vel $m > 1$, vel $m = 1$, vel $m < 1$, quorum postremus iterum iisdem difficultatibus implicatur, quas in praecedente problemate offendimus. Quia autem eas in peculiari dissertatione enodare mihi est propositum, non solum casum tertium sed etiam secundum huic investigationi reservabo, quandoquidem etiam tractatio secundi casus supra data emendatione indiget.

§. 33. Contemplemur ergo hic tantum casum quo $m > 1$, sintque factores formulae $1 - 2mp + pp$, $p + f$ et $p - g$, eritque $f + g = 2m$ et $fg = 1$, ideoque $f = m + \sqrt{mm - 1}$ et $g = m - \sqrt{1nm - 1}$, atque ex aequatione $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{(p-f)(p-g)}{2x(\alpha + p)}$ jam duo casus satisfacientes eliciuntur, scilicet $p = f$ et $p = g$, qui duas praebent lineas rectas ex ipso puncto I eductas, pro quarum altera erit $y = fx$ et pro altera $y = gx$.

§. 34. Ponamus igitur alteram harum rectarum $y = fx$ ad axem inclinari sub angulo μ, alteram vero $y = gx$ sub angulo ν, eritque tag. $\mu = \frac{f \sin. \zeta}{1 + \cos. \zeta}$ et tag. $\nu = \frac{g \sin. \zeta}{1 + g \cos \zeta}$, unde collligitur

$$\text{tag.}\,(\mu + \nu) = \frac{(f+g)\sin.\zeta + 2fg\sin\zeta}{1 + (f+g)\cos\zeta + fg\cos.\zeta^2 - fg\sin.\zeta^2}.$$

Cum jam sit $f + g = 2m$ et $fg = 1$, erit

$$\text{tag.}\,(\mu + \nu) = \frac{(2m+2)\sin\zeta}{1 + 2m\cos.\zeta + \cos.\zeta - \sin.\zeta^2},$$

quae formula manifesto reducitur ad tag. $(\mu + \nu) =$ tag. ζ, ita ut summa amborum angulorum $\mu + \nu$ semper aequetur angulo inclinationis ζ.

§. 25. Praeter has autem duas rectas innumerabiles lineae curvae reperiuntur. Cum enim sit $\frac{\partial x}{x} = \frac{-2\partial p(\alpha + p)}{1 - 2mp + pp}$, haec fractio resolvitur in has: $\frac{\partial x}{x} = \frac{-2p\partial p + 2m\partial p}{1 - 2mp + pp} - \frac{2\partial p(\alpha + m)}{1 - 2mp + pp}$, cujus integrale, ob $\alpha + m = \frac{n}{2}$, est $lx = la - l(p - f)(p - g) + \frac{n}{2\sqrt{m^2 - 1}}\, l\frac{p-g}{p-f}$.
Sit nunc brevitatis gratia $\frac{n}{2\sqrt{mm-1}} = \lambda$, eritque

$$x = \frac{a}{(p-f)(p-g)} \cdot \left(\frac{p-g}{p-f}\right)^{\lambda},$$

ubi notasse juvabit exponentem λ semper esse unitate majorem, excepto casu quo angulus ζ recto major evadit. Quare ex his formulis ejusmodi fere curvae nascuntur uti in problemate praecedente, scilicet hae curvae in initio ad axem inclinantur sub minore angulorum μ et ν. Hinc autem tractu satis uniformi in infinitum porrigentur, ubi inclinatio ad axem majori angulorum μ et ν aequabitur.

§. 36. Hoc igitur modo omnes casus expedivimus, quibus lineae synchronae sunt rectae. Quando autem eae debent esse curvae, hinc nulla plane via patere videtur ad problema Synchronarum inversum resolvendum. Tandem tamen, postquam plura de hoc argumento essem meditatus, incidi in methodum non parum elegantem non solum hoc problema sed etiam infinita alia ejusdem generis resolvendi, quam proxima occasione exponere constitui.

Fig. 1.

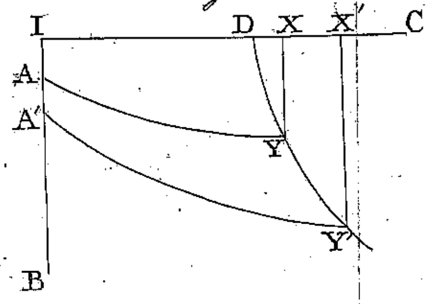

Fig. 2.

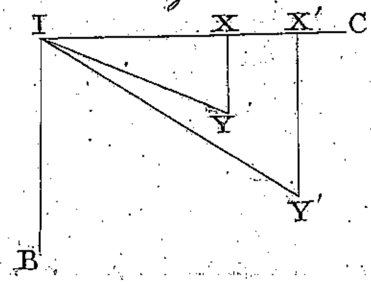

Fig. 3.

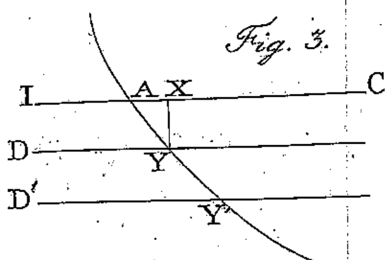

Fig. 4.

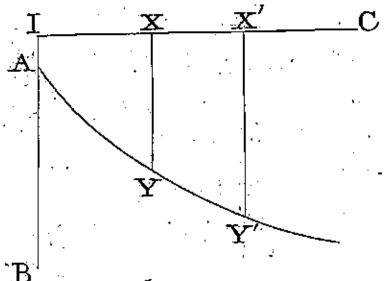

Fig. 5.

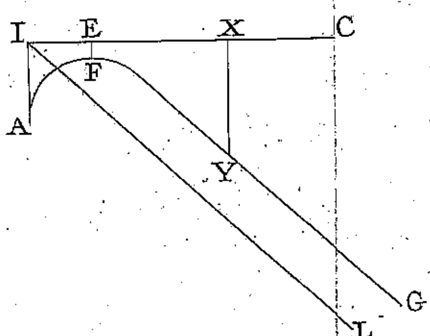

Fig. 6.

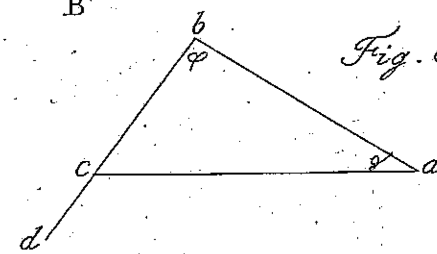

Fig. 7.

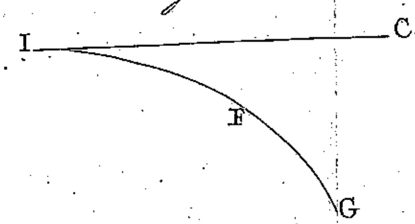

Fig. 8.