1820

Probleme de geometrie resolu par l'analyse de Diophante

Leonhard Euler

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE

RÉSOLU,

PAR L'ANALYSE DE DIOPHANTE.

PAR

M. L. EULER.

Présenté à la Conférence le 4 Mars 1782.

§. 1.

Le sujet du problème dont il s'agit dans ce mémoire, est tiré de la Trigonométrie rationnelle. On demande les trois côtés x, y, z, d'un triangle dont les lignes tirées des angles par le centre de gravité du triangle soyent toutes trois exprimées en nombres rationnels; c'est-à-dire: on demande trois nombres x, y, z, tels que

$$2xx + 2yy - zz = \square$$
$$2yy + 2zz - xx = \square$$
$$2zz + 2xx - yy = \square.$$

J'ai déjà donné, à différentes reprises, des solutions de ce problème, sans qu'aucune m'ait entièrement satisfait. Celle que je présente ici réunit, à beaucoup d'élégance, la plus grande généralité. Mais avant d'entrer en matière il sera bon de faciliter la solution par le Lemme suivant:

LEMME.

§. 2. Deux nombres de la forme :

$$A^2 + 2PAB + B^2 \text{ et } A^2 + 2QAB + B^2,$$

seront toujours quarrés, lorsque

$$A = 4(P + Q) \text{ et } B = (P - Q)^2 - 4.$$

Démonstration.

Multiplions l'une de ces formes par l'autre, et nous aurons le produit suivant :

$$A^4 + 2(P+Q)A^3B + 2(2PQ+1)A^2B^2 + 2(P+Q)AB^3 + B^4.$$

Soit la racine de cette quantité quarrée

$$A^2 + (P + Q)AB - B^2,$$

et puisque le quarré est

$$A^4 + 2(P+Q)A^3B + [(P+Q)^2 - 2]A^2B^2 - 2(P+Q)AB^3 + B^4,$$

en comparant cette forme avec la précédente on voit que, pour que l'une soit égale à l'autre, il faut que

$$((P - Q)^2 - 4)A = 4(P + Q)B,$$

donc $A = 4(P + Q)$ et $B = (P - Q)^2 - 4$.

Substituant ces valeurs dans l'une ou l'autre des deux formes du lemme, elle devient un quarré. Par exemple la premiere, en y faisant ces substitutions, deviendra :

$$16(P + Q)^2 + 2P[4(P + Q)(P - Q)^2 - 16(P + Q)]$$
$$+ (P - Q)^4 - 8(P - Q)^2 + 16,$$

où il faut remarquer que

$$(P - Q)^4 + 8P(P + Q)(P - Q)^2 = (P - Q)^2(3P + Q)^2,$$
$$16(P+Q)^2 + 32P(P+Q) - 8(P-Q)^2 = -8(P-Q)(3P+Q).$$

De cette façon la forme se reduit à

$$((P - Q)(3P + Q) - 4)^2.$$

Or le produit des deux formes du lemme étant un quarré et la premiere l'étant aussi, il est clair que l'autre forme doit être nécessairement de même un quarré. Aussi la racine se trouvera-t-elle, par des procédés semblables, être $(Q - P)(3Q + P) - 4$.

Corollaire.

§. 3. À l'égard des valeurs de A et B il faut remarquer: 1°) qu'à cause de la permutabilité évidente de ces deux quantités, on pourra aussi faire:

$$A = (P - Q)^2 - 4 \quad \text{et} \quad B = 4(P + Q);$$

2°) que ces valeurs peuvent être simplifiés dans certains cas. Car puisque $(P - Q)^2 = (P + Q)^2 - 4PQ$; en mettant cette valeur dans l'expression de B, on aura $B = (P + Q)^2 - 4(PQ + 1)$, de sorte que, toutes les fois que $PQ + 1 = n(P + Q)$; on pourra diviser A et B par le même nombre $P + Q$, et on aura $A = 4$ et $B = P + Q - 4n$. Quant aux racines des deux formes proposées, savoir

$$(P - Q)(3P + Q) - 4 \quad \text{et} \quad (Q - P)(3Q + P) - 4,$$

comme la premiere peut être représentée par

$$(P + Q)(P - Q) + 2P(P - Q) - 4,$$

et que $2P(P - Q) - 4 = 2P(P + Q) - 4(PQ + 1)$, à cause de $PQ + 1 = n(P + Q)$ on pourra diviser par $P + Q$, de sorte que la racine de la premiere forme $= 3P - Q - 4n$, et, à cause de la permutabilité de P et Q la racine de l'autre forme sera $3Q - P - 4n$.

Solution du Problème proposé.

§. 4. Soit
$$\begin{aligned} 2xx + 2yy - zz &= pp \\ 2xx + 2zz - yy &= qq \\ 2yy + 2zz - xx &= rr \end{aligned}$$

et en mettant $xx + yy + zz = s$, on aura

$$pp + 3zz = qq + 3yy = rr + 3xx = 2s.$$

Ensuite on trouve aussi que

$$2pp + 2qq - rr = 9xx$$
$$2pp + 2rr - qq = 9yy$$
$$2qq + 2rr = pp = 9zz.$$

Quoique ces propriétés ne contribuent en aucune manière à la sosution du Problème, elles méritoient bien d'être remarquées ici en passant. Quant à la solution même, elle se déduit des opérations suivantes :

§. 5. Prenons la différence de la premiere et seconde de nos trois équations fondamentales, qui sera

$$pp - qq = 3\ (yy - zz),$$

ou bien, en facteurs on aura

$$(p + q)\ (p - q) = 3\ (y + z)\ (y - z).$$

Soit $p + q = \frac{3a}{b}(y - z)$

$p - q = \frac{b}{a}(y + z)$

et la somme des quarrés sera

$$(p+q)^2 + (p-q)^2 = 2pp + 2qq = \frac{9aa}{bb}(y-z)^2 + \frac{bb}{aa}(y+z)^2.$$

Or les équations fondamentales donnent

$$2pp + 2qq = 8xx + 2yy + 2zz, \text{ ou bien}$$
$$2pp + 2qq = 8xx + (y + z)^2 + (y - z)^2,$$

d'où l'on tire cette équation entre x, y, z :

$$\frac{9aa}{bb}(y - z)^2 + \frac{bb}{aa}(y + z)^2 = 8xx + (y + z)^2 + (y - z)^2,$$

qui peut aussi être représentée ainsi :

$$8xx = \frac{9aa - bb}{bb}(y - z)^2 + \frac{bb - aa}{aa}(y + z)^2.$$

§. 6. La troisième équation fondamentale $2yy + 2zz - xx = rr$ se transforme aisément en celle-ci :

$$(y + z)^2 + (y - z)^2 - xx = rr,$$

qui multipliée par 8 devient

$$8rr = 8\ (y + z)^2 + 8\ (y - z)^2 - 8xx$$

équation qui, si l'on met à la place de $8xx$ la valeur trouvée au précédent §, sera

$$8rr = \frac{9(bb - aa)}{bb}(y - z)^2 + \frac{9aa - bb}{aa}(y + z)^2.$$

§. 7. Mettons maintenant

$$y + z = a(c + d);$$
$$y - z = b(c - d);$$

et les deux expressions trouvés pour $8xx$ et $8rr$ prendront les formes suivantes :

$$2xx = 2aa(cc + dd) + cd(bb - 5aa);$$
$$2rr = 2bb(cc + dd) + cd(9aa - 5bb);$$

qui, divisées l'une par $2aa$ et l'autre par $2bb$, donneront :

$$\frac{xx}{aa} = cc + dd + \frac{bb - 5aa}{2aa} \cdot cd;$$
$$\frac{rr}{bb} = cc + dd + \frac{9aa - 5bb}{2bb} \cdot cd.$$

§. 8. En comparant ces deux expressions avec les formes du lemme, nous verrons que $A = c$, $B = d$,

$$P = \frac{bb - 5aa}{4aa} \text{ et } Q = \frac{9aa - 5bb}{4bb}.$$

De ces valeurs on déduit aisément :

$$n(P + Q) = \frac{n(b^4 - 10aabb + 9a^4)}{4aabb};$$
$$PQ + 1 = -\frac{5}{4}\frac{(b^4 - 10aabb + 9a^4)}{4aabb};$$
$$\text{donc } n = -\frac{5}{4}.$$

§. 9. Or en vertu du corollaire §. 3. il y a $A = 4$ et $B = P + Q - 4n$, donc $c = 4$ et $d = \frac{(9aa + bb)(aa + bb)}{4aabb}$, portant

$$y + z = \frac{a(16aabb + (9aa + bb)(aa + bb))}{4aabb};$$
$$y - z = \frac{b(16aabb - (9aa + bb)(aa + bb))}{4aabb};$$

Et puisque, en vertu du même corollaire,

$$\frac{x}{a} = 3P - Q - 4n \text{ et } \frac{r}{b} = 3Q - P - 4n,$$

nous aurons aussi

$$x = \frac{a((9aa+bb)(aa+bb) - 2(9a^4 - b^4))}{4aabb};$$

$$r = \frac{b[(9aa+bb)(aa+bb) + 2(9a^4 - b^4)]}{4aabb}.$$

Enfin on aura

$$p + q = \tfrac{3a}{b}(y - z);$$

$$p - q = \tfrac{b}{a}(y + z).$$

§. 10. Mettons pour abrêger

$$C = 16\,aabb;$$

$$D = (9\,aa + bb)(aa + bb);$$

$$F = 2\,(9\,a^4 - b^4);$$

et en supprimant le diviseur commun $4\,aabb$, nous aurons

$x = a\,(D - F)$	$r = b\,(D + F)$
$y + z = a\,(C + D)$	$p + q = 3a\,(C - D)$
$y - z = b\,(C - D)$	$p - q = b\,(C + D)$.

Exemple 1.

§. 11. Soit $a = 1$ et $b = 2$, et on aura $C = 64$, $D = 65$, $F = -14$; donc

$x = 79$	$r = 102$
$y + z = 129$	$p + q = -3$
$y - z = -2$	$p - q = 258$

par consequent on aura

$x = 79$	$p = \frac{255}{2}$
$y = \frac{127}{2}$	$q = \frac{261}{2}$
$z = \frac{131}{2}$	$r = 102.$

Exemple 2.

§. 12. Soit $a = 2$ et $b = 1$, de sorte que $C = 64$, $D = 185$ et $F = 286$, donc

$$\left.\begin{aligned} x &= -202 \\ y+z &= +498 \\ y-z &= -121 \end{aligned}\right\| \begin{aligned} r &= +471 \\ p+q &= -726 \\ p-q &= +249. \end{aligned}$$

On aura donc

$$\left.\begin{aligned} x &= 202 \\ y &= \tfrac{377}{2} \\ z &= \tfrac{619}{2} \end{aligned}\right\| \begin{aligned} p &= \tfrac{477}{2} \\ q &= \tfrac{975}{2} \\ r &= 471. \end{aligned}$$

§. 13. Si l'on veut avoir des solutions en nombres entiers, il est évident qu'on n'a qu'à multiplier par 2 tous les six nombres de chacun des deux exemples précédens. En voila encore quelques solutions :

68	87	85
158	127	131
159	325	314
619	377	404
477	277	446
569	881	640.