1822

De vera brachystochrona seu linea celerrimi descensus in medio resistente

Leonhard Euler

DE VERA BRACHISTOCHRONA

SEU

LINEA CELERRIMI DESCENSUS

IN MEDIO RESISTENTE.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhibuit die 13. Nov. 1780.

§. 1. Quae de his curvis in Mechanicae meae tomo II. tradidi ejusmodi nituntur principio, quod in medio resistente admitti non potest. Deinde in Tractatu meo isoperimetrico idem argumentum ex primis Maximorum et Minimorum principiis expedire sum conatus; verum quae de Brachystochrona in medio resistente ibi attuli, tantopere sunt in formulis analyticis nimis generalibus involuta, ut vix quisquam veram indolem harum curvarum inde eruere valeat. Quamobrem hoc idem argumentum hic majori studio evolvere atque ex primis principiis clare et perspicue derivare constitui.

§. 2. Hunc in finem consideremus curvam quamcunque AYC, ad axem verticalem AB relatam, super qua corpus, ex A labi incipiens, descendat in medio resistente secundum rationem quamcunque multiplicatam celeritatis. Jam pro puncto curvae quocunque Y vocetur abscissa $AX = x$, applicata $XY = y$ et arcus curvae $AY = s$. Celeritas autem in Y sit v, cujus ergo quantitas tali aequatione exprimetur: $v\partial v = g\partial x - hv^{n+1}\partial s$, quae ita est comparata, ut non nisi casibus $n = -1$ et $n = +1$ in genere integrari queat. Interim tamen valore ipsius v inde definito elementum temporis erit $\frac{\partial s}{v}$, cujus ergo integrale proprietatem minimi obtineri debet, siquidem curva AYC fuerit Brachystochrona. Tab. I. Fig. 4.

§. 3. Si motus fieret in vacuo, quo casu foret $h = 0$ et $vv = 2gx$, quia celeritas in Y a sola ejus altitudine penderet, evidens est, ut tota curva AYC evadat Brachystochrona, etiam singulas ejus partes AY minimo tempore percurri debere; At vero in medio resistente res longe aliter se habet, ubi celeritas non amplius a loco puncti Y pendet, sed simul totum arcum praecedentem AY involvit; unde fieri potest ut tempus per totum arcum AYC fiat minimum, etiamsi tempus per arcum AY non esset minimum, scilicet fieri posset ut descensu per arcum AY in Y aliquanto major celeritas generaretur, quae tanto brevius tempus per sequentem arcum YC producat; quamobrem nostrum problema pro medio resistente ita proponi debet:

Inter omnes curvas, quas a puncto A usque ad C ducere licet ea quaeratur, super qua corpus, descensum ex A incipiens, citissime ad terminum C perveniat.

§. 4. Quo autem haec investigatio latius pateat problema multo generalius, quod non ad solas Brachystochronas sit restrictum contemplabor, propterea quod solutio non solum non fit difficilior sed etiam facilius ad formulas analyticas reduci patitur; quamobrem sequens problema ante omnia expediri conveniet:

Problema generale.

Inter omnes curvas, quae a dato puncto A ad datum punctum C duci possunt, eam investigare, in qua ista formula integralis: $\int V \partial x$ maximum minimumve obtineat valorem ubi littera V, praeter coordinatas x et y earumque differentialia cujuscunque ordinis, etiam quantitatem v involvat, quae per aequationem quamcunque differentialem determinetur.

Solutio.

§. 5. Cum functio V etiam differentialia cujusvis ordinis implicare sumatur, ponamus more solito $\partial y = p \partial x$; $\partial p = q \partial x$

$\partial q = r\partial x$; etc. ita ut jam V praeter quantitates x, y, p, q, r, etc. etiam quantitatem illam v involvat; unde ejus differentiale hujusmodi habebit formam:

$$\partial V = L\partial V + M\partial x + N\partial y + P\partial p + Q\partial q + \text{etc.}$$

quantitas autem v per hanc aequationem differentialem exprimatur: $\partial v = \mathfrak{V}\partial x$; ubi $\mathfrak{V}$ sit functio quaecunque ipsius v cum quantitatibus ad curvam pertinentibus x, y, p, q, r, etc. Quocirca ejus differentiale talem habebit formam:

$$\partial \mathfrak{V} = \mathfrak{L}\partial v + \mathfrak{M}\partial x + \mathfrak{N}\partial y + \mathfrak{P}\partial p + \mathfrak{Q}\partial q + \text{etc.}$$

§. 6. Quo nunc formulae integrali $\int V\partial x$ valor maximus minimusve conciliari possit, methodo utamur ex calculo variationum petita, quem in finem tribuamus applicatis $XY = y$ incrementum quam minimum $Y\delta$, quod per δy indicemus, ita ut δy sit variatio ipsius y; alteri vero coordinatae x nullam variationem tribui opus est, ita ut sit $\delta x = 0$. Quatenus ergo reliquae quantitates ab applicata y pendent, eatenus eae etiam certas variationes recipient, quas ante omnia evolvere necesse est.

§. 7. Ponamus brevitatis gratia variationem $\delta y = \omega$, et cum sit $p = \frac{\partial y}{\partial x}$, erit $\delta p = \frac{\delta\partial y}{\partial x}$. Demonstratum autem est esse $\delta\partial y = \partial\delta y = \partial\omega$, unde fit $\delta p = \frac{\partial\omega}{\partial x}$. Simili modo, cum sit $q = \frac{\partial p}{\partial x}$, erit $\delta q = \frac{\delta\partial p}{\partial x} = \frac{\partial\delta p}{\partial x} = \frac{\partial\partial\omega}{\partial x^2}$. Pariter manifestum est fore $\delta r = \frac{\partial^3\omega}{\partial x^3}$; etc. Hic scilicet ubique littera δ cuique quantitati praefixa designat ejus variationem ex variatione ipsius y oriundam.

§. 8. His positis investigemus variationem ipsius formulae integralis propositae $\int V\partial x$, quae ergo erit $= \delta\int V\partial x$. Ex calculo autem variationum constat esse $\delta\int V\partial x = \int\delta V\partial x$, et quia variationes eadem lege capere licet, qua differentialia indicantur, erit

$$\delta V = L\delta v + M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + \text{etc.}$$

ubi terminus $M\delta x$ evanescit; ac si loco $\delta y, \delta p, \delta q, \delta r$, etc., valores modo inventi scribantur, habebimus:

$$\delta V = L\delta v + N\omega + \frac{P\partial\omega}{\partial x} + \frac{Q\partial\partial\omega}{\partial x^2} + \frac{R\partial^3\omega}{\partial x^3} + \text{etc.}$$

Hinc ergo variatio formulae integralis propositae erit:

$$\delta\int V\partial x = \int\partial x\,(L\delta v + N\omega + \frac{P\partial\omega}{\partial x} + \frac{Q\partial\partial\omega}{\partial x^2} + \frac{R\partial^3\omega}{\partial x^3} + \text{etc.})$$

sive

$$\delta\int V\partial x = \int L\delta v\partial x + \int N\omega\partial x + \int P\partial\omega + \int\frac{Q\partial\partial\omega}{\partial x} + \text{etc.}$$

Totum ergo negotium huc redit, ut primi membri $\int L\delta v\partial x$ valor omni cura evolvatur.

§. 9. Ex §. 5. sequitur $v = \int\mathfrak{V}\partial x$, hinc erit $\delta v = \delta\int\mathfrak{V}\partial x = \int\delta\mathfrak{V}\partial x$; quare cum sit $\partial\mathfrak{V} = \mathfrak{L}\partial v + \mathfrak{M}\partial x + \mathfrak{N}\partial y + \mathfrak{P}\partial p + \text{etc.}$ erit simili modo:

$$\delta\mathfrak{V} = \mathfrak{L}\delta v + \mathfrak{M}\delta x + \mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \mathfrak{R}\delta r + \text{etc.}$$

hoc est:

$$\delta\mathfrak{V} = \mathfrak{L}\delta v + \mathfrak{N}\omega + \frac{\mathfrak{P}\partial\omega}{\partial x} + \frac{\mathfrak{Q}\partial\partial\omega}{\partial x^2} + \frac{\mathfrak{R}\partial^3\omega}{\partial x^3} + \text{etc.}$$

consequenter habebimus:

$$\delta v = \int\partial x\,(\mathfrak{L}\delta v + \mathfrak{N}\omega + \frac{\mathfrak{P}\partial\omega}{\partial x} + \frac{\mathfrak{Q}\partial\partial\omega}{\partial x^2} + \text{etc.})$$

ex qua aequatione nunc valorem ipsius δv erui oportet.

§. 10. Hunc in finem, quo calculus magis sublevetur, ponamus $\delta v = u$, eritque differentialibus sumtis:

$$\partial u = \mathfrak{L}u\partial x + \mathfrak{N}\omega\partial x + \mathfrak{P}\partial\omega + \frac{\mathfrak{Q}\partial\partial\omega}{\partial x} + \text{etc.},$$

quae aequatio ita repraesentetur:

$$\partial u - \mathfrak{L}u\partial x = \mathfrak{N}\omega\partial x + \mathfrak{P}\partial\omega + \frac{\mathfrak{Q}\partial\partial\omega}{\partial x} + \text{etc.}$$

quae ut integrabilis reddatur multiplicetur per $e^{-\int\mathfrak{L}\partial x}$, cujus loco brevitatis gratia scribamus $\frac{1}{\Lambda}$, ita ut sit $\Lambda = e^{\int\mathfrak{L}\partial x}$, ideoque $\frac{\partial\Lambda}{\Lambda} = \mathfrak{L}\partial x$. Tum igitur aequatio integralis erit:

$$\frac{u}{\Lambda} = \int\frac{\partial x}{\Lambda}\,(\mathfrak{N}\omega + \frac{\mathfrak{P}\partial\omega}{\partial x} + \frac{\mathfrak{Q}\partial\partial\omega}{\partial x^2} + \text{etc.})$$

hocque modo adepti sumus valorem quaesitum δv, qui erit:

$$\delta v = \Lambda\int\frac{\partial x}{\Lambda}\,(\mathfrak{N}\omega + \frac{\mathfrak{P}\partial\omega}{\partial x} + \frac{\mathfrak{Q}\partial\partial\omega}{\partial x^2} + \text{etc.}).$$

§. 11. Nunc igitur pro primo termino formulae, qua variatio $\delta\int V\partial x$ exprimitur, habebimus:

$$\int L\Lambda\partial x\int\frac{\partial x}{\Lambda}\left(\mathfrak{N}\omega+\frac{\mathfrak{P}\partial\omega}{\partial x}+\frac{\mathfrak{Q}\partial\partial\omega}{\partial x^2}+\text{etc.}\right)$$

ubi post signum integrationis $\int$ adhuc aliud involvitur, unde in id erit incumbendum, ut omnia ad simplicem integrationem revocentur.

§. 12. Hunc in finem statuamus $L\Lambda\partial x=\partial\Pi$, eritque

$$\int\partial\Pi\int\frac{\partial x}{\Lambda}\left(\mathfrak{N}\omega+\frac{\mathfrak{P}\partial\omega}{\partial x}+\text{etc.}\right)=\Pi\int\frac{\partial x}{\Lambda}(\mathfrak{N}\omega+\text{etc.})-\int\frac{\Pi\partial x}{\Lambda}(\mathfrak{N}\omega+\text{etc.}).$$

Jam quia est $\Pi=\int L\Lambda\partial x$, constans huic integrali adjicienda nostro arbitrio relinquitur; unde ista constans ita determinetur, ut pro tota curva AYC, ubi fiat $x=AB=a$, ista quantitas Π evanescat, quippe quo pacto prior pars $\Pi\int\frac{\partial x}{\Lambda}(\mathfrak{N}\omega+\text{etc.})$ pro tota curva, ad quam calculum instrui oportet, sponte evanescet, siquidem ipsa formula integralis adjuncta aliter ad nihilum redigi nequit. Quocirca, integrali $\int L\Lambda\partial x=\Pi$ ita accepto, ut posito $x=a$ evanescat, erit:

$$\int L\partial x\delta v=-\int\frac{\Pi\partial x}{\Lambda}\left(\mathfrak{N}\omega+\frac{\mathfrak{P}\partial\omega}{\partial x}+\frac{\mathfrak{Q}\partial\partial\omega}{\partial x^2}+\text{etc.}\right)$$

§. 13. Hoc jam valore invento variatio quaesita $\delta\int V\partial x$ erit sequenti modo expressa:

$$-\int\frac{\Pi\partial x}{\Lambda}\left(\mathfrak{N}\omega+\frac{\mathfrak{P}\partial\omega}{\partial x}+\frac{\mathfrak{Q}\partial\partial\omega}{\partial x^2}+\text{etc.}\right)$$
$$+\int\partial x\left(N\omega+\frac{P\partial\omega}{\partial x}+\frac{Q\partial\partial\omega}{\partial x^2}+\text{etc.}\right),$$

quae expressio, ponendo brevitatis gratia:

$$N-\frac{\Pi\mathfrak{N}}{\Lambda}=N';\ P-\frac{\Pi\mathfrak{P}}{\Lambda}=P';\ Q-\frac{\Pi\mathfrak{Q}}{\Lambda}=Q';\ \text{etc.}$$

ad hanc formam satis simplicem reducitur:

$$\delta\int V\partial x=\int\partial x\left(N'\omega+\frac{P'\partial\omega}{\partial x}+\frac{Q'\partial\partial\omega}{\partial x^2}+\text{etc.}\right)$$

cujus ergo valor, per totam curvam AYC, hoc est usque ad $x=a$ extensus, nihilo aequari debet.

§. 14. Quo haec formula ulterius reducatur, notetur esse $\int P'\partial\omega=P'\omega-\int\omega\partial P'$; deinde $\int Q'\partial\partial\omega=Q'\partial\omega-\int\partial\omega\partial Q'$. At vero est $\int\partial\omega\partial Q'=\omega\partial Q'-\int\omega\partial\partial Q'$, ideoque

$$\int Q\,\partial\partial\omega = Q'\partial\omega - \omega\partial Q' + \int\omega\partial\partial Q.$$

Eodemque modo erit

$$\int R'\partial^3\omega = R'\partial\partial\omega - \partial\omega\partial R' + \omega\partial\partial R' - \int\omega\partial^3 R$$

et ita porro; ubi, quia in extremo termino C nulla variatio ω adhibetur, partes absolutas prorsus negligere licet, ideoque habebimus

$$\delta\int V\partial x = \int\omega\partial x\,(N' - \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial\partial Q'}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 R'}{\partial x^3} + \text{etc.})$$

cujus ergo valor per totam curvam, ab A ad C extensus, nihilo aequari debet, utcunque variationes ω accipiantur.

§. 15. Evidens autem est, hoc aliter fieri non posse, nisi fuerit $N' - \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial\partial Q'}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R'}{\partial x^3} + \text{etc.} = 0$, qua ergo aequatione ipsa curva determinabitur, in qua formula integralis proposita maximum minimumve valorem sortitur; ubi meminisse oportet esse

$$N' = N - \frac{\Pi\mathfrak{N}}{\Lambda};\quad P' = P - \frac{\Pi\mathfrak{P}}{\Lambda};\ \text{etc.}$$

Tum vero erit $\Lambda = e^{\int L\partial x}$ et $\Pi = \int L\Lambda\partial x$, quod integrale ita capi debet ut evanescat posito $x = a$. Praeterea vero omnes constantes per integrationem ingredientes ita definiri oportet, ut omnibus circumstantiis satisfiat, hoc est, ut sumto $x = 0$ fiat etiam $y = 0$; deinde vero, ut sumto $x = a$ fiat $y = BC = b$. Praeterea etiam quantitati v pro casu $x = 0$ certus valor datus tribui debebit.

Applicatio
ad Brachystochronas in medio resistente.

§. 16. Cum tempus descensus per arcum AY sit $\int\frac{\partial s}{v}$, ob $\partial s = \partial x\sqrt{1+pp}$ formula integralis a termino A, ubi $x = 0$, usque ad terminum C, ubi $x = a$ et $y = b$, extensa et ad minimum reducenda, erit $\int\frac{\partial x\sqrt{1+pp}}{v}$ ideoque $V = \frac{\sqrt{1+pp}}{v}$, quae formula cum duas tantum variabiles v et p contineat, erit $L = -\frac{\sqrt{1+pp}}{vv}$; $M = 0$; $N = 0$; at $P = \frac{p}{v\sqrt{1+pp}}$. Deinde cum sit $\partial v = \frac{g\partial x - hv^{n+1}\partial x\sqrt{1+pp}}{v}$, erit $\mathfrak{B} = \frac{g}{v} - hv^n\sqrt{1+pp}$; unde porro fit $\mathfrak{L} = -\frac{g}{vv} - nhv^{n-1}\sqrt{1+pp}$;

$\mathfrak{M} = 0$; $\mathfrak{N} = 0$; at $\mathfrak{P} = -\frac{hv^n p}{\sqrt{1+pp}}$. Ex his jam valoribus primo erit $\frac{\partial \Lambda}{\Lambda} = \mathfrak{L}\partial x$; deinde vero fit $\Pi = \int L\Lambda\partial x$.

§. 17. His inventis erit primo $N' = 0$; $P' = P - \frac{\Pi\mathfrak{P}}{\Lambda}$; quocirca aequatio pro curva quaesita erit $N' - \frac{\partial P'}{\partial x} = 0$, sive $\frac{\partial P'}{\partial x} = 0$, unde statim integrando obtinetur $P' = C$; substitutis ergo valoribus pro P et $\mathfrak{P}$ oritur ista aequatio pro curva;

$$\frac{p}{v\sqrt{1+pp}} + \frac{h\Pi v^n p}{\Lambda\sqrt{1+pp}} = C.$$

Ex hac aequatione statim eliciamus valorem Π, quippe pro quo formulam integralem dedimus, eritque

$$\Pi = \frac{C\Lambda v\sqrt{1+pp} - \Lambda p}{hpv^{n+1}}.$$

Ponamus hic brevitatis gratia $\frac{C}{v^n}\cdot\frac{\sqrt{1+pp}}{p} - \frac{1}{v^{n+1}} = \Theta$, ut sit $\Pi = \frac{\Lambda\Theta}{h}$, atque ob $\partial\Lambda = \Lambda\mathfrak{L}\partial x$ erit:

$$\partial\Pi = L\Lambda\partial x = \frac{\Theta\Lambda\mathfrak{L}\partial x}{h} + \frac{\Lambda\partial\Theta}{h},$$

quae aequatio, per Λ divisa, erit $hL\partial x = \Theta\mathfrak{L}\partial x + \partial\Theta$. Est vero

$$\partial\Theta = -\frac{nC\partial v}{v^{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{1+pp}}{p} + \frac{C}{v^n}\partial\cdot\frac{\sqrt{1+pp}}{p} + \frac{(n+1)\partial v}{v^{n+2}};$$

unde aequatio nostra erit:

$$-\frac{h\partial x\sqrt{1+pp}}{vv} = \frac{C\mathfrak{L}\partial x}{v^n}\cdot\frac{\sqrt{1+pp}}{p} - \frac{\mathfrak{L}\partial x}{v^{n+1}} - \frac{nC\partial v}{v^{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{1+pp}}{p}$$
$$+ \frac{(n+1)\partial v}{v^{n+2}} + \frac{C}{v^n}\cdot\partial\cdot\frac{\sqrt{1+pp}}{p}$$

existente $\mathfrak{L} = -\frac{g}{vv} - nhv^{n-1}\sqrt{1+pp}$.

§. 18. Haec jam aequatio a formulis integralibus liberata continet adhuc tres variabiles, scilicet p et v cum differentiali ∂x, ex eaque elementum ∂x facile expelli potest. Cum enim sit

$$v\partial v = g\partial x - hv^{n+1}\partial x\sqrt{1+pp},$$

erit $\partial x = \frac{v\partial v}{g - hv^{n+1}\sqrt{1+pp}}$, qui valor si substituatur, obtinebitur aequatio tantum duas variabiles v et p continens. Hunc in finem in nostra aequatione omnes terminos elementum ∂x continentes ad eandem partem constituamus, eritque:

$$\frac{\mathfrak{L}\,\partial x}{v^{n+1}} - \frac{\partial x\sqrt{1+pp}}{vv}\left(h + \frac{C\,\mathfrak{L}}{p\,v^{n-2}}\right) = \frac{(n+1)\,\partial v}{v^{n+2}} - \frac{n\,C\,\partial v}{v^{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{1+pp}}{p}$$
$$+ \frac{C}{v^n}\cdot\partial\cdot\frac{\sqrt{1+pp}}{p}.$$

Quod si vellemus loco ∂x et $\mathfrak{L}$ valores substituere, prodiret aequatio valde perplexa, quam superfluum foret hic apponere. Interim tamen evidens est aequationem inter p et v differentialem primi gradus futuram; unde in negotio tam arduo ejus resolutionem tanquam concessam jure postulare possumus.

§. 19. Cum igitur per istam aequationem quantitas p per v detur, atque ob integrationem nova quantitas constans ingrediatur, reliqua omnia, quae ad solutionem pertinent, facile expedire licebit. Primo enim cum $\sqrt{1+pp}$ certa sit functio ipsius v, etiam quantitatem x per v definire licebit ope aequationis $\partial x = \frac{v\,\partial v}{g - bv^{n+1}\sqrt{1+pp}}$, unde iterum nova constans introducetur, quam ita definiri oportet ut sumto $v = 0$ fiat $x = 0$. Deinde vero etiam $\int\mathfrak{L}\partial x$ per solam v determinabitur; hincque porro ipse litterae Π valor ex aequatione $\Pi = \frac{C\Lambda v\sqrt{1+pp} - \Lambda p}{b\,p\,v^{n+1}}$; ubi constans C ita determinari debet, ut posito $x = a$ iste valor evenescat, quod ergo, si sumamus casu $x = a$ fieri $v = C$, hoc casu fieri debebit; sicque omnibus constantibus rite definitis ipsa curvae constructio nulla amplius laborat difficultate. Cum enim jam x et p dentur per v, ob $y = \int p\,\partial x$ etiam applicata y per v assignari poterit, atque in tam sublimi investigatione his determinationibas acquiescere debemus, quatenus scilicet solutio generalis, quae ad omnes valores exponentis n pateat, desideratur.

Supplementum
in quo natura Brachystochronarum in medio resistente accuratius determinatur.

§. 20. Etsi ultima aequatio differentialis inter binas variabiles p et v, ad quam nos methodus Maximorum et Minimorum perduxit ita videbatur complexa, ut vix quicquam inde ad indolem harum curvarum cognoscendam concludi posse videretur: tamen calculo rite instituto sequens aequatio satis commoda prodiit:

$$0 = \frac{(n+2)\partial v}{vv} - \frac{(n+1)C\partial v\sqrt{1+pp}}{pv} + C\left(1 - \frac{b}{g}v^{n+1}\sqrt{1+pp}\right)\partial . \frac{\sqrt{1+pp}}{p},$$

quae tantum ex quatuor terminis constat, atque haud difficulter ad formam simpliciorem redigi potest.

§. 21. Statuamus enim primo $C = \frac{1}{c}$ et $\frac{\sqrt{1+pp}}{p} = t$, unde fit $p = \frac{1}{\sqrt{tt-1}}$ et $\sqrt{1+pp} = \frac{t}{\sqrt{tt-1}}$, quibus valoribus substitutis oritur ista aequatio:

$$\frac{(n+2)c\partial v}{vv} - \frac{(n+1)t\partial v}{v} + \partial t - \frac{b}{g} . \frac{v^{n+1}t\partial t}{\sqrt{tt-1}} = 0.$$

Ubi statim patet binos terminos medios $\partial t - \frac{(n+1)t\partial v}{v}$ reddi integrabiles, si dividantur per v^{n+1}, quippe cum integrale prodeat $= \frac{t}{v^{n+1}}$. Tum autem terminus prior et postremus sponte integrationem admittent, ita ut integrale completum hujus aequationis fiat:

$$\frac{t}{v^{n+1}} - \frac{c}{v^{n+2}} - \frac{b}{g}\sqrt{tt-1} = \Delta,$$

quae aequatio, restitutis valoribus $t = \frac{\sqrt{1+pp}}{p}$ et $\sqrt{tt-1} = \frac{1}{p}$, multiplicando per v^{n+1}, induet hanc formam:

$$\frac{\sqrt{1+pp}}{p} - \frac{c}{v} - \frac{b}{g} . \frac{v^{n+1}}{p} = \Delta v^{n+1},$$

unde ergo valor ipsius p per v sola extractione radicis quadratae definitur.

§. 22. Hic autem ante omnia notasse juvabit constantem Δ ex loco ultimi puncti C, ubi descensus terminatur, definiri. Cum enim in hoc termino debeat esse $\Pi = 0$, atque methodus Maximorum et Minimorum immediate suppeditasset hanc aequationem: $P - \frac{\Pi\mathfrak{P}}{A} = C$, evidens est quantitatem Π evanescere non posse, nisi in eo loco, ubi fit $P = C$. Erat autem $P = \frac{p}{v\sqrt{1+pp}}$, et quia nunc posuimus $C = \frac{1}{c}$, hoc eveniet, ubi fit $c = \frac{v\sqrt{1+pp}}{p}$.

Hoc autem casu nostra aequatio inventa praebebit valorem $\Delta = -\frac{b}{gp}$ ubi p exprimit tangentem anguli quo curva a situ verticali declinat, quamobrem si velimus, ut ista inclinatio in puncto C dato angulo α aequetur, cujus tangens sit $= \theta$, erit $\Delta = -\frac{b}{g\theta}$, quo ergo valore substituto aequatio nostra penitus erit determinata, fietque

$$\frac{\sqrt{1+pp}}{p} - \frac{c}{v} + \frac{b}{g} v^{n+1} \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}\right) = 0, \text{ sive}$$

$$\sqrt{1+pp} - \frac{cp}{v} + \frac{b}{g} v^{n+1} \left(\frac{p}{\theta} - 1\right) = 0.$$

Haec autem determinatio puncti extremi C per datam declinationem curvae a situ verticali naturae rei multo magis videtur accomodata, quam si hoc punctum per abscissam $x = a$ et $y = b$ definire vellemus.

§. 23. Quoniam igitur quantitas p per hanc aequationem functioni adeo algebraicae ipsius v aequatur, hinc constructio curvae satis commode institui poterit. Cum enim sit

$$\partial x = \frac{v \partial v}{g - b v^{n+1} \sqrt{1+pp}}, \text{ erit } \partial y = \frac{p v \partial v}{g - b v^{n+1} \sqrt{1+pp}},$$

et utraque formula ita integrari debet, ut posito $v = 0$, id quod in ipso initio A evenit, integralia evanescant, hocque modo obtinebuntur ambae coordinatae x et y pro eo curvae puncto, ubi celeritas corporis est v. Erit scilicet

$$x = \int \frac{v \partial v}{g - b v^{n+1} \sqrt{1+pp}} \text{ et } y = \int \frac{p v \partial v}{g - b v^{n+1} \sqrt{1+pp}},$$

haecque curva eo usque continuata, ubi fit $v = \theta$, erit vera Brachystochrona, super qua corpus brevissimo tempore ex A ad C descendit.

Evolutio casus quo h $= 0$
sive resistentia evanescens.

§. 24. Hoc igitur casu nostra aequatio in hanc simplicissimam formam contrahitur: $\sqrt{1+pp} - \frac{cp}{v} = 0$, cui respondet aequatio $P - C = 0$; unde patet, quodlibet curvae punctum Y pro ultimo termino assumi posse, ita ut hujus curvae omnes portiones, ab initio A incipientes, Brachystochronismi proprietate gaudeant, quae uti constat est insignis proprietas Brachystochronae jam pridem pro vacuo inventae.

§. 25. Cum igitur hic sit $h = 0$, erit $p = \frac{v}{\sqrt{cc - vv}}$ et ambae coordinatae ita exprimentur:

$$x = \int \frac{v \partial v}{g} \text{ et } y = \int \frac{vv \partial v}{g\sqrt{cc - vv}}.$$

Inde igitur erit $x = \frac{vv}{2g}$, unde vicissim $v = \sqrt{2gx}$, qui valor in altera formula substitutus dat $y = \int \frac{\partial x \sqrt{2gx}}{\sqrt{cc - 2gx}}$, quae aequatio manifesto est pro Cycloide, cujus cuspis in ipsum initium A incidit et revotione circuli super recta horizontali describitur.

Evolutio casus, quo $n = -1$, sive resistentia ubique eadem.

§. 26. Hoc ergo casu aequatio nostra inter p et v hanc induet formam:

$$\sqrt{1 + pp} - \frac{cp}{v} + \frac{b}{g}\left(\frac{p}{\theta} - 1\right) = 0,$$

ex qua aequatione elicitur $v = \frac{cp}{\sqrt{1 + pp} + \frac{b}{g}\left(\frac{p}{\theta} - 1\right)}$. Unde sumto $p = \theta$ celeritas in termino ultimo C erit $v = \frac{c\theta}{\sqrt{1 + \theta\theta}}$. Coordinatae autem nunc per v ita exprimuntur, ut sit

$$x = \int \frac{c\, v \partial v}{g - b\sqrt{1 + pp}} \text{ et } y = \int \frac{p v \partial v}{g - b\sqrt{1 + pp}},$$

quae, si loco v valor inventus substituatur, per p expressae reperientur. Superfluum autem foret hanc operationem instituere.

§. 27. Haec ergo curva erit Brachystochrona in medio cujus resistentia est constans, neque a celeritate pendens, seu, quomodo *Newtonus* talem resistentiam describit, ea est momentis temporum proportionalis.

Conclusio.

§. 28. Si aequationem inter p et v hic inventam accurati perpendamus, deprehendemus, eam multo latius extendi posse, non solum resistentia certae potestati celeritatis v sit proportionali sed adeo rationem functionis cujuscunque ipsius v sequatur, ita u sumto V pro ista functione celeritatis v, pro motu corporis han habeamus aequationem:

$$v\,\partial v = g\,\partial x - h\,V\,\partial x \sqrt{1 + p.p.}$$

Quia enim in nostra aequatione integrali exponens n non nisi exponente ipsius v occurrit, hinc tuto concludere licet, nil aliu opus esse nisi ut in nostris formulis loco v^{n+1} scribatur V. Ho igitur modo aequatio inter p et v nunc ita se habebit:

$$\sqrt{1 + pp} - \frac{cp}{v} + \frac{h}{g} V \left(\frac{p}{\theta} - 1\right) = 0.$$

Unde cum sit $\partial x = \frac{v\,\partial v}{g - h V \sqrt{1 + pp}}$, erit $\partial y = \frac{p\,v\,\partial v}{g - h V \sqrt{1 + pp}}$ reliqua omnia eodem modo determinabuntur ut ante.