1820

Solutio problematis mechanici non parum curiosi

Leonhard Euler

SOLUTIO PROBLEMATIS MECHANICI NON PARUM CURIOSI

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhibuit die 14 Martii 1782.

§. 1. Concipiatur planum inclinatum AO, quod cum horizonzontali HO angulum constituat $AOH = \zeta$. Huic plano primum in A incumbat discus circularis $Ta X$, cujus centrum sit C et radius $CX = a$. Manifestum autem est, loco hujus disci circularis assumi posse vel globum vel cylindrum, vel aliud quodvis corpus rotundum, si modo ejus axis perpetuo maneat horizontalis. Ponamus hujus corporis massam $= M$, momentum vero iuertiae respectu axis $= Mbb$; ubi quidem assumo centrum gravitatis totius corporis incidere in centrum disci C. Tab. I. Fig. 1.

§. 2. Huic porro disco circumvolutum sit filum in sensum $ATaX$, cujus terminus extremus A in hoc ipso puncto A plano sit affixus. Hinc statim patet, filum impedire, quominus discus, volvendo super plano, descendat; sin autem radendo descensum inchoaret, filum relaxaretur. In calculo autem assumi convenit filum a disco jam evolutum manere in directum extensum. Quamobrem necesse est ut discus partim radendo partim volvendo descendere incipiat. Etiamsi autem hoc motu frictio oriretur, coacti tamen sumus ab ea animum abstrahere, quandoquidem calculus nullo modo ad frictionem extendi potest.

§. 3. His praemissis primo ponamus elapso tempore t discum nostrum descendendo pervenisse in situm XaT. Tum igitur filum a disco evolutum situm tenebit AT, ita ut in T discum tangat, quamobrem perpetuo erit AT $=$ AX; unde si vocemus spatium percursum AX $= x$, erit etiam longitudo fili evoluti AT $= x$. Hinc si ponatur angulus XAT $= \theta$, qui a recta CA bifariam secatur, erit $\text{tag.}\, \frac{1}{2}\theta = \frac{a}{x}$, ideoque $x = a \cot. \frac{1}{2}\theta$.

§. 4. Denotante nunc π angulum duobus rectis aequalem, erit angulus XCT $= \pi - \theta$. Evidens autem est labente tempore angulum θ, qui initio erat $= \pi$, continuo decrescere. Hinc jam determinari poterit locus, ubi punctum disci reperiatur, quod initio planum in A tangebat. Concipiatur enim filum TA solutum iterum disco obvolvi et abscindatur arcus Ta rectae AT $= x$ aequalis, eritque a locus puncti A, qui igitur a situ CX, ad planum nunc normali, distat angulo XCa hicque angulus metitur motum gyratorium, quo discus ab initio jam processit.

§. 5. Ponamus igitur istum angulum XC$a = \Phi$, et quia arcus TX$a = \frac{AT}{CT} = \frac{x}{a}$, ob angulum XCT $= \pi - \theta$ erit

$$\Phi = \frac{x}{a} - \pi + \theta = \cot. \tfrac{1}{2}\theta + \theta - \pi.$$

Unde patet initio, ubi $x = 0$ et $\theta = \pi$, fuisse etiam $\Phi = 0$, uti rei natura postulat. Quare si ponamus $\pi - \theta = \omega$, ut sit $\theta = \pi - \omega$ et initio fuerit $\omega = 0$, habebitur $\Phi = \text{tag.}\, \frac{1}{2}\omega - \omega$. Primo igitur initio, ubi angulus ω valde parvus, erat $\Phi = -\frac{1}{2}\omega$. Mox autem, aucto angulo ω, angulus Φ ad nihilum redigetur, tum vero evadet positivus.

§. 6. Quod si jam principia mechanica consulamus, sumto elemento temporis ∂t constante, ac denotante g altitudinem lapsus liberi uno minuto secundo peracti, si hoc tempore ponamus tensionem fili AT $=$ T, hinc orietur vis motu progressivo contraria T$\cos. \theta$.

At vero ob gravitatem, seu pondus M, vis secundum directionem plani urgens erit M sin. ζ, hinc vis accelerans motum progressivum ita exprimetur: $\frac{M \sin.\zeta - T \cos.\theta}{M}$, cui ergo vi ipsa acceleratio $\frac{\partial\partial x}{2g\partial t^2}$ aequalis est ponenda, unde pro hoc motu ista habebitur aequatio: $\frac{\partial\partial x}{2g\partial t^2} = \sin.\zeta - \frac{T}{M}\cos.\theta$. At vero pro motu gyratorio habebitur momentum vis gyrantis $= Ta$, quod divisum per momentum vis inertiae Mbb aequale erit accelerationi gyratoriae $\frac{\partial\partial\Phi}{2g\partial t^2}$, unde oritur ista aequatio: $\frac{\partial\partial\Phi}{2g\partial t^2} = \frac{T}{M}\cdot\frac{a}{bb}$.

§. 7. His aequationibus totus corporis motus, tam progressivus quam gyratorius, perfecte determinatur. At vero hic probe notandum est, tensionem fili T adhuc prorsus esse incognitam, unde eam ex calculo eliminari conveniet. Hunc in finem ex posteriore aequatione quaeratur $\frac{T}{M} = \frac{bb}{a}\cdot\frac{\partial\partial\Phi}{2g\partial t^2}$, hocque valore in priore substituto oritur ista aequatio $\frac{a\partial\partial x + bb\partial\partial\Phi\cos.\theta}{2ag\partial t^2} = \sin.\zeta$, ad quam resolvendam necesse est ut relatio inter binas variabiles x et Φ in computum ducatur, quas ergo variabiles ad angulum θ revocemus.

§. 8. Cum igitur sit $x = a\cot.\frac{1}{2}\theta$, erit $\partial x = \frac{-\partial\theta}{2\sin.\frac{1}{2}\theta^2} = \frac{-a\partial\theta}{1-\cos.\theta}$. Porro, ob $\Phi = \cot.\frac{1}{2}\theta + \theta - \pi$, erit

$$\partial\Phi = \frac{-\partial\theta}{1-\cos.\theta} + \partial\theta = \frac{-\partial\theta\cos.\theta}{1-\cos.\theta},$$

hincque colligitur $\partial x = \frac{a\partial\Phi}{\cos.\theta}$. Hac relatione inter differentialia ∂x et $\partial\Phi$ inventa multiplicemus aequationem differentio-differentialem postremam per $\partial x = \frac{a\partial\Phi}{\cos\theta}$, fiet $\frac{\partial x\partial\partial x + bb\partial\Phi\partial\partial\Phi}{2g\partial t^2} = \partial x \sin.\zeta$, quae aequatio sponte est integrabilis, eaque integrata prodit:

$$\frac{\partial x^2 + bb\partial\Phi^2}{4g\partial t^2} = x\sin.\zeta,$$

ubi nulla constantis additione est opus. Si enim faciamus $\frac{\partial x}{\partial t} = v$ et $\frac{\partial\Phi}{\partial t} = u$, erit v celeritas progressiva et u celeritas angularis seu gyratoria; utraque autem primo initio, ubi $x = 0$, evanescere debet.

Facta autem substitutione oritur aequatio $vv + bbuu = 4gx \sin. \zeta$ ex qua simul conservatio principii virium vivarum elucet.

§. 9. Loco binarum autem variabilium x et Φ introducamus angulum θ; ope valorum supra pro ∂x et $\partial\Phi$ inventorum, quibus in praecedente aequatione substitutis oritur sequens aequalitas:

$$\frac{\partial\theta^2}{(1-\cos.\theta)^2}(aa + bb\cos.\theta^2) = 4ga\,\partial t^2 \sin.\zeta \cot.\tfrac{1}{2}\theta$$

sive $\partial t^2 = \frac{\partial\theta^2(aa+bb\cos.\theta^2)}{4ga\sin.\zeta\sin.\theta(1-\cos.\theta)}$, ob $\cot.\frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1+\cos.\theta}{1-\cos.\theta}}$ et $\sqrt{(1-\cos.\theta)(1+\cos.\theta)} = \sin.\theta$. Hinc ergo colligitur tempus

$$t = \frac{1}{2\sqrt{ga\sin.\zeta}}\int\partial\theta\sqrt{\frac{aa+bb\cos.\theta^2}{\sin.\theta(1-\cos.\theta)}}.$$

Facile autem patet hanc integrationem neque ad logarithmos neque ad arcus circulares reduci posse. Concessis autem quadraturis non solum pro quovis angulo θ tempus t, sed etiam ad quodvis tempus t vicissim angulus θ assignari poterit.

§. 10. Hanc formulam integralem ita integrari oportet, ut initio motus, ubi $\theta = \pi$, evanescat. Scribamus autem, ut supra, $\pi - \omega$ loco θ, quo integratio a termino $\omega = 0$ incipiat, et quia tum $\cos.\theta = -\cos.\omega$ et $\sin.\theta = \sin.\omega$, habebimus

$$t = \frac{1}{2\sqrt{ga\sin.\zeta}}\int\partial\omega\sqrt{\frac{aa+bb\cos.\omega^2}{\sin.\omega(1+\cos\omega)}}.$$

Relatio igitur inter tempus t et angulum ω tanquam cognita spectari poterit.

§. 11. Hinc etiam ad quodvis tempus binas celeritates, progressivam $v = \frac{\partial x}{\partial t}$ et angularem $u = \frac{\partial\Phi}{\partial t}$, per angulum ω commode exprimere licet. Cum enim sit

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial\omega}{\partial t}\cdot\frac{a}{1+\cos.\omega} \text{ et } \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{-\partial\omega}{\partial t}\cdot\frac{\cos.\omega}{1+\cos.\omega}, \text{ ob}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = 2\sqrt{\frac{ga\sin.\zeta\sin.\omega(1+\cos.\omega)}{aa+bb\cos.\omega^2}}, \text{ reperietur}$$

$$v = 2a\sqrt{\frac{ga\sin.\zeta\,\mathrm{tag}.\frac{1}{2}\omega}{aa+bb\cos.\omega^2}} \text{ et } u = -2\cos.\omega\sqrt{\frac{ga\sin.\zeta\,\mathrm{tag}.\frac{1}{2}\omega}{aa+bb\cos.\omega^2}}.$$

Unde patet, quamdiu angulus ω recto est minor, celeritatem angularem u esse negativam sive in sensum $X\,a\,T\,X$ vergere; ubi autem angulus ω est rectus, ista celeritas gyratoria prorsus evanescit; deinceps vero evadit positiva.

Investigatio tensionis.

§. 12. Tensio T immediate deducitur ex posteriore aequatione differentiali secundi gradus: $\frac{\partial\partial\Phi}{2g\partial t^2} = \frac{Ta}{Mbb}$, ex qua fit $T = \frac{Mbb\partial\partial\Phi}{2ag\partial t^2}$, ubi valor differentio - differentialis $\partial\partial\Phi$ ad differentialia primi gradus reduci debet, id quod sequenti modo praestabitur. Cum sit $\partial x = \frac{a\partial\Phi}{\cos.\Phi}$ (§. 8.), erit $\partial\partial x = \frac{a\partial\partial\Phi}{\cos.\theta} + \frac{a\partial\Phi\partial\theta\sin.\theta}{\cos.\theta^2}$, qui valor in aequatione differentio - differentiali §. 7. data

$$a\partial\partial x + bb\partial\partial\Phi\cos.\theta = 2ag\partial t^2\sin.\zeta,$$

substitutus praebet

$$\frac{\partial\partial\Phi(aa + bb\cos.\theta^2)}{\cos\theta} + \frac{aa\partial\Phi\partial\theta\sin.\theta}{\cos\theta^2} = 2ag\partial t^2\sin.\zeta.$$

Si jam differentialis $\partial\Phi$ loco valor supra inventus, qui erat $\partial\Phi = \frac{-\partial\theta\cos.\theta}{1-\cos.\theta}$, introducatur, aequatione in ordinem redacta prodibit ista relatio:

$$\partial\partial\Phi(aa + bb\cos.\theta^2) = \frac{\partial\theta^2(aa\cos.\theta + bb\cos.\theta^3 + 2aa\sin.\theta^2)}{2\sin.\theta(1-\cos.\theta)},$$

ubi scilicet etiam loco $2ag\partial t^2\sin.\zeta$ valorem per angulum θ, scilicet $\frac{\partial\theta^2(aa + bb\cos.\theta^2)}{2(1-\cos.\theta)\sin.\theta}$ substituimus. Ex hac autem aequatione colligimus differentiale

$$\partial\partial\Phi = \frac{\partial\theta^2(aa\cos.\theta + bb\cos.\theta^3 + 2aa\sin.\theta^2)}{2\sin.\theta(1-\cos.\theta)(aa + bb\cos\theta^2)}.$$

§. 13. Cum igitur supra §. 9. invenerimus

$$\partial t^2 = \frac{\partial\theta^2(aa + bb\cos.\theta^2)}{4ga\sin.\zeta\sin.\theta(1-\cos.\theta)},$$

per hunc valorem dividendo fit

$$\frac{\partial\partial\Phi}{\partial t^2} = \frac{2ga\sin.\zeta(aa\cos.\theta + bb\cos.\theta^3 + 2aa\sin.\theta^2)}{(aa + bb\cos.\theta^2)^2},$$

unde denique tensio $T = \frac{Mbb}{2ga} \cdot \frac{\partial\partial\Phi}{\partial t^2}$ per quantitatem mere finitam exprimitur, cum inde prodeat

$$T = \frac{Mbb \sin.\zeta\,(aa \cos.\theta + bb \cos.\theta^3 + 2aa \sin.\theta^2)}{(aa + bb \cos.\theta^2)^2},$$

sive, si loco anguli θ angulus ω introducatur, erit

$$T = Mbb \sin.\zeta \times \frac{2aa \sin.\omega^2 - aa \cos.\omega - bb \cos.\omega^3}{(aa + bb \cos.\omega^2)^2}.$$

§. 14. Hinc perspicimus, circa ipsum motus initium, ubi angulus ω est valde parvus, tensionem fili esse negativam. Erit enim, ob ω minimum:

$$T = -Mbb \sin.\zeta \times \frac{aa + bb - 2aa\omega\omega}{(aa + bb)^2},$$

haecque tensio tamdiu manet negativa, donec fiat

$$2aa \sin.\omega^2 = aa \cos.\omega + bb \cos.\omega^3,$$

quem autem terminum in genere determinare non licet, nisi per resolutionem aequationis cubicae. Dum autem tensio negativa admitti potest, necesse est fili naturam ita comparatam statuere, ut non solum extensioni, sed etiam contractioni resistat. Quoniam autem revera, simulac filum relaxatur, nullam vim sese extendendi exerit, verus corporis motus circa initium penitus a calculo aberrabit, propterea quod tensio, ubi calculus eam monstrat negativam, potius ad nihilum redigi est censenda, atque ex hoc principio novo calculo opus erit, ut motus verus assignari possit.

Rectificatio calculi praecedentis.

§. 15. Quia circa motus initium filum relaxatur, ideoque nullam vim in corpus exerit, propter remotam frictionem corpus solo motu progressivo, sive rependo, super plano inclinato descendet, hocque motu tamdiu progredi perget, quamdiu filum manet laxum, neque ullus motus angularis se admiscebit. Locum igitur investigari oportet ubi filum tendi incipiet.

§. 16. Quo haec clarius intelligantur teneat discus noster situm CBD super plano inclinato AO. A puncto fixo A ducatur tangens AD, quae aequalis erit spatio percurso AB $= x$; ductisque ut ante radiis CB, CD, sit ut hactenus angulus BAD $= \theta$, ejusque complementum ad duos rectos BCD $= \omega$. Cum igitur filum ab arcu BD evolutum longitudinem habeat $= a\omega$, filum erit laxum quamdiu distantia AD minor est hoc arcu; unde quaeri oportet locum nostri disci, ubi fit recta AD $=$ AB $= x$ aequalis arcui BD $= a\omega$. Cum igitur sit $x = a$ tag. $\frac{1}{2}\omega = \frac{a \sin.\omega}{1 + \cos.\omega}$, filum tum demum intendi incipiet, ubi fit tag. $\frac{1}{2}\omega = \omega$, ita ut quaeri debeat arcus cujus tangens duplo ejus sit major. Calculo autem rite instituto deprehenditur, fore hunc angulum $66^\circ, 46', 56''$, qui si ponatur $= \frac{1}{2}\alpha$, ita ut in hoc statu $\omega = \alpha$, erit AB $= \alpha a$, sive in partibus radii AB $= 2{,}331178.a$.

Tab. I. Fig. 2.

§. 17. Ad hunc igitur locum usque B, corpus motu solo progressivo super plano inclinato descendet, qui motus ex sola formula $\frac{\partial\partial x}{2g\partial t^2} = \sin.\zeta$ derivari poterit. Haec enim aequatio per ∂x multiplicata et integrata dat $\frac{\partial x^2}{4g\partial t^2} = x \sin.\zeta$, unde colligitur $\partial t = \frac{\partial x}{2\sqrt{g x \sin.\zeta}}$, hincque $t = \sqrt{\frac{x}{g \sin.\zeta}}$. Facto igitur $x = \alpha a$ tempus descensus ab A ad B usque erit $t = \sqrt{\frac{\alpha a}{g \sin.\zeta}}$, quod tempus jam in minutis secundis erit expressum. Praeterea vero hoc loco, a quo motus mixtus incipiet, percurso scilicet spatio AB $= \alpha a$, erit angulus BCD $= \alpha = 133^\circ, 33', 52''$ et angulus BAD $= 46^\circ, 26', 8''$.

§. 18. Pro motu sequente determinando eaedem manebunt aequationes differentiales secundi gradus, quas supra tractavimus, scilicet $\frac{\partial\partial\Phi}{2g\partial t^2} = \frac{Ta}{Mbb}$ et $\frac{\partial\partial x}{2g\partial t^2} = \sin.\zeta - \frac{T}{M}\cos.\theta$, quas autem nunc ita integrari oportet, ut posito $x = \alpha a$ fiat angulus $\Phi = 0$ atque insuper ut fiat $\frac{\partial x^2}{\partial t^2} = 4g\alpha a \sin.\zeta$.

§. 19. Cum igitur sit $\frac{T}{M} = \frac{bb\partial\partial\Phi}{2ag\partial t^2}$, hoc valore in altera aequatione substituto colligitur fore $\sin.\zeta = \frac{a\partial\partial x + bb\partial\partial\Phi\cos.\theta}{2ag\partial t^2}$, quae aequatio ducta in $\partial x = \frac{a\partial\Phi}{\cos.\theta}$ et integrata sequentem subministrat:

$$\frac{\partial x^2 + bb\partial\Phi^2}{4g\partial t^2} = C + x\sin.\zeta.$$

Hic ad constantem C definiendam loco $\partial\Phi$ restituendus est ejus valor $\frac{\partial x\cos.\theta}{a}$, quo facto aequatio illa hanc induet formam:

$$\frac{\partial x^2(aa + bb\cos.\theta^2)}{4gag\partial t^2} = C + x\sin.\zeta.$$

Quoniam igitur motus initio esse debet $x = \alpha a$ et $\frac{\partial x^2}{\partial t^2} = 4g\alpha a\sin.\zeta$, his substitutis fiet constans $C = + \frac{\alpha bb\cos.\alpha^2\sin.\zeta}{a}$. Hinc igitur, posito brevitatis gratia $\frac{\alpha bb\cos.\alpha^2}{a} = f$, erit

$$\frac{\partial x^2(aa + bb\cos.\theta^2)}{4aag\partial t^2} = (x + f)\sin.\zeta.$$

§. 20. Cum hujus motus initio, quod in puncto B statuimus, sit $\frac{\partial x}{\partial t} = 2\sqrt{g\alpha a}\sin.\zeta$, ob $\partial\Phi = \frac{\partial x\cos.\theta}{a}$ et $\cos.\theta = -\cos.\alpha$ erit hoc momento celeritas angularis $\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \cos.\alpha\sqrt{\frac{4g\alpha\sin.\zeta}{a}}$, cum tamen fuisset $\Phi = 0$, id quod insigne paradoxon videtur, dum primo instanti subito celeritas angularis finita generatur, cujus rei caussa est, quod, simulac filum in directum extenditur, ne minimam quidem elongationem admittere in calculo statuitur. Totum autem hoc paradoxon diluitur, quando filo vim quandam sese quam minime expandendi tribuimus. Tum enim, quod hic calculus puncto temporis evenire ostendit, tempusculo quodam valde parvo peragetur. Similis autem saltus deprehenditur in collisione corporum, prouti vulgo proponi solet; ubi etiam in instanti maxima motus mutatio contingere deberet.

§. 21. Ex illa aequatione §. 19. inventa deducitur quadratum celeritatis progressivae, scilicet $\frac{\partial x^2}{\partial t^2} = \frac{4aag(x+f)\sin.\zeta}{aa + bb\cos.\theta^2}$, ex qua porro concluditur $\partial t = \frac{-\partial\theta}{2\sqrt{g\,\sin.\zeta}} \sqrt{\frac{aa + bb\cos.\theta^2}{(x+f)(1-\cos.\theta)^2}}$, cujus integratio a termino $\pi - \alpha$ inchoari debet, atque integrale dabit tempus descensus a loco B in minutis secundis expressum.

§. 22. Deinde ipsa tensio fili simili modo ac supra definiri poterit, dum loco $x \sin.\zeta$ scribitur ratione constantis adjectae valor $(x+f)\sin.\zeta$. Quia igitur est $x = \frac{a\sin.\theta}{1-\cos.\theta}$, erit

$$x + f = \frac{a\sin.\theta + f(1-\cos.\theta)}{1-\cos.\theta}.$$

Unde patet, si loco x scribendum sit $x+f$, loco $a\sin.\theta$ scribendum fore $a\sin.\theta + f(1-\cos.\theta)$. Expressio igitur tensionis T supra §. 13. exhibita, qua erat:

$$T = Mbb\sin.\zeta \times \frac{aa\cos.\theta + bb\cos.\theta^3 + 2a\sin.\theta \,.\, a\sin.\theta}{(aa+bb\cos.\theta^2)^2}$$

facta substitutione pro $a\sin.\theta$ pro hoc motu erit:

$$T = Mbb\sin.\zeta \times \frac{aa\cos\theta + bb\cos.\theta^3 + 2a\sin.\theta(a\sin.\theta + f(1-\cos.\theta))}{(aa+bb\cos.\theta^2)^2}.$$

§. 23. Hinc pro initio motus posterioris in loco B, ubi $\theta = \pi - \alpha$, ideoque sin. θ = sin. α et cos. θ = − cos. α, haec tensionis expressio sequentem induit formam:

$$T = Mbb\sin.\zeta \times \frac{2a\sin.\alpha(a\sin.\alpha + f(1+\cos\alpha)) - aa\cos\alpha - bb\cos.\alpha^3}{(aa+bb\cos.\alpha^2)^2}$$

quae substituto valore $f = \frac{\alpha bb\cos.\alpha^2}{a} = \frac{bb\sin.\alpha\cos.\alpha^2}{a(1+\cos.\alpha)}$ (ob $\alpha = \text{tag.}\frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin.\alpha}{1+\cos.\alpha}$), reducitur ad hanc:

$$T = Mbb\sin.\zeta \times \frac{2\sin.\alpha^2 - \cos.\alpha}{aa+bb\cos.\alpha^2}.$$

§. 24. Cum autem celeritas angularis in puncto B subito finita evadat, ut supra §. 20. monuimus, ad eam generandam vi adeo infinita opus est, quod autem hic longe secus evenit; unde novum paradoxon sese offert, quod autem facile resolvitur. Nam quia pro toto hoc motu sumsimus $\partial \Phi = \frac{\partial x \cos. \theta}{a}$, haec aequatio, quae in motu praecedente neutiquam locum habet, in posterioris motus initio nondum valere potest. Quamobrem, cum hac relatione usi simus ad tensionem T determinandam, mirum non est eam in ipso initio B a veritate aberrare. Quoties enim hujusmodi saltus occurrit, calculus nunquam congruere potest.