



1824

Resolutio facilis quaestionis difficillimae, qua haec formula maxime generalis $vzz(axx+byy)^2 + \Delta xyy(avv+bzz)^2$ ad quadratum reduci postulatur

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Resolutio facilis quaestionis difficillimae, qua haec formula maxime generalis $vzz(axx+byy)^2 + \Delta xyy(avv+bzz)^2$ ad quadratum reduci postulatur" (1824). *Euler Archive - All Works*. 764. <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/764>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

RESOLUTIO FACILIS QUAESTIONIS DIFFICILLIMAE

QUA HAEC FORMULA MAXIME GENERALIS:

$$vvzz(axx + byy)^2 + \Delta xxyy(avv + bzz)^2$$

AD QUADRATUM REDUCI POSTULATUR.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhib. die 12. Junii 1780.

§. 1. Etsi hic quatuor litterae incognitae x, y, z, v occurrunt quae tamen ad duas tantum rationes $x:y$ et $v:z$ revocantur, neutra tamen earum pro cognita assumi potest, cum saepissime reductio ad quadratum fieret impossibilis; quam ob rem tota quaestio huc reducitur, ut ambae istae rationes exquirantur, quibus formula ad quadratum reduci queat; tum vero imprimis omnes plane solutiones requiruntur, quod quomodo fieri sine ambagibus possit in hac dissertatione novo plane modo ostendere constitui. Notandum autem hic est a, b, Δ arbitrio nostro plane esse relictas.

§. 2. Ante omnia autem hic observandum est, nullam plane viam patere, qua quaesito satisfieri queat, nisi litterae v et z ita definiantur, ut formula $avv + bzz$ divisorem involvat formulam $axx + byy$, quod quomodo in genere fieri possit in sequenti Lemma sum ostensurus.

L e m m a.

Invenire valores pro litteris v et z , ut formula $avv + bzz$ divisionem admittat per formulam $axx + byy$.

Solutio:

3. Multiplicetur utraque formula per a , ut utriusque factores simplices sint $av + z\sqrt{-ab}$ et $ax + y\sqrt{-ab}$. Jam ponatur $av + z\sqrt{-ab} = (ax + y\sqrt{-ab})(f + g\sqrt{-ab})$ factaque evolutione partes rationales et irrationales seorsim inter se adduntur, ac pro partibus rationalibus habebimus $av = afx - abgy$ et $z = fx - bgy$. Pro partibus autem irrationalibus fiet $z = fy + agx$. Quamobrem si statuamus $v = fx - bgy$ et $z = fy + agx$, fiet

$$avv + bzz = (ff + abgg)(axx + byy).$$

4. Praemisso hoc lemmate, resolutionem quaestionis propositae sequenti problemate complectamur:

Problema.

Invenire omnes valores litterarum x, y, v, z , quibus haec formula: $vz + \Delta xxyy + (avv + bzz)^2$ evadat quadratum.

Solutio:

5. Vi lemmatis praemissi statuamus $v = fx - bgy$ et $z = fy + agx$, et quoniam nunc formula proposita divisionem per quadratum $(axx + byy)^2$ admittit, supererit ut facta divisione ad quadratum reducatur ista formula:

$$vvz + \Delta xxyy (ff + abgg)^2.$$

Est vero $vz = afgxx + (ff - abgg)xy - bfgyy$, sicque quadratum reddi debet haec expressio:

$(afgxx + (ff - abgg)xy - bfgyy)^2 + \Delta xxyy(ff + abgg)^2$, quae quo simplicior reddatur, dividatur utrinque per quadratum $(ff + abgg)^2$, ac ponatur brev. gr.

$$\frac{afg}{ff + abgg} = A; \quad \frac{bfg}{ff + abgg} = B \quad \text{et} \quad \frac{ff - abgg}{ff + abgg} = C$$

hocque modo quadrato aequanda erit ista formula

$$(Axx + Cxy + Byy)^2 + \Delta xxyy.$$

§. 6. Quo hoc concinnius fieri possit loco Δ scribamur
 $-4mn$, ut istam habeamus formulam :

$$(Axx + Cxy + Byy)^2 - 4mnxxyy = \square$$

quod praestabitur, uti constat, statuendo

$$Axx + Cxy + Byy = \lambda(mpp + nqq) \text{ et } xy = \lambda pq;$$

tum enim formula nostra aequabitur huic quadrato: $\lambda\lambda(mpp - nqq)$.
 Jam nihil impedit quominus statuamus $y = 1$, cum hic tantum ratio
 inter x et y spectetur. Tum igitur erit $x = \lambda pq$ atque altera
 aequatio fiet $A\lambda\lambda ppqq + C\lambda pq + B = \lambda mpp + \lambda nqq$, quae est
 aequatio quadratica tam respectu litterae p quam ipsius q ; ideoque
 pro utraque binos valores simul exhibebit.

§. 7. Ordinemus ergo primo aequationem respectu litterae
 p , quae erit

$$(A\lambda\lambda qq - \lambda m)pp + C\lambda pq + B - \lambda nqq = 0;$$

unde patet, si pro quolibet ipsius q valore binae radices ipsius p sint
 p et p' , fore $p + p' = -\frac{C\lambda q}{A\lambda\lambda qq - \lambda m} = \frac{Cq}{m - A\lambda qq}$. Simili modo
 aequatio respectu litterae q disposita fiet:

$$(A\lambda\lambda pp - \lambda n)qq + C\lambda pq + B - \lambda mpp = 0,$$

ita ut, si pro quolibet p valores ipsius q statuatur q et q' , fiat
 $q + q' = \frac{Cp}{n - A\lambda pp}$. Unde intelligitur, dummodo pro p et q binos
 habeamus valores idoneos, ex iis ope harum formularum innumerabiles
 alios erui posse, quemadmodum jam fusius ostendi.

§. 8. At vero facillime ex ipsa aequatione quadratica tales
 valores elici possunt. Posito enim $p = 0$ fit $qq = \frac{B}{\lambda n}$; quod si ergo
 sumamus $\lambda = Bn$, fiet $q = \frac{1}{n}$, hincque casus solus sufficit, ex quo in
 numerabiles alii erui poterunt. Quamobrem sit ubique $\lambda = Bn$,
 fiat $x = Bnpq$; tum igitur constituamus hanc seriem: $p, q, p', q', p,$
 etc. ubi ergo bini termini initiales erunt $p = 0$ et $q = \frac{1}{n}$, hincque
 per has formulas, ob $\lambda = Bn$, sequentes termini successive ita de-

terminat

quae p
dantur;qui sing
teris / e
bet horu
est comphaec a p
mutatae
venti dal
pro x p
ideoque
valoribus§.
m
n, quia
oportebit
et z =
factum
liceat.

§.

Memo.

terminabuntur:

$$p = \frac{Cq}{m - AB - nqq} - p = \frac{C}{mn - AB}$$

$$q = \frac{Cp}{n - AB - npp} - q = \frac{mnC^2 - (mn - AB)^2}{n(mn - AB)^2 - nABCC}$$

etc.

quae progressio, quando omnes litterae per numeros determinatos dantur, haud difficulter ulterius continuari poterit.

§. 9. Isti valores evoluti pro $x = Bnpq$ sequentes praebent:

$$p = \frac{BC}{mn - AB}, \quad q = \frac{BC(mnC^2 - (mn - AB)^2)}{(mn - AB)^2 - ABC^2(mn - AB)}$$

qui singuli jam innumerabiles solutiones complectuntur, quoniam litteris p et q valores quoscunque tribuere licet. Deinde etiam quilibet horum valorum adhuc alium suppeditat. Nam quia aequatio ita est comparata, ut posito $x = \frac{1}{t}$ abeat in hanc:

$$(A + Ct + Btt)^2 - 4mntt = \square,$$

haec a priore in hoc tantum discrepat, quod litterae A et B sint permutatae, unde facta hac permutatione singuli valores pro x inventi dabunt totidem valores pro t , qui ergo inversi novos valores pro x praebent. Ita cum sit $x = \frac{BC}{mn - AB}$, erit $t = \frac{AC}{mn - AB}$, ideoque novus valor erit $\frac{mn - AB}{AC}$, quod idem de omnibus reliquis valoribus pro x inventis est tenendum.

§. 10. Postquam pro x inventa fuerit fractio quaecunque $\frac{M}{N}$, quia sumpsimus $y = 1$, ut ad numeros integros revertamur capi oportebit $x = M$ et $y = N$, unde porro colligetur $v = fM - bgN$ et $z = fN + agM$. Hoc ergo modo problemati plene erit satisfactum, cum adeo infinities infinitos valores satisfaciens assignare liceat.

E x e m p l u m.

§. 11. Proposita sit haec formula ad quadratum redigenda:

$$vvzz(xx + yy)^2 + xxyy(vv + zz)^2.$$

Hic igitur erit $a = 1$, $b = 1$ et $\Delta = 1 = -4mn$, unde sum-
 poterit $m = \frac{1}{2}$ et $n = -\frac{1}{2}$. Ex his valoribus fiet

$$A = \frac{fg}{ff+gg}; \quad B = \frac{fg}{ff+gg}; \quad C = \frac{ff-gg}{ff+gg}.$$

Hinc ergo valores supra evoluti erunt $0, \frac{v'(ff-gg)}{ff+gg - (ff+gg)^2}$. Suma-
 mus igitur $f = 2$ et $g = 1$, erit $x = \frac{2}{3}$; quomodem ponamus
 $x = 8$ et $y = 3$, fietque $v = 13$ et $z = 14$. Cum igitur sit $vv = 182$
 $xx + yy = 73$, $xy = 24$, $vv + zz = 205 = 5 \cdot 73$, quadratum esse
 debet $182^2 \cdot 73^2 + 24^2 \cdot 5^2 \cdot 73^2$, dividendo ergo per $2^2 \cdot 73^2$ repe-
 rietur $91^2 + 12^2 \cdot 5^2 = 109^2$.

§. 12. Quaestio proposita adhuc generalior reddi similique
 modo resolvi posset, si proponeretur ad quadratum reducenda haec
 formula:

$vvzz(axx + 2bxy + czz)^2 + \Delta xxyy(avv + 2bvz + czz)^2$,
 quae autem, ob id ipsum quod b non nihilum, nulla plane labora-
 difficultate. Sumi enim adeo possunt ambae litterae v et z pro lu-
 bitu, et facta evolutione prodibit talis forma:

$$A^2x^4 + 2Bx^3y + Cxxyy + 2Dxy^3 + E^2y^4,$$

cujus resolutio adeo methodo vulgari expediri potest.

§. 13. Interim tamen si similis solutio desideretur, qua
 perinde locum habere queat, sive b sit 0 sive minus, talis solutio
 pari modo succedet ut ante, si modo sequens Lemma in subsidium
 vocetur.

L e m m a.

*Invenire idoneos valores pro litteris v et z ut ista formula
 $avv + 2bvz + czz$ divisibilis evadat per hanc: $axx + 2bxy + cy$*

S o l u t i o.

§. 14. Multiplicetur utraque formula per a , ut utriusque fac-
 tores simplices sint $av + bz \pm z\sqrt{bb - ac}$ et $ax + by \pm y\sqrt{bb - ac}$

nonum ergo ille per hunc divisibilis reddi debet. Hunc in finem

$$av + bz + \sqrt{bb - ac} = (ax + by + y\sqrt{bb - ac})(f + g\sqrt{bb - ac});$$

tum vero facta evolutione partes rationales et irrationales seorsim
inter se sequentur, unde pro rationalibus reperietur

$$av + bz = afx + bfy + gy(bb - ac).$$

Pro irrationalibus autem erit $z = agx + bgy + fy$, qui valor in
precedente substitutus, dat $v = (f - bg)x - cgy$, quibus valori-

bus loco z et v introductis formula proposita $avv + 2bvz + czz$
aequabitur huic producto :

$$(axx + 2bxy + cyy)(ff + (ac - bb)gg)$$

atque nunc totus calculus ut ante expediri poterit.