1820

De problemate traiectoriarum orthogonalium ad superficies translato

Leonhard Euler

DE PROBLEMATE TRAJECTORIARUM ORTHOGONALIUM AD SUPERFICIES TRANSLATO.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhibuit die 12 Augusti 1782.

§. 1. Quaestio, quam hic tractandam suscipio, ita se habet: Propositis infinitis superficiebus, una quadam aequatione inter ternas coordinatas contentis, investigare alias, quae illas ubique ad angulos rectos intersecent. Hic igitur ante omnia nobis erit in criterium inquirendum, quo normalitas illa intersectionum determinetur. Hunc in finem consideremus superficiem quamcunque ad ternos axes inter se normales relatam, qui sint OA, OB, OC, quibus parallelae statuantur ternae coordinatae $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, quibus ergo positio puncti cujuscunque Z superficiei propositae determinatur. Quo jam ejus intersectio, ab alia quavis superficie facta, definiri queat, quaeramus planum, quod nostram superficiem in puncto Z tangat. Tab. I. Fig. 3.

§. 2. Pro hac autem superficie data sit aequatio differentialis $\partial z = p\partial x + q\partial y$. Ac primo concipiatur sectio plano AOC parallela et per punctum Z facta, pro qua ergo erit y constans et $\partial z = p\partial x$; unde si Zp sit tangens hujus sectionis et Yp subtangens axi OA parallela, erit $Yp = \frac{z\partial x}{\partial z} = \frac{z}{p}$. Simili modo concipiatur alia sectio plano BOC parallela, cujus tangens sit recta Zq, cujus ergo, ob x constans et $\partial z = q\partial y$, subtangens erit $Yq = \frac{z}{q}$.

Unde patet, quia ambae rectae Zp et Zq superficiem tangunt, totum planum tangens fore Zpq.

§. 3. Contemplemur nunc aliam superficiem iisdem coordinatis expressam, quae illam in puncto Z normaliter trajicere debeat, pro qua statuamus hanc aequationem differentialem:

$$\partial z = P\partial x + Q\partial y.$$

Efficiendum igitur est, ut planum hanc superficiem tangens ad planum praecedens sit perpendiculare, id quod eveniet, si recta ad hanc superficiem normalis incidat in planum, quod praecedentem superficiem tangit. Quamobrem pro hac superficie investigemus positionem rectae, quae ad eam est normalis.

Tab. I. Fig. 4. §. 4. Consideremus igitur etiam hic sectionem plano AOC parallelam et per punctum Z factam, cujus sectionis normalis sit recta ZP; et, quia hic y est constans, erit $\partial z = P\partial x$ et subnormalis $YP = \frac{z\partial z}{\partial x} = zP$. Simili modo fiat sectio per Z plano BOC parallela, ita ut jam sit x constans et $\partial z = Q\partial y$, sitque ZQ normalis ad hanc sectionem, eritque subnormalis $YQ = \frac{z\partial z}{\partial y} = zQ$. Compleatur nunc parallelogrammum rectangulum YPQR, eritque recta ZR normalis ad utramque sectionem, ideoque normalis ad ipsam superficiem, sicque erit $YP = QR = zP$ et $YQ = PR = zQ$. Nunc igitur pro scopo nostro necesse est ut recta ZR cadat in planum tangens Zpq praecedentis figurae.

Fig. 3. §. 5. Transferatur igitur hoc punctum R in praecedentis figurae punctum R′, unde ad rectas Yp et Yq ducantur normales R′P′ et R′Q′, quae cum hic in plagam contrariam cadant, erit $R'P' = -zQ$ et $R'Q' = -zP$. Quare cum sit $Yp = \frac{z}{p}$, erit $pP' = \frac{z}{p} + zP$, unde similitudo triangulorum $pP'R'$ et pYq dabit hanc proportionem: $\frac{1}{p} + P : -Q = \frac{1}{p} : \frac{1}{q}$, unde sequitur ista aequa-

litas: $1+Pp+Qq=0$, quae ergo continet criterium, quod ambae superficies in puncto Z sibi invicem sint normales.

§. 6. Cum autem terni axes assumti sint inter se permutabiles, ut nostrae formulae ad omnes tres aeque pertineant, nil aliud opus est, nisi ut loco P; Q scribatur $\frac{-p}{r}$ et $\frac{-q}{r}$ nec non $\frac{-P}{R}$ et $\frac{-Q}{R}$. Hoc enim modo aequatio differentialis pro priore superficie, quam *secandam* vocemus, erit

$$p\partial x + q\partial y + r\partial z = 0,$$

pro altera vero superficie, quam *secantem* appellemus, orietur haec aequatio: $P\partial x + Q\partial y + R\partial z = 0$. Et nunc ambae superficies se normaliter secabunt, si fuerit $Pp+Qq+Rr=0$. Totum ergo negotium huc redit, ut inquiratur, quemadmodum ex data aequatione pro secanda:

$$p\partial x + q\partial y + r\partial z = 0$$

elici oporteat aequationem pro secante:

$$P\partial x + Q\partial y + R\partial z = 0,$$

ita ut criterium adimpleatur $Pp+Qq+Rr=0$.

§. 7. Hic igitur spectamus aequationem pro secanda

$$p\partial x + q\partial y + r\partial z = 0$$

tanquam datam, neque tamen eam pro lubitu fingere licet, quandoquidem aequationes differentiales inter ternas variabiles x, y, z prorsus non sunt possibiles, nisi in iis certus character locum obtineat, atque iste character in hoc consistit, ut debeat esse:

$$\left(\frac{p\partial q - q\partial p}{\partial z}\right) + \left(\frac{q\partial r - r\partial q}{\partial x}\right) + \left(\frac{r\partial p - p\partial r}{\partial y}\right) = 0.$$

Hoc enim nisi eveniat, aequatio in se erit absurda, neque quicquam declarat, sed potius contradictionem manifestam involvit.

§. 8. Quando autem iste character locum habet, tum aequatio semper est possibilis, atque adeo multiplicatorem assignare licebit, quo ea integrabilis reddatur. Quin etiam hoc negotium absolvi poterit, dum primo una variabilium, veluti z, pro constante habeatur, ut tantum sit $p\partial x + q\partial y = 0$, quae cum duas tantum variabiles contineat, more solito est tractanda. Ponamus ergo inde reperiri integrale v, ita ut, ob z constantem assumtam, sit integrale completum $v = z$. Eodem modo, spectando y ut constantem, reperietur aequationis $p\partial x + r\partial z = 0$ integrale, quod sit u, ita ut completum statui debeat $u = Y$. Ex utroque ergo integrali colligetur $v - u = Z - Y$; ac si character locum habeat ante datus, semper licebit formulam $v - u$ in duas partes resolvere, quarum altera sit functio tantum ipsius z, altera tantum ipsius y, quo pacto ambae functiones Z et Y determinabuntur.

§. 9. Semper autem aequatio integralis completa praeterea constantem arbitrariam a involvet, cui cum infinitos valores tribuere liceat, nostra aequatio differentialis: $p\partial x + q\partial y + r\partial z = 0$ simul infinitas superficies in se complectetur, quae ergo omnes a superficie secante invenienda aeque ubique ad angulos rectos secabuntur. Quamobrem constantem illam a, quae per integrationem introducitur, appellabimus *Parametrum* variabilem, quippe cujus variatio innumerabiles praebet superficies secandas.

§. 10. Quod si ergo vicissim proponantur infinitae superficies secandae, una quadam aequatione inter ternas variabiles x, y z et parametrum variabilem a comprehensae, inde aequationem nostram differentialem formae $p\partial x + q\partial y + r\partial z = 0$ ita elici oportet, ut parameter a in eam non amplius ingrediatur. Quocirca, quaecunque proponatur aequatio finita inter ternas variabiles x, y, z et parametrum varibilem a, ex ea ante omnia valor hujus parametri a exquiri debet, qui ergo aequabitur certae functioni ipsarum x, y, z tantum, cujus demum expressionis differentiale nihilo aequatum dabit nobis aequationem differentialem $p\partial x + q\partial y + r\partial z = 0$; ex qua deinceps aequationem pro superficiebus secantibus deduci conveniet.

§. 11. Constituta igitur aequatione differentiali pro superficiebus secandis $p\partial x + q\partial y + r\partial z = 0$, in eo erit elaborandum, ut inde aequatio pro superficiebus secantibus $P\partial x + Q\partial y + R\partial z = 0$ eruatur; ubi quidem evidens est, trium litterarum P, Q, R, unam per divisionem tolli posse, deinde vero reliquarum altera ex aequatione canonica: $Pp + Qq + Rr = 0$ est determinanda, ita ut unica tantum quantitas arbitraria in calculo relinquatur, quam autem ita definiri oportet, ut aequatio possibilis evadat, id quod semper infinitis modis praestari potest, quemadmodum ex sequentibus patebit.

§. 12. Cum autem nulla ratio suadeat, cur trium litterarum P, Q, R, una potius quam reliquae ex aequatione $Pp + Qq + Rr = 0$ determinetur, plurimum juvabit casus particulares perpendere, quibus una harum litterarum nihilo aequalis statuitur. Fiat igitur primo $P = 0$, et cum esse debeat $Qq + Rr = 0$ erit $Q : R = r : -q$; unde cum ratio tantum in computum veniat, poni poterit $Q = r$ et $R = -q$ ita ut pro secantibus habeatur haec aequatio: $r\partial y - q\partial z = 0$ quae si tantum duas variabiles y et z contineat, ita ut tertia x non adsit, integratio nulla laborabit difficultate, et cum integrale novam constantem arbitrariam recipiat, simul innumerabiles superficies secantes impetrabuntur.

§. 13. Eodem modo, si fiat $Q = 0$, debebit esse $Pp + Rr = 0$, ideoque $P = r$ et $R = -p$, ita ut aequatio habeatur $r\partial x - q\partial z = 0$, quae si tantum variabiles x et z continuerit, itidem solutionem particularem praeberet. Quod si denique sumatur $R = 0$, fieri debet $R = q$ et $Q = -p$, ita ut aequatio sit $q\partial x - p\partial y = 0$, quae saepenumero etiam solutionem praebere potest, prouti aequatio differentialis pro superficiebus secandis fuerit comparata.

§. 14. His autem casibus quasi principalibus stabilitis, eos utcunque inter se componere licebit. Introducendo scilicet litteras quascunque L, M, N, in genere statui poterit $P = Mr - Nq$,

$Q = Np - Lr$ et $R = Lq - Mp$. Hinc enim manifesto erit $Pp + Qq + Rr = 0$; sicque pro superficiebus secantibus habebitur ista aequatio differentialis generalissima:

$$\partial x\,(Mr - Nq) + \partial y(Np - Lr) + \partial z\,(Lq - Mp) = 0$$

quae, etsi videtur tres quantitates arbitrarias involvere, revera tamen unicam involvere est censenda. Multitudo autem harum litterarum hunc usum potissimum praestat, ut eas ita determinare liceat, ut inde aequatio possibilis eruatur.

§. 15. Sufficiet autem tantum aequationes particulares obtinuisse, quandoquidem ex duabus talibus solutionibus solutio completa facillime formari poterit. Quod si enim formula integrabilis fuerit inventa, veluti $\partial u = 0$, ita ut $u = b$, ubi b parametrum variabilem designat, ea jam infinitas superficies secantes continet. Ac si praeterea alia talis formula integrabilis innotescat $\partial v = 0$, ita ut $v = c$ etiam solutionem particularem exhibeat, tum utique quaestioni satisfaciet aequatio ex binis composita haec: $f\partial u + g\partial v = 0$. Hinc si pro f accipiatur functio quaecunque ipsius u et pro g functio quaecunque ipsius v, orietur aequatio generalissima quaestioni satisfaciens, scilicet: $\Phi : u = \Phi : v$, sive simplicius statui poterit $v = \Phi : u$, haecque significatio functionis latissime patet, cum non solum omnes functiones legem quandam continuam sequentes, sed etiam omnes adeo functiones discontinuas denotet.

§. 16. Haec ergo solutio longe aliam habet indolem ac solutio problematis Trajectoriarum orthogonalium, quippe quae tantum infinitas praebet curvas secantes ex variabilitate parametri oriundas, cum in praesentem solutionem adeo ingrediatur functio prorsus indeterminata, quae non solum infinitas superficies, verum adeo infinita genera superficierum complectitur.

§. 17. Plerumque autem maxime difficile est, hujusmodi casus, quibus aequatio fit possibilis, eruere, ac saepenumero negotium hoc ingentem sagacitatem postulat; praecipue quando superficies secandae non sunt satis simplices; ubi quidem id imprimis est agendum, ut positio ternorum axium ad statum quaestionis maxime accommodata eligatur. Neque tamen praeceptis negotium confici potest; quamobrem sequentia problemata hic subjungam, ex quibus plura insignia artificia hujusmodi problemata tractandi elucescent. Ibi autem plerumque usus sum formulis initio inventis, ubi erat $r = -1$ et $R = -1$.

Problema I.

§. 18. *Si pro superficiebus secandis fuerit* $z = \alpha x + \beta y + \gamma$, *quae aequatio est pro infinitis planis inter se parallelis, invenire aequationem pro superficiebus secantibus.*

Solutio.

Cum differentiale aequationis propositae sit $\partial z = \alpha \partial x + \beta \partial y$, hoc cum aequatione $\partial z = p \partial x + q \partial y$ comparato, prodit $p = \alpha$, $q = \beta$. Pro superficiebus igitur secantibus, aequatione $\partial z = P \partial z + Q \partial y$ expressis, aequatio canonica $1 + \alpha P + \beta Q = 0$ praebet $Q = \frac{-1 - \alpha P}{\beta}$, quo valore substituto colligitur $\partial z = P \partial x - (\frac{1 + \alpha P}{\beta}) \partial y$, sive $\partial z + \frac{\partial y}{\beta} = \frac{P}{\beta} (\beta \partial x - \alpha \partial y)$. Hinc jam facile concluditur esse debere $\frac{P}{\beta}$ functionem ipsius $\beta x - \alpha y$, ipsumque integrale etiam hujusmodi functioni aequale fore, ita ut aequatio integralis completa habeatur haec: $z + \frac{y}{\beta} = F : (\beta x - \alpha y)$, quae aequatio ergo infinities infinitas superficies complectitur. Si enim tantum esset $z + \frac{y}{\beta} = C (\beta x - \alpha y)$, haec aequatio jam contineret infinitas superficies planas inter se parallelas; unde cum functio quaecunque aeque satisfaciat, manifestum est numerum solutionum infinities esse majorem.

Problema II.

§. 19. *Si pro superficiebus secandis fuerit* $zz = cc - xx - yy$, *quae aequatio infinitas sphaeras concentricas complectitur, invenire aequationem pro superficiebus secantibus.*

Solutio.

Cum hanc aequationem differentiando prodeat $z\partial z = -x\partial x - y\partial y$, sive $\partial z = \frac{-x}{z}\partial x \frac{-y}{z}\partial y$, erit $p = \frac{-x}{z}$ et $q = \frac{-y}{z}$. Si jam pro superficiebus secantibus statuatur $\partial z = P\partial x + Q\partial y$, ob $1 + Pp + Qq = 0$, fieri debet $1 - \frac{Px}{z} - \frac{Qy}{z} = 0$, unde fit $Q = \frac{z - Px}{y}$, quo valore in illa aequatione substituto colligitur haec:

$$\partial z = P\partial x + \left(\frac{z - Px}{y}\right)\partial y, \text{ sive } y\partial z - z\partial y = P(y\partial x - x\partial y).$$

Unde patet P esse debere functionem fractionis $\frac{x}{y}$ et integrale completum fore $\frac{z}{y} = F : \frac{x}{y}$, sive $z = yF : \frac{x}{y}$. At vero $F : \frac{x}{y}$ continet omnes functiones nullius dimensionis ipsarum x et y; unde z aequabitur functioni cuicunque unius dimensionis ipsarum x et y, quae aequatio exprimit omnes plane conos verticem in ipso centro sphaerarum concentricarum habentes, cujuscunque figurae fuerint bases. Omnes enim rectae ex centro in superficiem talis coni ductae manifesto sunt normales ad superficies sphaericas.

Problema III.

§. 20. *Si pro superficiebus secandis fuerit data aequatio* $zz = \alpha xx + \beta yy + \gamma$, *invenire aequationem pro superficiebus secantibus.*

Solutio.

Cum igitur sit $\partial z = \frac{\alpha x}{z}\partial x + \frac{\beta y}{z}\partial y$, habebitur $p = \frac{\alpha x}{z}$ et $q = \frac{\beta y}{z}$; unde si pro superficiebus secantibus statuatur $\partial z = P\partial x + Q\partial y$, fieri debet ex aequatione canonica: $z + \alpha Px + \beta Qy = 0$, unde fit $Q = \frac{-z - \alpha P x}{\beta y}$, quo substituto colligitur aequatio:

$$\partial z = P \partial x - \left(\frac{z + \alpha P x}{\beta y}\right) \partial y,$$

sive $\beta y \partial z + z \partial y = P(\beta y \partial x - \alpha x \partial y)$, quae in hanc transfunditur ex parte sponte integrabilem $\frac{\beta y \partial z + z \partial y}{yz} = \frac{Px}{z}\left(\frac{\beta y \partial x - \alpha x \partial y}{xy}\right)$, unde integrando fit $\beta l z + l y = \int \frac{Px}{z} \partial \,.\, (\beta l x - \alpha l y)$, ubi ergo esse debet $\frac{Px}{z} = F : (\beta l x - \alpha l y) = F : \frac{x^\beta}{y^\alpha}$, ita ut pro superficiebus secantibus habeamus hanc aequationem integratam: $y z^\beta = F : \frac{x^\beta}{y^\alpha}$. Hinc si sumatur $\alpha = -1$ et $\beta = -1$, qui est casus praecedentis problematis, erit $\frac{y}{z} = F : \frac{y}{x}$, sive $z = \frac{y}{F : \frac{y}{x}} = y F : \frac{x}{y}$, quae solutio cum ante data prorsus congruit.

Problema IV.

§. 21. *Si pro superficiebus secandis fuerit* $z^3 = \alpha x^3 + \beta y^3 \mp \gamma$, *invenire aequationem pro superficiebus secantibus*

Solutio.

Differentiatio aequationis propositae praebet $\partial z = \frac{\alpha x x}{z z} \partial x + \frac{\beta y y}{z z} \partial y$, unde fit $p = \frac{\alpha x x}{z z}$ et $q = \frac{\beta y y}{z z}$. Hinc, pro superficiebus secantibus, si fuerit $\partial z = P \partial x + Q \partial y$, fieri debet $1 + \frac{\alpha P x x}{z z} + \frac{\beta Q y y}{z z} = 0$, unde colligitur $Q = \frac{-z z - \alpha P x x}{\beta y y}$, quem valorem substituendo prodit aequatio: $\beta y y \partial z + z z \partial y = P(\beta y y \partial x - \alpha x x \partial y)$, sive $\frac{\beta \partial z}{z z} + \frac{\partial y}{y y} = \frac{P x x}{z z}\left(\frac{\beta y y \partial x - \alpha x x \partial y}{x x y y}\right)$, cujus integrale est

$$\frac{\beta}{z} + \frac{1}{y} = \int \frac{P x x}{z z} \partial \,.\, \left(\frac{\beta}{x} - \frac{\alpha}{y}\right) = F : \left(\frac{\beta}{x} - \frac{\alpha}{y}\right).$$

Problema V.

§. 22. *Si pro superficiebus secandis haec habeatur aequatio:*

$$\int Z \partial z = \int X \partial x + \int Y \partial y + a, \text{ existentibus } X, Y, Z$$

functionibus ipsarum x, y, z respective et a parametro variabili, invenire aequationem pro superficiebus secantibus.

Solutio.

Ob $Z\partial z = X\partial x + Y\partial y$ erit $p = \frac{X}{Z}$ et $q = \frac{Y}{Z}$. Hinc si pro secantibus superficiebus sit $\partial z = P\partial x + Q\partial y$, esse debet $Z + X\partial x + QY = 0$, unde fit $Q = \frac{-Z - PX}{Y}$, quo substituto oritur aequatio: $Y\partial z + Z\partial y = P\,(Y\partial x - X\partial y)$, sive

$$\frac{\partial z}{Z} + \frac{\partial y}{Y} = \frac{PX}{Z}\left(\frac{\partial x}{X} - \frac{\partial y}{Y}\right),$$

unde integrando fit $\int\frac{\partial z}{Z} + \int\frac{\partial y}{Y} = F : \left(\int\frac{\partial x}{X} - \int\frac{\partial y}{Y}\right)$.

Problema VI.

§. 23. *Si aequatio pro superficiebus secandis fuerit $Z = aXY$, ubi X functio ipsius x, Y ipsius y, et a parameter variabilis, qui per differentiationem elidi debet, invenire aequationem pro superficiebus secantibus.*

Solutio.

Ad parametrum a elidendum sumatur differentiale logarithmicum, quod erit $\frac{\partial Z}{Z} = \frac{\partial X}{X} + \frac{\partial Y}{Y}$. Ponatur $\partial Z = Z'\partial z$, $\partial X = X'\partial x$, $\partial Y = Y'\partial y$, ita ut sit $\partial z = \frac{ZX'}{XZ'}\partial x + \frac{ZY'}{YZ'}\partial y$, unde colligitur $= p\frac{ZY'}{YZ'}$ et $q = \frac{ZY'}{YZ'}$. Fieri ergo debet $XYZ' + PYZX' + QXZY' = 0$, unde litteram Q eliminando haec prodit aequatio:

$$XZY'\partial z + XYZ'\partial y = P\,(XY'Z\partial x - YZX'\partial y) = 0,$$

quam dividamus per $XY'Z'$, ut habeamus istam:

$$\frac{Z\partial z}{Z'} + \frac{Y\partial y}{Y'} = PZ\left(\frac{\partial x}{Z'} - \frac{YX'\partial y}{XY'Z'}\right) = \frac{PZ}{Z'}\left(\partial x - \frac{YX'\partial y}{XY'}\right),$$

sive $\frac{Z\partial z}{Z'} + \frac{Y\partial y}{Y'} = \frac{PX'Z}{XZ'}\left(\frac{X\partial x}{X'} - \frac{Y\partial y}{Y'}\right)$. Hinc si fuerit

$$\frac{PZX'}{XZ'} = F : \left(\int\frac{X\partial x}{X'} - \int\frac{Y\partial y}{Y'}\right),$$

erit integrale completum, sive quaesita aequatio pro superficiebus secantibus: $\int \frac{Z\partial z}{Z'} + \int \frac{Y\partial y}{Y'} = F : (\int \frac{X\partial x}{X'} - \int \frac{Y\partial y}{Y'})$.

Scholion.

§. 24. Haec solutio est completa et non solum unum genus superficierum secantium, sed adeo infinita genera continet. Verum saepenumero evenit, ut non infinita genera superficierum secantium, sed tantum unicum genus exhiberi queat. Ita si propositae fuerint infinitae sphaerae planum tabulae in uno puncto tangentes, tum si radius unius cujusvis ponatur $= a$, habebitur haec aequatio: $xx + yy + zz = 2az$, unde fit $a = \frac{xx+yy+zz}{2z}$. Hinc cum differentiando sit $x\partial x + y\partial y + z\partial z = a\partial z$, erit $\partial z = \frac{x\partial x + y\partial y}{a-z}$, sive, ob $a - z = \frac{xx+yy-zz}{2z}$, erit $\partial z = \frac{2z(x\partial x + y\partial y)}{xx+yy-zz}$; unde colligitur $p = \frac{2xz}{xx+yy-zz}$ et $q = \frac{2yz}{xx+yy-zz}$. Pro secantibus superficiebus haec satisfacit aequatio: $2b = \frac{xx+yy+zz}{\sqrt{xx+yy}}$, quae differentiata dat $\frac{b(x\partial x+y\partial y)}{\sqrt{xx+yy}} = x\partial x + y\partial y + z\partial z$, unde fit

$$z\partial z = (x\partial x + y\partial y)\left(\frac{b}{\sqrt{xx+yy}} - 1\right),$$

sive, ob factorem $\frac{b}{\sqrt{xx+yy}} - 1 = -\frac{(xx+yy-zz)}{2(xx+yy)}$, habebitur

$$\partial z = -\frac{(xx+yy-zz)(x\partial x+y\partial y)}{2z(xx+yy)} = P\partial x + Q\partial y, \text{ ita ut}$$

$$P = -\frac{x(xx+yy-zz)}{2z(xx+yy)} \quad \text{et} \quad Q = -\frac{y(xx+yy-zz)}{2z(xx+yy)},$$

unde fit, uti requiritur, $1 + Pp + Qq = 0$. Si hunc casum, qui infinitas quidem solutiones, sed unicum tantum superficierum secantium genus admittit, per methodum praecedentem expedire vellemus, tum, eliminando litteram Q, ad aequationem prorsus intractabilem perveniremus. Sequentem casum, simili modo tractandum, haud parvo studio elicui.

Theorema.

§. 25. *Si pro superficiebus secandis fuerit* $a = -z + \sqrt{xx + yy + zz}$, *tum pro superficiebus secantibus erit* $b = z + \sqrt{xx + yy + zz}$.

Demonstratio.

Pro superficiebus secandis est differentialia sumendo

$$\partial z = \frac{x\partial x + y\partial y + z\partial z}{\sqrt{xx + yy + zz}}, \text{ sive}$$

$$\partial z(\sqrt{xx + yy + zz} - z) = x\partial x + y\partial y, \text{ sive}$$

$$a\partial z = x\partial x + y\partial y, \text{ unde fit}$$

$$p = \frac{x}{a} = \frac{x}{\sqrt{xx + yy + zz} - z} \text{ et } q = \frac{y}{a} = \frac{y}{\sqrt{xx + yy + zz} - z}.$$

Pro superficiebus secantibus fit $\partial z = \frac{-(x\partial x + y\partial y + z\partial z)}{\sqrt{xx + yy + zz}}$, sive

$\partial z(\sqrt{xx + yy + zz} + z) = -x\partial x - y\partial y = b\partial z$, hinc

$$P = \frac{-x}{b} = \frac{-x}{\sqrt{xx + yy + zz} + z} \text{ et } Q = \frac{-y}{b} = \frac{-y}{\sqrt{xx + yy + zz} - z}$$

unde fit $1 + Pp + Qq = \frac{-xx - yy}{xx + yy} + 1 = 0$.

Sequentia problemata methodum indicabunt hujusmodi casus tractandi, quos divinando magis quam via directa resolvimus.

Problema VII.

§. 26. *Si pro superficiebus secandis fuerit* $a = \frac{2zz - xx - yy}{xx - yy}$, *invenire aequationem pro superficiebus secantibus.*

Solutio.

Cum sit $a(xx - yy) = 2zz - xx - yy$, erit differentiando

$$a(x\partial x - y\partial y) = 2z\partial z - x\partial x - y\partial y,$$

unde colligitur $\partial z = p\partial z + q\partial y = \frac{(a+1)}{2z}x\partial x - \frac{(a-1)}{2z}y\partial y$, ideoque $p = \frac{x(a+1)}{2z} = \frac{x(zz - yy)}{z(xx - yy)}$ et $q = -\frac{y(a-1)}{2z} = -\frac{y(zz - xx)}{z(xx - yy)}$.

Jam ut fiat $1 + Pp + Qq = 0$, statuatur $P = \frac{-yz - vx}{xy + vz}$ et $Q = \frac{-xz - vy}{xy + vz}$, ubi v est nova quantitas variabilis indeterminata. Hinc pro superficiebus secantibus aequatio $\partial z = P\partial x + Q\partial y$ hanc induet formam:

$$(yz + vx)\,\partial x + (xz + vy)\,\partial y + (xy + vz)\,\partial z = 0,$$

cujus integrale, uti facile perspicitur, est

$$xyz + \int v\,(x\partial x + y\partial y + z\partial z).$$

Hinc si statuatur v functioni cuicunque ipsius $xx + yy + zz$ aequale, erit aequatio pro superficiebus secantibus, quam quaerimus, $xyz = F:(xx + yy + zz)$, vel etiam invertendo $xx + yy + zz = F:xyz$.

Problema VIII (inversum).

§. 27. *Si pro superficiebus secandis fuerit* $xx + yy + zz = F:xyz$, *invenire aequationem pro superficiebus secantibus.*

Solutio.

Ponatur $F:xyz = v$, erit $\partial.F:xyz = v'.\partial.xyz$, ideoque

$$x\partial x + y\partial y + z\partial z = v'(yz\partial x + xz\partial y + xy\partial z), \text{ sive}$$

$$\partial x\,(x - v'yz) + \partial y\,(y - v'xz) + \partial z\,(z - v'xy) = 0,$$

hinc $p = \frac{v'yz - x}{z - v'xy}$ et $q = \frac{v'xz - y}{z - v'xy}$. His inventis aequatio canonica: $1 + Pp + Qq = 0$ ita se habebit:

$$z - v'xy + Pv'yz - Px + Qv'xz - Qy = 0,$$

quae aequatio in has duas discerpatur:

$$\text{I. } z - Px - Qy = 0; \quad \text{II. } xy - Pyz - Qxz = 0.$$

Ex priore jam colligitur $Q = \frac{z - Px}{y}$, quo valore in altera substituto reperitur $P = \frac{x(zz - yy)}{z(xx - yy)}$, ideoque $Q = -\frac{y(zz - xx)}{z(xx - yy)}$. Aequatio igitur pro superficiebus secantibus $\partial z = P\partial x + Q\partial y$ nunc erit

$$z\partial z\,(xx - yy) = x\partial x\,(zz - yy) - y\partial y\,(zz - xx),$$

quae ita commodius repraesentari potest:

$$z\partial z\,(xx - yy) - zz\,(x\partial x - y\partial y) = xy\,(x\partial y - y\partial x),$$

cujus aequationis, per $(xx - yy)^2$ divisae, integrale est

$$\frac{zz}{2(xx - yy)} = \int \frac{xy\,(x\partial y - y\partial x)}{(xx - yy)^2}.$$

Ad hanc posteriorem formam integrandam ponatur $y = tx$, eritque

$$\int \frac{xy(x\partial y - y\partial x)}{(xx-yy)^2} = \int \frac{t\partial t}{(1-tt)^2} = \frac{1}{2(1-tt)} = \frac{xx}{2(xx-yy)}.$$

Constante igitur rite introducta pro superficiebus secantibus hanc nacti sumus aequationem:

$$\frac{zz}{2(xx-yy)} = \mathrm{A} + \frac{xx}{2(xx-yy)}; \quad \text{sive } \mathrm{A} = \frac{zz-xx}{2(xx-yy)},$$

quae ab aequatione in praecedente problemate pro superficiebus secandis proposita: $a = \frac{2zz-xx-yy}{xx-yy}$, tantum quantitate constante differt. Si enim ponatur $\mathrm{A} = \frac{a-1}{2}$, erit itidem $a = \frac{2zz-xx-yy}{xx-yy}$.

Problema IX.

§. 28. *Si pro superficiebus secandis fuerit* $az = xx + yy + nzz$, *invenire aequationem pro superficiebus secantibus.*

Solutio.

Differentiando prodit $\partial z = \frac{2x\partial x + 2y\partial y}{a - 2nz} = \frac{2z(x\partial x + y\partial y)}{xx+yy-nzz}$, unde fit $p = \frac{2xz}{xx+yy-nzz}$ et $q = \frac{2yz}{xx+yy-nzz}$. Jam ut fiat $1 + \mathrm{P}p + \mathrm{Q}q = 0$, statuatur $\mathrm{P} = -\frac{x(xx+yy-nzz)+\mathrm{S}y}{2z(xx+yy)}$ et $\mathrm{Q} = -\frac{y(xx+yy-nzz)-\mathrm{S}y}{2z(xx+yy)}$; unde pro superficiebus secantibus oritur haec aequatio:

$$2z\partial z(xx+yy) - nzz(x\partial x + y\partial y) + (xx+yy)(x\partial x + y\partial y) = \mathrm{S}(y\partial x - x\partial y),$$

quae divisa per $(xx+yy)^{\frac{1}{2}n+1}$ fit integrabilis; integrale enim, seu aequatio quaesita, ita se habebit:

$$(2-n)zz + xx + yy = (xx+yy)^{\frac{1}{2}n}\,\mathrm{F}:\frac{y}{x}.$$

Theorema.

§. 29. *Eodem modo, si generalius pro superficiebus secandis fuerit* $az^{\lambda} = xx + yy + nzz$, *tum pro superficiebus secantibus haec erit aequatio:*

$$\left(2 + \frac{\lambda-2}{\lambda}n\right)zz + xx + yy = (xx+yy)^{\frac{2-\lambda}{2\lambda}n}\,\mathrm{F}:\frac{y}{x}.$$

Demonstratio per praecedentia est manifesta, unde superfluum foret eam heic adjicere.

Problema X.

§. 30. *Si pro superficiebus secandis fuerit* $az^\lambda = \frac{yy + xx}{yy - xx}$, *invenire aequationem pro superficiebus secantibus.*

Solutio.

Hic pro aequatione $\partial z = p\partial x + q\partial y$ fit $p = \frac{4xyyz}{\lambda(y^4 - x^4)}$ et $q = \frac{-4xxyz}{\lambda(y^4 - x^4)}$. Nam $\lambda a z^{\lambda-1} \partial z = \frac{4xy(y\partial x - x\partial y)}{(yy - xx)^2}$, ergo

$$\lambda a z^\lambda \partial z = \frac{4xyz(y\partial x - x\partial y)}{(yy - xx)^2}.$$

At $az^\lambda = \frac{yy + xx}{yy - xx}$, ideoque $\partial z = \frac{4xyz(y\partial x - x\partial y)}{\lambda(y^4 - x^4)}$. Jam, quo aequationi $1 + Pp + Qq = 0$ satisfiat, sumatur $P = \frac{\lambda(yy + xx)y + \lambda Sx}{-4xyz}$ et $Q = \frac{\lambda(yy + xx)x + \lambda Sy}{-4xyz}$, unde aequatio $\partial z = P\partial x + Q\partial y$ fit

$$4xyz\partial z + \lambda(yy + xx)(y\partial x + x\partial y) + \lambda S(x\partial x + y\partial y) = 0,$$

qua per xy divisa et integrata erit

$$2zz + \lambda(yy + xx)lxy = 2\lambda\int(y\partial y + x\partial x)lxy - \lambda\int S(x\partial x + y\partial y).$$

Statuatur $S = 2lxy - T$, et aequatio illa fiet

$$2zz + \lambda(yy + xx)lxy = \lambda\int T(x\partial x + y\partial y) = \lambda F:(xx + yy),$$

quae aequatio pro superficiebus secantibus conveniet aequationi pro superficiebus secandis: $az^\lambda = \frac{yy + xx}{yy - xx}$.

Problema XI.

§. 31. *Si pro superficiebus secandis fuerit quantitas* az *functioni homogeneae* n *dimensionum ipsarum* x *et* y *aequalis, invenire aequationem pro superficiebus secantibus.*

Solutio.

Posito $y = tx$ functio illa homogenea induet hanc formam: $x^n\Theta$, ubi Θ est functio data ipsius t, sicque erit $az = x^n\Theta$, hincque $la + lz = nlx + l\Theta$, unde fit

$$\frac{\partial z}{z} = \frac{n\partial x}{x} + \frac{\partial \Theta}{\Theta} = \frac{n\partial x}{x} + \frac{\Theta'}{\Theta}\partial t,$$

posito $\partial\Theta = \Theta'\partial t$. Jam sit $\frac{\Theta'}{\Theta} = \Pi$, ita ut etiam Π sit functio data ipsius t, et cum sit $t = \frac{y}{x}$, ideoque $\partial t = \frac{x\partial y - y\partial x}{xx}$, erit $\frac{\partial z}{z} = \frac{n\partial x}{x} + \frac{\Pi(x\partial y - y\partial x)}{xx}$, unde ob $\partial z = p\partial x + q\partial y$ fit $p = \frac{nz}{x} = \frac{\Pi yz}{xx}$ et $q = \frac{\Pi xz}{xx}$. Quo igitur aequationi canonicae $1 + Pp + Qq = 0$ satisfiat, qua fieri debet $\frac{xx}{z} + P(nx - \Pi y) + \Pi x Q = 0$, statuantur litterae $P = \frac{S\Pi x}{\Pi z}$ et $Q = \frac{-x}{\Pi z} + \frac{S(\Pi y - nx)}{\Pi z}$, quibus valoribus aequationi illi satisfit.

Nunc pro superficiebus secantibus aequatio $\partial z = P\partial x + Q\partial y$ evadet $\Pi z\partial z = S\Pi x\partial x + S\partial y(\Pi y - nx) - x\partial y$. Hinc eliminetur variabilis $x = \frac{y}{t}$, et ob $\partial x = \frac{t\partial y - y\partial t}{tt}$ aequatio illa, per Π divisa, hanc habebit formam:

$$z\partial z = Sy\partial y\left(\frac{1+tt}{tt}\right) - \frac{y\partial y}{\Pi t}(nS + 1) - \frac{Syy\partial t}{t^3}.$$

Jam fiat $S = R + T$, ubi R sit functio indefinita, T autem ita definiatur ut integratio succedat. Hoc facto erit

$$z\partial z = R\left(y\partial y\frac{(1+tt)}{tt} - \frac{ny\partial y}{\Pi t} - \frac{yy\partial t}{t^3}\right) + Ty\partial y\left(\frac{1+tt}{tt} - \frac{n}{\Pi t}\right) - \frac{yyT\partial t}{t^3} - \frac{y\partial y}{\Pi t},$$

cujus aequationis integrale sequenti modo eruitur: Incipiamus a formula per R multiplicata, quae, separatis variabilibus y et t, ad hanc formam reducitur: $R'\left(\frac{\partial y}{y} - \frac{\Pi\partial t}{\Pi t(1+tt) - ntt}\right)$. Ponatur $\frac{\Pi\partial t}{\Pi t(1+tt) - ntt} = \frac{\partial v}{v}$, ita ut v sit functio cognita ipsius t, et membrum illud erit $R'\left(\frac{\partial y}{y} - \frac{\partial v}{v}\right)$, cujus integrale fit $F:\frac{y}{v}$. Ut vero altera pars nostrae aequationis reddatur integrabilis, ponatur $\frac{1+tt}{tt} - \frac{n}{\Pi t} = M$ et $\frac{1}{\Pi t} = N$, eritque ista pars $y\partial y(MT - N) - \frac{yyT\partial t}{t^3}$, cujus integrale statuamus esse $\frac{1}{2}yy(MT - N)$, ita ut $\partial.(MT - N) = -\frac{2T\partial t}{t^3}$. Est vero $\partial.(MT - N) = M\partial T + T\partial M - \partial N$, unde colligitur

$\partial T + \frac{T\partial M}{M} + \frac{2T\partial t}{Mt^3} = \frac{\partial N}{M}$. Cum vero posuerimus

$$\frac{\Pi \partial t}{\Pi t(1+tt)-ntt} = \frac{\partial t}{(\frac{1+tt}{tt}-\frac{n}{\Pi t})t^3} = \frac{\partial t}{M t^3} = \frac{\partial v}{v},$$

habebimus $\partial T + T(\frac{\partial M}{M} + \frac{2\partial v}{v}) = \frac{\partial N}{M}$, quae aequatio, ducta in Mvv, integrabilis redditur; integrale ejus enim erit $M v v T = \int v v \partial N$, unde fit $T = \frac{\int v v \partial N}{M v v}$. His igitur valoribus collectis aequatio pro superficiebus secantibus erit $zz = 2F : \frac{y}{v} + yy(MT - N)$. Est vero $MT - N = \frac{\int v v \partial N - v v N}{v v} = -\frac{2\int N v \partial v}{v v}$, ita ut

$$zz = 2F : \frac{y}{v} - \frac{2\int N v \partial v}{v v}.$$

Corollarium.

§. 32. Si formulae $x^n \Theta$ aequalis fuerit formula az^λ, solutio non fit difficilior; atque pro hoc casu multo generaliori pro superficiebus secantibus haec habebitur aequatio: $\frac{zz}{2\lambda} = F : \frac{y}{v} - \frac{\int N v \partial v}{v v}$. Quin etiam, si loco z proposita fuerit functio quaecunque ipsius z, quae sit Z, ita ut pro superficiebus secandis hanc habeamus aequationem: $Z = x^n \Theta$; tum pro superficiebus secantibus prodibit ista aequatio: $\int \frac{Z \partial z}{Z'} = F : \frac{y}{v} - \frac{2\int N v \partial v}{v v}$, quemadmodum per calculum praecedenti similem perspicere licet.

Problema XII.

§. 33. *Si pro superficiebus secandis fuerit* $a+z$ *functio homogenea unius dimensionis ipsarum* x *et* y, *invenire aequationem pro superficiebus secantibus.*

Solutio.

Posito $y = tx$ sit $a+z = \Theta x$, existente Θ functioni ipsius t. Hinc ergo erit $\partial z = \Theta \partial x + x \partial \Theta$, sive posito $\partial \Theta = \Theta' \partial t = \Theta' \partial . \frac{y}{x}$, erit $\partial z = \Theta \partial x + \frac{\Theta'(x \partial y - y \partial x)}{x}$, unde colligitur $p = \Theta - \Theta' t$ et $q = \Theta'$, ita ut aequatio, quam canonicam supra vocavimus,

$1 + Pp + Qq = 0$ sit $1 + P(\Theta - \Theta' t) + Q\Theta' = 0$. Quo jam huic aequationi satisfiat ponatur $P = S\Theta'$ et $Q = -\frac{1}{\Theta'} + S(\Theta' t - \Theta)$, eritque pro superficiebus secantibus haec aequatio:

$$\partial z = -\frac{\partial y}{\Theta'} + S(\Theta' \partial x + (\Theta' t - \Theta)\partial y).$$

Nunc eliminetur variabilis x ope aequationis $\partial x = \frac{t\partial y - y\partial t}{tt}$, fietque

$$\partial z = -\frac{\partial y}{\Theta'} + \frac{S}{tt}(\Theta' t \partial y(1 + tt) - \Theta' y \partial t - \Theta t t \partial y),$$

quae aequatio, posito brevitatis gratia $\Theta'(1 + tt) - \Theta t = A\Theta'$, erit

$$\partial z = -\frac{\partial y}{\Theta'} + \frac{S\Theta'}{tt}(At\partial y - y\partial t) = -\frac{\partial y}{\Theta'} + S'(At\partial y - y\partial t).$$

Fiat nunc $S' = R + T$, erit aequatio nostra

$$\partial z = R(At\partial y - y\partial t) + T(At\partial y - y\partial t) - \frac{\partial y}{\Theta'},$$

sive, posito $\frac{\partial t}{At} = \frac{\partial v}{v}$, ea hanc induet formam concinniorem:

$$\partial z = R\left(\frac{\partial y}{y} - \frac{\partial v}{v}\right) + T(At\partial y - y\partial t) - \frac{\partial y}{\Theta'},$$

unde integrando colligitur pro superficiebus secantibus

$$z = F : \frac{y}{v} + \int \partial y (AtT - N) - \int T y \partial t,$$

existente $N = \frac{1}{\Theta'}$.

Problema XIII.

§. 34. *Si pro superficiebus secandis fuerit* $a + z = x^n \Theta$, *existente* Θ *functione quacunque ipsius* $t = \frac{y}{x}$, *invenire aequationem pro superficiebus secantibus.*

Solutio.

Hic igitur erit differentiando $\partial z = nx^{n-1}\Theta\partial x + x^n \partial\Theta$, sive, posito $\partial\Theta = \Theta'\partial t = \Theta'\partial . \frac{y}{x}$, habebimus

$$\partial z = nx^{n-1}\Theta\partial x + x^{n-1}\Theta'(\partial y - t\partial x),$$

unde colligitur $p = x^{n-1}(n\Theta - t\Theta')$ et $q = x^{n-1}\Theta'$. Ponatur $\frac{\Theta}{\Theta'} = \Pi$, et cum esse debeat $\frac{1}{\Theta'} + Px^{n-1}(n\Pi - t) + x^{n-1}Q = 0$, huic aequationi satisfacient sequentes valores pro P et Q:

$$P = \frac{S}{x^{n-1}\Theta'} \quad \text{et} \quad Q = \frac{-S(n\Pi - t) - 1}{x^{n-1}\Theta'};$$

unde pro superficiebus secantibus haec prodit aequatio:

$$\partial z = \frac{S(\partial x - (n\Pi - t)\partial y) - \partial y}{x^{n-1}\Theta'}, \text{ sive ob } y = tx \text{ erit}$$

$$\partial z = \frac{S(\partial x + (t - n\Pi)(t\partial x + x\partial t) - \partial y}{x^{n-1}\Theta'}, \text{ sive}$$

$$\partial z = \frac{S(\partial x(1 + t(t - n\Pi) + x\partial t(t - n\Pi) - \partial y}{x^{n-1}\Theta'}.$$

Quod si jam statuatur $S = R + T$, tum vero ponatur brevitatis gratia $\frac{\partial t(t - n\Pi)}{1 + t(t - n\Pi)} = \frac{dv}{v}$, habebimus integrale $z = F : vx + V$, existente differentiali membri secundi

$$\partial V = \frac{\partial x}{x^{n-1}}\left(\frac{T(1 + t(t - n\Pi)}{\Theta'} - \frac{t}{\Theta'}\right) + \frac{\partial t}{x^{n-2}}\left(\frac{T(t - n\Pi)}{\Theta'} - \frac{1}{\Theta'}\right):$$

Statuatur $\frac{1 + t(t - n\Pi)}{\Theta'} = M$ et $\frac{t}{\Theta'} = N$, erit $\partial V = \frac{\partial x}{x^{n-1}}(TM - N)$, cujus integrale si ponatur $V = \frac{x^{2-n}}{2-n}(TM - N)$, necesse est ut fiat

$$\frac{\partial t}{x^{n-2}}\left(\frac{T(t - n\Pi)}{\Theta'} - \frac{1}{\Theta'}\right) = \frac{x^{2-n}}{2-n}\partial.(TM - N),$$

sive $\partial.(TM - N) = (2 - n)\left(\frac{T(t - n\Pi)\partial t}{\Theta'} - \frac{\partial t}{\Theta'}\right)$. Est vero

$$\partial t\frac{(t - n\Pi)}{\Theta'} = \frac{M(t - n\Pi)\partial t}{1 + t(t - n\Pi)} = M\frac{\partial v}{v},$$

quo substituto erit

$$M\partial T + T\partial M - \partial N = (2 - n)\left(MT\frac{\partial v}{v} - \frac{\partial t}{\Theta'}\right),$$

quae aequatio per v^{n-2} multiplicata et integrata praebet

$$TMv^{n-2} = \int v^{n-2}\partial N - (n-2)\int\frac{v^{n-2}\partial t}{\Theta'}.$$

Scholion.

§. 35. Simili plane modo problema adhuc generalius tractari potest, quo pro superficiebus secandis statuitur $a + Z = x_n\Theta$, existente Z functione quacunque ipsius z; tum enim pro superficiebus secantibus, hanc habebimus aequationem: $\int\frac{\partial z}{Z'} = F : xv - (xv)^{2-n}\int\frac{v^{n-3}\partial t}{\Theta'(t - n\Pi)}$. existente $t = \frac{y}{x}$, $\Pi = \frac{\Theta}{\Theta'}$ et $\frac{\partial v}{v} = \frac{\partial t(t - n\Pi)}{1 + t(t - n\Pi}$.

Problema XIV.

§. 36. *Si pro superficiebus secandis detur aequatio:*

$$axy + bxz + cyz = 0,$$

invenire aequationem pro superficiebus secantibus.

Solutio.

Cum hinc differentiando prodeat sequens aequatio:

$$ax\partial y + ay\partial x + bx\partial z + bz\partial x + cy\partial z + cz\partial y = 0,$$

pro aequatione $p\partial x + q\partial y + r\partial z = 0$ erit $p = ay + bz$, $q = ax + cz$, $r = bx + cy$. Hinc si pro secantibus statuatur aequatio $P\partial x + Q\partial y\, R\partial z = 0$, fieri debet $Pp + Qq + Rr = 0$, cui infinitis modis satisfieri potest, una litterarum P, Q, R, evanescente accepta. Casus simpliciores sunt:

$P = ax + cz$	$P = bx + cy$	$P = 0$
$Q = -ay - bz$	$Q = 0$	$Q = bx + cy$
$R = 0$	$R = -ay - bz$	$R = -ax - cz.$

At vero pro P, Q, R valores assumti tales esse debent, ut aequatio $P\partial x + Q\partial y + R\partial z$ fiat possibilis, hoc est ut fiat:

$$\left(\frac{P\partial Q - Q\partial P}{\partial z}\right) + \left(\frac{Q\partial R - R\partial Q}{\partial x}\right) + \left(\frac{R\partial P - P\partial R}{\partial y}\right) = 0,$$

quem in finem pro his tribus litteris P, Q, R omnes valores possibiles indagari debent, qui ex tribus principalibus componuntur. Primum igitur casum per s, secundum per t, tertium per u multiplicemus et productum in unam summam colligamus, quo facto oriuntur valores:

$$P = (as + bt)x + cty + csz;$$
$$Q = bux + (cu - as)\,y - bsz;$$
$$R = -aux - aty - (bt + cu)\,z;$$

Hinc jam pro litteris s, t, u, tales investigari debent valores, ut criterio possibilitatis satisfiat. Inde autem deducimus sequentes valores:

$$\left(\frac{P\partial Q - Q\partial P}{\partial z}\right) = -bs\,(as + bt + cu)\,x - cs\,(cu - as + bt)\,y$$
$$\left(\frac{Q\partial R - R\partial Q}{\partial x}\right) = -au(cu - as - bt)\,y + bu\,(bt + cu + as)z$$
$$\left(\frac{R\partial P - P\partial R}{\partial y}\right) = at\,(as + bt - cu)\,x - ct\,(bt + cu - as)z$$

in quibus singuli coordinatarum coëfficientes seorsim ad nihilum redigi debent, unde deducuntur sequentes aequationes:

$$cu\,(bs + at) + ab\,(ss - tt) - st\,(bb - aa) = 0$$
$$bt\,(au - cs) + ac\,(ss - uu) + us\,(aa - cc) = 0$$
$$as\,(ct + bu) + bc\,(uu - tt) + tu\,(bb - cc) = 0$$

ex quibus, eliminatis quadratis ss, tt, uu, quod fit primam in c, secundam in $-b$, tertiam in $-a$ ducendo, oritur nova: summa enim suppeditat:

$$bsu\,(cc - aa) + atu\,(cc - bb) + cst\,(bb - aa) = 0.$$

Sin autem eliminentur quadrata aa, bb, cc, prodit aequatio identica $0 = 0$; unde concludendum est, trium illarum aequationum unam in binis reliquis jam contineri, ita ut sufficiat binis satisfecisse.

In genere autem hanc quaestionem resolvere non licet. At vero talibus valoridus pro P, Q, R, inventis integratio aequationis

$$P\,\partial x + Q\,\partial y + R\,\partial z = 0,$$

nulla amplius laborat difficultate. Quin adeo, quia litterarum s, t, u una manet indeterminata, infinita integralia exhiberi possunt, quae autem omnia sunt particularia. At vero ex duobus hujusmodi integralibus aequatio generalis pro superficiebus secantibus formabitur, dum unum statuitur functioni cuicunque alterius aequale.

Corollarium.

§. 37. Casu quo ternae litterae a, b, c, sunt inter se aequales, solutio satis commode expediri potest. Tres enim illae aequationes hoc casu in sequentes abeunt:

$$u\,(s + t) + ss - tt = (s + t)\,(u + s - t) = 0$$
$$t\,(u - s) + ss - uu = (u - s)\,(t - s - u) = 0$$
$$s\,(t + u) + uu - tt = (t + u)\,(s + u - t) = 0$$

quibus omnibus satisfit sumendo $t = s + u$. Hoc igitur casu habebimus:

$$P = (2s + u)\, x + (s + u)\, y + s z,$$
$$Q = u x + (u - s)\, y - s z,$$
$$R = - u x - (s + u)\, y - (s + 2u)\, z.$$

Tum autem, posito brevitatis gratia $2s + u = 3f$, $u - s = 3g$, $-(s + 2u) = 3h$, integrale aequationis $P\partial x + Q\partial y + R\partial z = 0$ reperitur fore: $(x + y + z)\,(fx + gy + hz)^2 = C$, sive etiam:

$$(x + y + z)\,((2s + u)\, x + (u - s)\, y - (s + 2u)\, z)^2 = \Delta.$$

Hinc si sumatur $u = 0$ habebimus hanc aequationem:

$$\Delta = (x + y + z)\,(2x - y - z)^2.$$

At sumto $u = s$ erit $\Delta = (x + y + z)\,(x - z)^2$. Ille jam valor, functioni hujus aequatus, praebet aequationem generalissimam pro superficiebus secantibus.

Scholion.

§. 38. Quemadmodum autem postremum integrale investigari debeat hic ostendamus. Spectetur variabilis z tanquam constans et integretur aequatio $P\,\partial x + Q\,\partial y = 0$, quae ut ad homogeneitatem reducatur, statuatur: $x = X + \frac{uz}{s}$ et $y = Y - \frac{(s+u)z}{s}$; tum enim prodit

$$(2s + u)\, X\partial X + (s + u)\, Y\partial X + uX\partial Y + (u - s)Y\partial Y = 0.$$

Unde si hic loco ∂X et ∂Y scribatur X et Y formabitur denominator integrationem producens, qui erit

$$(2s + u)\, XX + (s - 2u)\, YX + (u - s)\, YY$$

qui resolvitur in hos factores:

$$(X + Y)\,((2s + u)X - (s - u)\, Y);$$

factaque solita resolutione reperitur integrale aequationis, scil.:

$$C = (X + Y)\,((2s + u)\, X - (s - u)\, Y)^2);$$

tum vero reperitur $X + Y = x + y + z$, hincque denique resultat haec aequatio finita pro superficiebus secantibus:

$$(2s + u)X + (u - s)Y = (2s + u)x + (s - u)y - (s + 2u)z.$$

Problema XV.

§. 39. *Si pro superficiebus secandis detur aequatio* $A = \frac{zz + axx + byy}{z^n}$, *invenire aequationem pro superficiebus secantibus.*

Solutio.

Cum differentiando prodeat haec aequatio:

$$2axz\partial x + 2byz\partial y + (2 - n)zz\partial z - n(axx + byy)\partial z = 0,$$

posito $2 - n = 2cn$, ita ut $c = \frac{2-n}{2n}$, habebimus $p = 2axz$, $q = 2byz$, $r = n(2czz - axx - byy)$. Jam pro secantibus superficiebus statuatur aequatio $P\partial x + Q\partial y + R\partial z = 0$, fierique debet $Pp + Qq + Rr = 0$, cui aequationi satisfiet sequentibus valoribus pro P, Q, R assumtis: $P = \frac{x}{2z} - \frac{cz}{ax} + Sby$; $Q = \frac{y}{2z} - Sax$; $R = \frac{1}{n}$, quibus in aequatione $P\partial x + Q\partial y + R\partial z = 0$ substitutis termini littera S affecti statim dant $Sby\partial x - Sax\partial y = 0$, unde fit $\frac{b\partial x}{x} = \frac{a\partial y}{y}$, hincque $blx = aly$, seu $\frac{x^b}{y^a} = \text{Const.}$ At vero generaliter habebimus hanc aequationem differentialem:

$$\frac{x\partial x}{2z} + \frac{y\partial y}{2z} - \frac{cz\partial x}{ax} + \frac{\partial z}{n} + S(by\partial x - ax\partial y) = 0,$$

sive hanc:

$$x\partial x + y\partial y + T(by\partial x - ax\partial y) = \frac{2czz\partial x}{ax} - \frac{2z\partial z}{n}$$

existente $T = 2Sz$, quae quantitas ita definiri debet, ut aequatio reddatur divisibilis. Hunc in finem dispiciendum est qualis functio ipsarum x et y pro T assumi queat, ut integratio succedat. Dividatur aequatio per x^m, positoque $\frac{2cn}{a} = m$, aequatio differentialis hoc modo prodibit expressa:

$$\frac{mzz\partial x}{nx^{m+1}} - \frac{2z\partial z}{nx^m} = \frac{x\partial x + y\partial y + T(by\partial x - ax\partial y)}{x^m} = \partial V$$

cujus integrale est: $V = -\frac{zzx^{-m}}{n}$. Quo autem quantitas V determinetur, statuatur $T = \frac{\lambda y}{x}$, eritque

$$\partial V = \frac{\partial x}{x^{m-1}} + \frac{(1-\lambda a)y\partial y}{x^m} + \frac{\lambda byy\partial x}{x^{m+1}},$$

unde, sumto $\lambda = \frac{m}{ma-2b}$, ita ut $1 - \lambda a = \frac{-2b}{ma-2b}$, colligitur

$$\partial V = \frac{\partial x}{x^{m-1}} - \frac{2by\partial y}{(ma-2b)x^m} = \frac{mbyy\partial x}{(ma-2b)x^{m+1}},$$

cujus integrale est $V = \frac{x^{2-m}}{2-m} - \frac{byy}{(ma-2b)x^m}$, ita ut denique habeamus

$$+\frac{zzx^{-m}}{n} + \frac{x^{2-m}}{2-m} - \frac{byy}{(ma-2b)x^m} = \text{Const.}$$

quae aequatio si in x^m ducatur et loco constantis scribatur $F : \frac{x^b}{y^a}$: quam supra revera constantem esse invenimus, erit

$$\frac{zz}{n} + \frac{xx}{2-m} + \frac{byy}{2b-ma} = x^m F : \frac{x^b}{y^a}.$$

Problema XVI.

§. 40. *Si superficies secandae fuerint omnes plana tangentia superficiem coni recti, invenire omnes superficies eas normaliter secantes.*

Solutio.

Concipiatur per verticem coni planum axi normale, ad quod referantur ternae coordinatae x, y, z, erit aequatio pro omnibus istis planis $z = nx\cos.\alpha + ny\sin.\alpha$, ubi α vicem gerit parametri variabilis, unde angulus α satis perplexe definiretur; quamobrem non parametrum istum α, sed potius qnantitatem z' ex calculo eliminare necesse est, quem in finem etiam variabilitas ipsius α in calculum est introducenda. Differentiando igitur erit:

$$\partial z = n\partial x\cos.\alpha + n\partial y\sin.\alpha + n\partial\alpha(y\cos.\alpha - x\sin.\alpha);$$

uude si pro superficiebus secantibus statuatur ut supra $\partial z = P\partial x + Q\partial y$, fieri debet $1 + nP\cos.\alpha + nQ\sin.\alpha = 0$. Statuatur igitur $P = -\frac{1}{n}\cos.\alpha - A\sin.\alpha$; $Q = -\frac{1}{n}\sin.\alpha + A\cos.\alpha$, existente A functione quacunque ipsius α. His jam valoribus pro P et Q substitutis prodit haec aequatio:

$$\partial z = -\frac{\partial x \cos.\alpha}{n} - \frac{\partial y \sin.\alpha}{n} + A(\partial y \cos.\alpha - \partial x \sin.\alpha),$$

quae si a priore subtrahatur, posito $n + \frac{1}{n} = m$, relinquit

$$0 = \partial x(m \cos.\alpha + A \sin.\alpha) + \partial y(m \sin.\alpha - A \cos.\ ) + n\partial\alpha(y \cos.\alpha - x \sin.\alpha),$$

quam aequationem integrabilem fieri ponamus per multiplicatorem M, ejusque integrale habere formam:

$$Mx(m \cos.\alpha + A \sin.\alpha) + My(m \sin.\alpha - A \cos.\alpha) = \Delta,$$

cujus igitur differentiale, aequationi modo erutae aequatum, dat

$$\left.\begin{cases} Mx\partial\alpha(A \cos.\alpha - m \sin.\alpha) + My\partial\alpha(m \cos.\alpha + A \sin.\alpha) \\ + x\partial M(m\cos.\alpha + A\sin.\alpha) + y\partial M(m \sin.\alpha - A \cos.\alpha \\ + Mx\partial A \sin.\alpha \qquad - My\partial A \cos.\alpha \\ \qquad - nM\partial\alpha(y \cos.\alpha - x \sin.\alpha) \end{cases}\right\} = 0$$

ubi si membra per x et per y affecta seorsim ad nihilum redigantur, prodibit duplex aequatio, scilicet:

$$0 = \frac{\partial M}{M}(m \cos.\alpha + A \sin.\alpha) + \partial\alpha(A \cos.\alpha - m \sin.\alpha) + n\partial\alpha \sin.\alpha + \partial A \sin.\alpha;$$

$$0 = \frac{\partial M}{M}(m \sin.\alpha - A \cos.\alpha) + \partial\alpha(m\cos.\alpha + A \sin.\alpha) - n\partial\alpha \cos.\alpha - \partial A \cos.\alpha.$$

Si jam harum aequationum prior in $\cos.\alpha$, altera in $\sin.\alpha$ ducatur, earum summa dabit $m\frac{\partial M}{M} + A\partial\alpha = 0$, unde colligitur $\frac{\partial M}{M} = -\frac{A\partial\alpha}{m}$. At vero si ex binis illis aequationibus quaerantur valores ipsius $\frac{\partial M}{M}$ et inter se rite aequentur, resultabit haec aequatio concinna:

$$\partial\alpha(mm + AA - mn) - m\partial A = 0,$$

sive, ob $m - n = \frac{1}{n}$, erit $\partial\alpha(\frac{m}{n} + AA) = m\partial A$, unde colligitur $\partial\alpha = \frac{mn\partial A}{m + nAA}$, cujus integrale est $\alpha = \sqrt{mn}$. Arc. tag. $\frac{A\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$, hincque deducitur $A = \sqrt{\frac{m}{n}}$. tag. $\frac{\alpha}{\sqrt{mn}}$, quo substituto erit

$$\frac{\partial M}{M} = -\frac{1}{\sqrt{mn}}\partial\alpha \text{ tag. } \frac{\alpha}{\sqrt{mn}},$$

atque integrando prodit $lM = l\cos.\frac{\alpha}{\sqrt{mn}}$, et in numeris: $M = \cos.\frac{\alpha}{\sqrt{mn}}$.

Hoc igitur valore pro multiplicatore M in aequationem nostram introducto habebimus pro superficiebus secantibus:

$$\Delta = m \cos. \frac{\alpha}{\sqrt{mn}} (x \cos. \alpha + y \sin. \alpha) + \sqrt{\frac{m}{n}} \sin. \frac{\alpha}{\sqrt{mn}} (x \sin. \alpha - y \cos. \alpha).$$

Hoc igitur modo nacti sumus aequationem finitam inter x, y, α; unde si ope aequationis $z = n\,x \cos. \alpha + n\,y \sin. \alpha$ angulum α eliminare vellemus, prodiret quidem aequatio inter x, y, z; at vero aequatio inventa sufficit ad superficies construendas. Pro quovis enim valore Δ, qui est parameter variabilis superficierum secantium, sumtis pro lubitu binis α et x, reperitur valor ipsius y, ac praeterea valor ipsius z, quae operatio si per omnes valores ipsius α instituatur, infinitae reperientur curvae, quae conjunctae superficiem secantem formabunt. Unde patet, omnes valores ipsius Δ infinitas suppeditare superficies secantes, quae tamen solutio unam tantum speciem continet, at vero generalius hoc modo eruetur. Cum omnes superficies secandae transeant per verticem coni, omnes sphaerae ex hoc centro descriptae omnes istas superficies normaliter secabunt, quarum aequatio cum sit $x\,x + y\,y + z\,z =$ const. in aequatione supra inventa loco Δ scribi poterit functio quaecunque ipsius $xx + yy + zz$, ita ut aequatio generalis pro superficiebus secantibus sit:

$$F:(xx + yy + zz) = m \cos. \frac{\alpha}{\sqrt{mn}} (x \cos. \alpha + y \sin. \alpha)$$
$$+ \sqrt{\frac{m}{n}} \sin. \frac{\alpha}{\sqrt{mn}} (x \sin. \alpha - y \cos. \alpha).$$

Problema XVII.

§. 41. *Data pro superficiebus secandis hac aequatione:*

$$z\,z + 2\,x\,y = A,$$

invenire aequationem pro superficiebus secantibus.

Solutio.

Cum hic sit differentiando $z\,\partial z + x\,\partial y + y\,\partial x = 0$, erit $p = y$, $q = x$, $r = z$, fierique debet $y\,P + x\,Q + z\,R = 0$, cui aequationi sequentibus tribus modis satisfieri potest:

I. $P = x$, $Q = y$, $R = 0$.
II. $P = 0$, $Q = z$, $R = -x$
III. $P = z$, $Q = 0$, $R = -y$.

Casus primus dat pro superficiebus secantibus aequationem $x\partial x - y\partial x = 0$, unde fit $x.x - y.y = C$. Tum vero combinando secundum casum in Π ductum cum tertio prodit $P = z$, $Q = \Pi z$, $R = -\Pi x - y$, unde oritur aequatio: $z\partial x + \Pi z\partial y - (\Pi x + y)\, \partial z = 0$, ex qua fit $\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial x + \Pi \partial y}{\Pi x + y}$. Jam sumto $\Pi = 1$ statim fit integrando $lz = l\alpha + l(x + y)$, unde $z = \alpha\, (x + y)$. Hinc natum est sequens Problema novae indolis.

Problema XVIII.

§. 42. *Proposita formula differentiali hac:* $\frac{\partial x + \Pi \partial y}{\Pi x + y}$, *invenire functiones ipsarum* x *et* y, *quas loco* Π *assumi oportet, ut formula fiat possibilis.*

Solutio.

Primo ex praecedente problemate liquet, posito $\partial v = \frac{\partial x + \Pi \partial y}{\Pi x + y}$ sumi posse $\Pi = 1$, ut fiat $v = l\,(x + y)$. *Secundo* aeque patet, sumto $\Pi = -1$ fore $v = -l\,(x + y)$. *Tertio* si sumatur $\Pi = \frac{-x}{y}$, fiet $v = \int \frac{y\partial x - x\partial y}{yy - xx} = \frac{1}{2} l \frac{y + x}{y - x}$. *Quarto* sumi poterit $\Pi = \frac{\alpha x - \beta y}{\beta x - \alpha y}$; tum enim habebitur

$$v = \int \frac{\beta x\partial x - \beta y\partial y - \alpha y\partial x + \alpha x\partial y}{\alpha\,(xx - yy)} = \frac{1}{2}\, l\, \frac{x + y}{y - x} + \frac{\beta}{\alpha}\, l \sqrt{xx - yy}.$$

Ut alios casus eruamus, faciamus *quinto* $x = p + q$ et $y = p - q$, ut fiat $\partial v = \frac{(1 + \Pi)\,\partial p + (1 - \Pi)\,\partial q}{(1 + \Pi)\, p - (1 - \Pi)\, q}$. Ponatur $\frac{1 + \Pi}{1 - \Pi} + \Theta$, erit $\partial v = \frac{\Theta \partial p + \partial q}{\Theta p - q}$. Sumatur $\Theta = \frac{\alpha p^m}{\beta q^n - 1}$, fietque $\partial v = \frac{\alpha p^{m-1} \partial p + \beta q^{n-1} \partial q}{\alpha p^m - \beta q^n}$ et $m\partial v = \frac{m\alpha p^{m-1}\, \partial p + m\beta q^{n-1}\, \partial q}{\alpha p^m - \beta q^n}$; unde patet fieri debere $n = m$, ut habeamus $m\, v = l\,(\alpha p^m - \beta\, q^n)$. Sumto igitur $\Pi = \frac{\Theta - 1}{\Theta + 1}$, hoc est $\Pi = \frac{\alpha(x+y)^{m-1} - \beta(x-y)^{n-1}}{\alpha(x+y)^{m-1} + \beta(x-y)^{n-1}}$, obtinebitur integrale

$$v = \tfrac{1}{m}\, l\,(\alpha(x+y)^m - \beta(x-y)^n).$$

Si *Sexto* ponatur $y = tx$, fit $\partial v = \frac{\partial x(1+\Pi t) + \Pi x \partial t}{x(\Pi + t)}$. Ponatur $\frac{1+\Pi t}{\Pi + t} = \Theta$, erit $\partial v = \Theta \frac{\partial x}{x} + \frac{\Pi \partial t}{\Pi + t}$, existente $\Pi = \frac{t\Theta - 1}{t - \Theta}$. Hinc si statuatur $\Theta = n$, ut sit $\Pi = \frac{tn+1}{t-n}$, erit $\partial v = \frac{n\partial x}{x} + \frac{nt\partial t}{tt-1} - \frac{\partial t}{tt-1}$, ideoque $v = nlx + \frac{1}{2}nl(tt-1) + \frac{1}{2}l\frac{1+t}{1-t}$, sive in x et y erit $v = nl\sqrt{yy-xx} + \frac{1}{2}l\frac{x+y}{x-y}$, quae solutio cum superiore tertia prorsus convenit. Tandem generalius posito $\sqrt{yy-xx} = u$, si U fuerit functio quaecunque ipsius u, valor $\Pi = \frac{Uy-x}{y-Ux}$ quaesito satisfaciet. Facta enim substitutione formula $\partial v = \frac{\partial x + \Pi \partial y}{\Pi x + y}$ abit in hanc: $\partial v = \frac{y\partial x - x\partial y}{yy-xx} + \frac{U(y\partial y - x\partial x)}{yy-xx}$, unde colligitur

$$v = \tfrac{1}{2}\, l\frac{y+x}{y-x} + \int \frac{U\partial u}{u}.$$

Scholion.

§. 43. Quaestio hic formari potest hujus indolis generalissima: Si p, q, et P, Q denotent functiones homogeneas nullius dimensionis binarum variabilium x et y datas, et proposita fuerit haec formula differentialis:

$$\partial v = \frac{p\partial x + \Pi q \partial y}{\Pi P + Q}\, x^{n-1},$$

in quam ingreditur functio indeterminata Π, eam ita determinare ut integratio succedat. Hanc autem investigationem maxime arduam in alia dissertatione suscipiam.