1822

De binis formulis speciei *xx+myy* et *xx+nyy* inter se concordibus et discordibus

Leonhard Euler

DE BINIS FORMULIS SPECIEI
$xx + myy$ ET $xx + nyy$
INTER SE CONCORDIBUS ET DISCORDIBUS.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhibuit die 5. Junii 1780.

§. 1. In Analysi Diophantea frequentissime occurrere solent hujusmodi binae formulae, de quibus quaeritur, utrum ambae simul quadrata effici queant, nec ne? quod discrimen cum maximi sit momenti et ad insignes numerorum proprietates perducat, eas hujus generis formulas, quae quadrata reddi possunt, vocabo *concordantes*, eas autem, ubi hoc nullo modo fieri potest, *discordantes*. Ita, cum demonstratum sit, has formulas: $xx + yy$ et $xx - yy$, nunquam simul quadrata effici posse, eae erunt discordantes, cujusmodi etiam sunt hae duae formulae: $xx + yy$ et $xx + 2yy$, ac plurimae aliae nunc quidem cognitae. Contra vero etiam dantur innumerabiles formulae concordantes, cujusmodi sunt $xx + yy$ et $xx + 7yy$. Sumto enim $x = 3$ et $y = 4$ fit $xx + yy = 5^2$ et $xx + 7yy = 11^2$. Quemadmodum igitur formulae concordantes et discordantes distingui queant hic accuratius investigare constitui.

§. 2. Primum autem observasse juvabit, hujusmodi binas formulas pluribus modis in alias transformari posse, quae ejusdem sint indolis. Ita hae duae formulae:

$$xx + myy = zz$$
$$xx + nyy = vv,$$

facile transmutantur in formas sequentes:

$$\begin{array}{r|l}
zz - myy = xx & vv - nyy = xx \\
zz + (n-m)yy = vv & vv + (m-n)yy = zz \\
zz - xx = myy & vv - xx = nyy \\
(m-n)xx + nzz = nvv & mvv + (n-m)xx = nzz
\end{array}$$

$$zz - vv = (m-n)yy$$
$$nzz - mvv = (n-m)xx.$$

Hae igitur sex variationes ita sunt comparatae, ut si earum quaecunque fuerit vel concordans vel discordans, reliquae omnes ejusdem sint naturae. Quo praemisso solutio sequentis problematis maximi momenti erit censenda.

Problema.

Proposita hac formula: $xx + myy = zz$, *ubi* m *denotet numerum integrum quemcunque, sive positivum sive negativum, investigare omnes formulas* $xx + nyy = vv$, *quae cum proposita sint concordantes.*

Solutio.

§. 3. Hic igitur, proposito quocunque numero m, omnes numeri n requiruntur, quae cum forma proposita binas formulas concordantes exhibeant, quae ergo quaestio potissimum pendet ab indole numeri m, sive sit primus, sive compositus. Si enim pluribus modis in duos factores inter se primos resolvi queat, etiam pluribus modis sequens investigatio institui poterit. Hanc ob rem statim ponamus $m = \mu\nu$; ubi facile patet, si m fuerit numerus primus, vel potestas numeri primi, alterum factorum μ et ν unitati aequalem accipi debere. Quo plures autem numerus m contineat factores inter se primos, eo pluribus modis eum ad formam $\mu\nu$ recovare licebit.

§. 4. Primo ergo in genere valores quantitatum x et y ita assignemus, ut formula proposita $xx + myy$ fiat quadratum, quod praestabitur sumendo $x = \pm (\mu pp - \nu qq)$ et $y = 2pq$; tum enim fiet $xx + myy = (\mu pp + \nu qq)^2$; ita ut hoc casu sit $z = \mu pp + \nu qq$. Jam hi valores in formula quaesita $xx + nyy = vv$ substituti dabunt hanc aequationem:

$$(\mu pp - \nu qq)^2 + 4npp qq = vv.$$

§. 5. Quare cum tota quaestio huc redeat, ut omnes idonei valores pro numero n investigentur, ex hac aequatione statim deducimus $n = \frac{vv - (\mu pp - \nu qq)^2}{4ppqq}$; ubi loco formulae $\mu pp - \nu qq$ retineamus literam x, dummodo notetur ejus valorem eo pluribus modis diversum esse posse, quo plures factores numerus propositus $m = \mu\nu$ complectatur. Simul vero etiam intelligitur, literam x tam negative quam positive accipi posse. Hoc ergo modo habebimus numerum $n = \frac{vv - xx}{4ppqq}$, ubi ergo pro v omnes ejusmodi valores quaeri debebunt, ut numerator divisionem per denominatorem admittat. Quare cum numerator etiam in duos factores resolvi queat, ita ut sit $n = \frac{(v+x)(v-x)}{4ppqq}$, primo evidens est utrumque numeratoris factorem parem esse debere; tum vero intelligitur si alter per quempiam factorem ipsius $ppqq$ fuerit divisibilis, alterum ejus complementum complecti debere. Evidens autem est hos binos valores ipsius $ppqq$ inter se primos esse debere, propterea quod numeri v et x necessario inter se sunt primi.

§. 6. Hic primo quidem productum $ppqq$ statim praebet duos factores inter se primos pp et qq; ubi etiam pro altero sumi potest $ppqq$; pro altero vero unitas. Cum autem usu venire queat, ut productum $ppqq$ etiam aliis modis in duos factores inter se primos resolvi possit, quos semper quadratos esse debere manifestum est, ponamus generatim $ppqq = rrss$, atque literam v ita determinemus, ut alter numeratoris factor $v + x$ divisibilis evadat per $2rr$, alter vero $v - x$ per $2ss$.

§. 7. Hanc ob rem ponamus $v+x=2frr$ et $v-x=2gss$, ut hoc modo prodeat ipse numerus quaesitus $n=fg$. Ex illis vero aequalitatibus statim colligitur $v=frr+gss$ et $x=frr-gss$. Cum autem quantitas x tanquam cognita spectari debeat, hic potissimum quaeritur, quales numeri pro f et g accipi debeant, ut fiat $frr-gss=x$, sive hoc problema erit resolvendum: quomodo datis numeris r, s, x, definiri debeant f et g, ut huic conditioni $frr-gss=x$ satisfiat? id quod, si numeri r, s et x essent determinati, per notas Analyseos operationes facile praestari posset. At vero hic solutione generali est opus, quam sequenti modo obtinebimus.

§. 8. Pro numeris rr et ss, quaeramus ope methodi jam satis cognitae binos numeros ϱ et σ, ut fractio $\frac{\varrho}{\sigma}$ proxime accedat ad fractionem $\frac{rr}{ss}$, sive ut sit $\sigma rr-\varrho ss=\pm 1$. Constat autem talem fractionem $\frac{\varrho}{\sigma}$ per eas operationes inveniri posse, quibus maximus communis divisor numerorum rr et ss quaeri solet. Hanc obrem, quicunque numeri per rr et ss designentur, istos numeros ϱ et σ tanquam cognitos spectare licebit.

§. 9. His igitur numeris ϱ et σ inventis capiamus $f=hss+\sigma x$ et $g=hrr+\varrho x$, tum enim, quia fieri debet $frr-gss=\pm x$, his valoribus substitutis fiet $frr-gss=x(\sigma rr-\varrho ss)$, ideoque ob $\sigma rr-\varrho ss=\pm 1$, utique evadet $frr-gss=x$, hocque modo nostrum problema jam perfecte erit solutum. Cum enim sit $n=fg$, nunc erit

$$n=(hss+\sigma x)(hrr+\varrho x)$$

qui ergo valor semper producit numerum compositum, nisi alter factorum abeat in unitatem. Ubi meminise oportet, primo pro x plures assignatos fuisse valores pro factoribus numeri $m=\mu\nu$. Praeterea vero etiam pro r et s saepe plures dari possunt valores, ut fiat $rs=pq$, quae geminae varietates a se invicem non pendent, ita ut cum singulis valoribus ipsius x singulos valores ipsarum r et

s combinare liceat. Ex quo patet, hanc solutionem problematis maxime esse generalem, atque adeo omnes valores idoneos pro numero n continere.

§. 10. Quoniam igitur hic inventio fractionis $\frac{\varrho}{\sigma}$, quae fractioni $\frac{rr}{ss}$ proxime sit aequalis, praecipue requiritur, istam aequalitatem proxime veram hoc signo $\sqsupset$ designemus, ita ut sit $\frac{rr}{ss} \sqsupset \frac{\varrho}{\sigma}$, quo nihil aliud significatur, nisi quod sit $\sigma rr - \varrho ss = \pm 1$. Sumtis ergo pro lubitu binis rr et ss, sequentem tabulam adjungo, quae numeros ϱ et σ indicat:

$rr:ss$	$\varrho:\sigma$	$rr:ss$	$\varrho:\sigma$
1 : 1	1 : 0	100 : 1	1 : 0
4 : 1	1 : 0	100 : 9	11 : 1
9 : 1	1 : 0	100 : 49	49 : 24
9 : 4	2 : 1	100 : 81	21 : 17
16 : 1	1 : 0	121 : 1	1 : 0
16 : 9	7 : 4	121 : 4	30 : 1
25 : 1	1 : 0	121 : 9	27 : 2
25 : 4	6 : 1	121 : 16	53 : 7
25 : 9	11 : 4	121 : 25	29 : 6
25 : 16	11 : 7	121 : 36	37 : 11
36 : 1	1 : 0	121 : 49	42 : 17
36 : 25	13 : 9	121 : 64	17 : 9
49 : 1	1 : 0	121 : 81	3 : 2
49 : 4	12 : 1	121 : 100	23 : 19
49 : 9	11 : 2	144 : 1	1 : 0
49 : 16	3 : 1	144 : 25	23 : 4
49 : 25	2 : 1	144 : 49	47 : 15
49 : 36	15 : 11	144 : 121	25 : 21
64 : 1	1 : 0		
64 : 9	7 : 1		
64 : 25	23 : 9		
64 : 49	17 : 13		
81 : 1	1 : 0		
81 : 4	20 : 1		
81 : 16	5 : 1		
81 : 25	13 : 4		
81 : 49	38 : 23		
81 : 64	19 : 15		

§. 11. Ope hujus tabulae facile erit solutionem problematis expedire. Sumantur enim pro r et s successive omnes valores a minimis 1 et 1 incipiendo, et pro singulis excerpantur numeri ϱ et σ; tum pro quolibet casu r et s quaerantur omnia producta pq ipsi rs aequalia, quod eo pluribus modis fieri poterit, quo plures affuerint factores. Tum vero pro singulis p et q quaerantur valores ipsius $x = \mu pp - \nu qq$, id quod duplici modo fieri poterit, quia etiam erit $x = \nu pp - \mu qq$. Quo facto singuli valores pro x inventi dabunt infinitos valores pro numero quaesito, cum sit

$$n = (hss + \sigma x)(hrr + \varrho x)$$

hocque modo operationes continuando plurimos numeros pro n sumendos obtinebimus.

Exemplum.

§. 12. *Proposita formula* $xx + yy = zz$ *investigare omnes formulas concordantes* $xx + nyy = vv$.

Hic ergo erit $\mu = \nu = 1$ et $x = pp - qq$. Sumatur nunc $r = 2$ et $s = 1$, eritque $\varrho = 1$ et $\sigma = 0$. Quia igitur $rs = 2$, unico modo fiet $p = 2$ et $q = 1$, eritque $x = 3$, quocirca hinc habebimus $n = h(4h + 3)$, unde pro n jam deducuntur sequentes valores: $n = 1, 7, 10, 22, 27, 45, 52, 76, 85$. Simili modo sumatur $r = 3$ et $s = 1$, ubi iterum erit $\varrho = 1$ et $\sigma = 0$, tum vero unico modo fiet $p = 3$ et $q = 1$, ideoque $x = 8$, hinc $n = h(9h + 8)$, unde oriuntur sequentes valores pro n: $1, 17, 20, 52, 57$. Eodem modo sumtis $r = 3$ et $s = 2$, ut sit $\varrho = 2$ et $\sigma = 1$, habebimus duplici modo $p = 6$ et $q = 1$, et $p = 3$ et $q = 2$, unde duo casus nascuntur, scil. $x = 35$, et $x = 5$. Ex priore orietur $n = (4h + 35)(9h + 70)$, unde infra centenarium nulli occurrunt valores praeter hos: $n = -6$; 11; 49; 100. At vero pro altero casu fiet $n = (4h + 5)(9h + 10)$, unde oriuntur hi valores: $n = 1, 24$. Hinc jam satis clare intelligitur, quomodo ulterius sit operandum.

Hoc autem modo calculum satis longe prosecuti, pro n sequentes valores infra centenarium sumus adepti. Primo quidem istos positivos:

$n = 1,\ 7,\ 10,\ 11,\ 17,\ 20,\ 22,\ 24,\ 27,\ 30,\ 31,\ 34,\ 41,$
$42,\ 45,\ 49,\ 50,\ 52,\ 57,\ 59,\ 60,\ 61,\ 71,\ 72,\ 74,\ 76,$
$79,\ 85,\ 86,\ 92,\ 94,\ 97,\ 99,$

tum vero negativos sequentes:

$n = -6,\ -18,\ -35,\ -47,\ -55,\ -60,\ -76,\ -88,$
$-90,\ -98.$

§. 13. Interim tamen asseverare non ausim, nullos alios praeterea dari valores pro n. Quidam enim horum valorum orti demum sunt ex numeris satis magnis pro r et s assumtis. Veluti valor $n = 59$ prodiit ex numero $x = 11$, sive ex casu $r = 6$ et $s = 5$, unde fit $y = 60$; tum enim utique erit $11^2 + 60^2 = 61^2$ et $11^2 + 59 \cdot 60^2 = 461^2$. Simili modo casus $n = 86$ ortus est ex valoribus $x = 1295$ et $y = 72$. Erit enim

$$1295^2 + 72^2 = 1297^2$$
$$1295^2 + 86 \cdot 72^2 = 1457^2.$$

Numerus autem $n = -47$ oritur ex casu $x = 612^2$ et $y = 35^2$. Erit enim:

$$612^2 + 35^2 = 613^2 \text{ et } 612^2 - 47 \cdot 35^2 = 563^2.$$

§. 14. Cum igitur neutiquam affirmare liceat, omnes numeros in hac tabula non contentos dare formulas discordantes cum formula $xx + yy = zz$, methodum subjungam quamlibet formulam $xx + nyy = vv$ explorandi, utrum sit concordans an discordans cum formula $xx + yy = zz$. Ex casu autem notissimo formularum discordantium $xx + yy$ et $xx - yy$ supra jam derivavimus $xx + yy$ et $xx + 2yy$, quae certe etiam sunt discordantes. Quamobrem has formulas $xx + yy$ et $xx + 3yy$ hic ad examen revocabo.

Problema.

Explorare, utrum hae duae formulae: $xx + yy = \square$ *et* $xx + 3yy = \square$ *sint concordantes an discordantes.*

Solutio.

§. 15. Numerorum x et y alter necessario erit par, alter impar. Facile autem patet in formula posteriore x non esse posse parem; foret enim y impar et $3yy$ numerus formae $8\alpha + 3$, qui cum quadrato pari numquam quadratum efficere potest. Erit ergo x impar et y par. Pro priore formula erit $x = pp - qq$ et $y = 2pq$, ubi ergo iterum numerorum p et q alter est par, alter impar. Hinc igitur posterior formula evadet

$$xx + 3yy = p^4 + 10ppqq + q^4 = \square$$

quae formula reducitur ad hanc: $(pp + qq)^2 + 2(2pq)^2$. Statuamus ergo $pp + qq = \pm rr \mp 2ss$ et $2pq = 2rs$ ideoque $pq = rs$.

§. 16. Hic jam tuto assumere licet $q = 1$, siquidem pro p, r, s etiam fractiones admittere velimus. Habebimus ergo $p = rs$ et nostra aequatio erit $rrss + 1 = \pm rr \mp 2ss$. Ex signis superioribus deducimus $rr = \frac{1 + 2ss}{1 - ss}$, quae fractio, si loco s scribamus $\frac{s}{t}$, reducitur ad hanc: $\frac{tt + 2ss}{tt - ss}$, quae, an quadratum producere queat, nec ne? quaeritur.

§. 17. Hic ante omnia est observandum, numeratorem et denominatorem alium divisorem communem habere non posse praeter ternarium, unde uterque vel ipse erit quadratum vel triplum quadratum. Priore casu ergo habebimus $tt + 2ss = aa$ et $tt - ss = bb$, unde fit $tt = bb + ss$ et $aa = bb + 3ss$ quae formulae similes sunt ipsis propositis, ideoque eandem sortem sequentur. Posteriore casu erit $tt + 2ss = 3aa$ et $tt - ss = 3bb$. Ex posteriore erit $tt = ss + 3bb$, unde fit $3aa = 3ss + 3bb$, sive $aa = ss + bb$, quae formulae iterum ipsi propositae sunt similes.

§. 18. Ex inferioribus signis erit $rr = \frac{2ss - 1}{ss + 1}$, ubi iterum loco s scribamus $\frac{s}{t}$, quo fiat $rr = \frac{2ss - tt}{ss + tt}$, ubi divisor communis, praeter ternarium, non datur. Casus, quo numerator et denomirator sunt primi inter se, praebet $2ss + tt = aa$; $s + tt = bb$, ubi statim ingens absurdum se offert. Summa enim foret $aa + bb = 3ss$. Constat autem summam duorum quadratorum nunquam per 3 dividi posse. Sumatur $2ss - tt = 3aa$ et $ss + tt = 3bb$, unde sequitur $ss = aa + bb$, hincque porro $tt = 2bb - aa$ et $ss + tt = 3bb$, quod iterum per se est absurdum.

§. 19. Ex his conjunctim jam sequitur, si formulae propositae essent concordantes, ex iis aliae ejusdem indolis sequerentur, atque adeo multo minores; quam obrem, cum in minoribus numeris nullus casus possibilis assignari queat, evictum est, ambas formulas propositas esse discordantes.

Problema.

Proposita formula $xx + yy = \square$, *explorare, utrum haec formula* $xx + 4yy = \square$ *sit concordans nec ne.*

Solutio:

§. 20. Hic statim patet x esse debere numerum imparem. Jam pro priore ponatur $x = pp - qq$ et $y = 2pq$; ubi patet numerorum p et q alterum debere esse parem, alterum imparem. Hinc altera formula fiet

$$xx + 4yy = p^4 + 14ppqq + q^4 = \square,$$

quae formula abit in hanc: $(pp + qq)^2 + 3(2pq)^2 = \square$, ubi prius quadratum est impar? Ponatur ergo $pp + qq = \pm(rr - 3ss)$; $2pq = 2rs$, sive $pq = rs$. Hic si quemquam offendat, quod ante sumserimus $q = 1$, calculum in integris instituamus, sumendo $pq = rs = abcd$, et ponamus $p = ab$; $q = cd$; $r = ac$; $s = bd$, quibus valoribus substitutis erit:

$$aabb + ccdd = \pm(aacc - 3bbdd).$$

§. 21. Signum superius nobis dabit $\frac{aa}{dd} = \frac{cc + 3bb}{cc - bb}$, cujus numerator et denominator alium factorem communem habere nequit excepto numero 4, qui cum ipse sit quadratum, necesse est ut uterque fiat quadratum. Statuatur ergo $cc + 3bb = ff$ et $cc - bb = gg$, eritque $cc = bb + gg$ et $4bb + gg = ff$, quae formulae conveniunt cum ipsis propositis, quorum tamen termini minores sunt quam x et y.

§. 22. Signa inferiora nobis dabunt $\frac{aa}{dd} = \frac{3bb - cc}{bb + cc}$, ubi alius divisor communis non occurrit, praeter 4; unde tam numerator quam denominator debet esse quadratum. Quod si ergo ponatur

$$3bb - cc = ff \quad \text{et} \quad bb + cc = gg$$

ex priore erit $3bb = cc + ff$, quod jam est absurdum. Cum igitur ista operatio vel perducat ad formulas propositis similes, vel contradictionem involvat, hoc certum est signum, formulas propositas esse discordantes.

§. 23. Hic autem jure objici potest, fieri posse ut numerator et denominator fiant dupla quadrata, scilicet $3bb - cc = 2ff$ et $bb + cc = 2gg$, quod revera fieri sponte patet, casu $b = c$, unde fit $f = g = b$, consequenter etiam $a = d$, $p = q$, ideoque $x = 0$, quo ergo casu utique ambae formulae propositae fient quadrata. Hoc autem aliis casibus evenire nunquam posse hoc modo ostendi potest. Cum enim hinc fiat $cc = 2gg - bb$ et $2bb - gg = ff$, ista quatuor quadrata cc, gg, bb, ff forent in progressione arithmetica, quod autem nunquam fieri posse jam dudum est demonstratum, solo casu excepto quo inter se sunt aequalia.

§. 24. Subjungamus autem adhuc casum, quo binae formulae propositae revera sunt concordantes.

Problema.

Proposita formula $xx + yy = \square$ *explorare utrum haec formula:* $xx + 7yy = \square$ *sit concordans nec ne.*

Solutio.

§. 25. Pro priore sumamus ut hactenus $x = pp - qq$ et $y = 2pq$, et posterior dabit $p^4 + 26ppqq + q^4 = \square$, quae transformatur in hanc: $(pp + qq)^2 + 6(2pq)^2 = \square$, pro qua poni potest primo $pp + qq = \pm(rr - 6ss)$ et $pq = rs$, vel secundo

$pp + qq = \pm(3rr - 2ss)$ et $pr = rs$. Pro utraque ergo statuamus $pq = rs = abcd$ sitque $p = ab$, $q = cd$, $r = ac$, $s = bd$, sicque pro prima formula habebimus:

$$aabb + ccdd = \pm(aacc - 6bbdd) \text{ et pro altera}$$
$$aabb + ccdd = \pm(3aacc - 2bbdd).$$

Ob signa ergo ambigua quatuor casus sunt evolvendi.

§. 26. Pro priore casu erit $\frac{aa}{dd} = \frac{cc + 6bb}{cc - bb}$; ubi cum divisor communis sit 7, primo fiat $cc + 6bb = ff$ et $cc - bb = gg$, unde fit $cc = bb + gg$ et $ff = 7bb + gg$, quae formulae ipsis propositis sunt similes. Ponamus porro $cc + 6bb = 7ff$ et $cc - bb = 7gg$, hincque fiet $cc = bb + 7gg$ et $ff = bb + gg$, quae denuo propositis sunt similes.

§. 27. Pro secundo casu erit $\frac{aa}{dd} = \frac{6bb - cc}{bb + cc}$, ubi iterum divisor communis esse potest 7; quare statuendo $6bb - cc = ff$ et $bb + cc = gg$, foret $6bb = cc + ff$, quod est absurdum. Statuamus ergo $6bb - cc = 7ff$ et $bb + cc = 7gg$, quae posterior suppositio jam per se est absurda.

§. 28. Tertius casus dat $\frac{aa}{dd} = \frac{cc + 2bb}{3cc - bb}$, ubi divisor communis iterum est 7. At vero ponendo hic $cc + 2bb = ff$ et $3cc - bb = gg$ foret $3cc = bb + gg$, quod denuo est absurdum. Statuamus ergo $cc + 2bb = 7ff$ et $3cc - bb = 7gg$, hinc fit $cc = 7ff - 2bb$ et $gg = 3ff - bb$, sive $3ff = bb + gg$, quod est absurdum.

§. 29. Restat igitur quartus casus, qui dat $\frac{aa}{dd} = \frac{2bb - cc}{bb + 3cc}$, ubi statim in oculos occurrit casum $b = c = 1$ satisfacere; tum enim fiet $x = 1$ et $d = 2$. Hinc autem nanciscimur $p = 1$, $q = 2$, ideoque $x = 3$ et $y = 4$; unde utique fiet $xx + yy = 5^2$ et $xx + 7yy = 11^2$, consequenter evidens est formulas propositas esse concordantes.

Supplementum.

§. 30. Cum solutio penultimi problematis non satis sit concinna et perspicua, ejus loco sequens theorema subjungamus.

Theorema.

Hae duae formulae $xx + yy = \square$ *et* $xx + 4yy = \square$ *sunt discordantes, sive impossibile est pro* x *et* y *ejusmodi valores assignare, qui utramque reddant quadratum, exceptis duobus casibus* $x = 0$ *et* $y = 0$.

Demonstratio.

§. 31. Incipiamus a posteriore formula $xx + 4yy$, quae cum etiam sit summa duorum quadratorum, certe erit $x = pp - qq$ et $y = pq$; tum enim fiet $xx + 4yy = (pp + qq)^2$. Hinc autem prior formula hanc induet formam: $p^4 - ppqq + q^4 = \square$, quae manifesto aequivalet huic: $(pp + qq)^2 - 3(pq)^2 = \square$. Quamobrem, quo hoc fiat, statuamus $pp + qq = rr + 3ss$ et $pq = 2rs$. Sic enim fiet $xx + yy = (rr - 3ss)^2$.

§. 32. Statuamus porro $pq = 2rs = 2abcd$, fiatque $p = 2ab$ erit $q = cd$; tum vero sit $r = bc$, erit $s = bd$, qui valores substituti hanc praebent aequationem:

$$4aabb + ccdd = aacc + 3bbdd$$

unde sequitur $\frac{aa}{dd} = \frac{3bb - cc}{4bb - cc}$, vel etiam $\frac{aa}{dd} = \frac{cc - 3bb}{cc - 4bb}$; ubi cum nullus divisor communis occurrat, siquidem tam p et q quam r et s supponantur primi inter se, tam numerator quam denominator seorsim debet esse quadratum. Pro priore ergo ponatur $3bb - cc = ff$ et $4bb - cc = gg$, quae utraque positio est absurda. Quare pro altera formula, ponamus $cc - 3bb = ff$ et $cc - 4bb = gg$. Ex ista statim fit $cc = gg + 4bb$, unde altera evadit $ff = gg + bb$, quae cum sint ipsis propositis perfecte similes, atque minores, manifesto hinc sequitur veritas theorematis.

Corollarium 1.

§. 33. Cum igitur istae formulae $xx + yy$ et $xx + 4yy$ sint discordantes, etiam omnes ejus variationes initio memoratae erunt discordantes, scil.

$xx + yy = zz$	$zz - yy = xx$	$vv - 4yy = xx$
$xx + 4yy = vv$	$zz + 3yy = vv$	$vv - 3yy = zz$
$zz - xx = yy$	$vv - xx = 4yy$	$vv - zz = 3yy$
$4zz - 3xx = 4vv$	$vv + 3xx = 4zz$	$4zz - vv = 3xx.$

Corollarium 2.

§. 34. Praeterea vero etiam illae formulae, ad quas in solutione superiore sumus perducti, certe sunt discordantes, scilicet:

$$2bb - gg = ff$$
$$2gg - bb = cc,$$

quoniam non dantur quatuor quadrata in progressione arithmetica. Hinc ergo etiam omnes variationes erunt discordantes, quae sunt:

$2xx - yy = zz$	$2xx - zz = yy$	$yy + zz = 2xx$
$2yy - xx = vv$	$3xx - 2zz = vv$	$3yy - zz = 2vv$
$2yy - vv = xx$	$xx + vv = 2yy$	$2zz + vv = 3xx$
$3yy - 2vv = zz.$	$3xx - vv = 2zz$	$zz + 2vv = 3yy.$

Corollarium 3.

§. 35. Denique etiam formulae biquadraticae quae se obtulerunt sunt impossibiles. Ita cum ex theoremate sit $p^4 - ppqq + q^4 = \square$ impossibilis; impossibiles quoque erit haec forma: $p^4 + 14ppqq + q^4 = \square$, hineque etiam plures aliae formulae, quae per transformationem hinc formari possunt.