1818

Solution succincta et elegans problematis, quo quaeruntur tres numeri tales, ut tam summae quam differentiae binorum sint quadrata

Leonhard Euler

E753

SOLUTIO SUCCINCTA ET ELEGANS PROBLEMATIS,

QUO QUAERUNTUR TRES NUMERI TALES, UT TAM SUMMAE QUAM DIFFERENTIAE BINORUM SINT QUADRATA.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhibuit die 11 Maii 1780.

§. 1. Etsi hoc problema jam a variis auctoribus est tractatum et resolutum, sequens tamen solutio omni attentione digna videtur, ideo quod non solum plura calculi artificia involvat, sed etiam facili negotio plures solutiones, alias inventu difficillimas, suppeditat.

§. 2. Sint x, y, z, tres numeri quaesiti, quorum maximus sit x, minimus vero z, ac statim patet, ponendo $x = pp + qq$ et $y = 2pq$ fore $x + y = (p + q)^2$ et $x - y = (p - q)^2$. Simili modo, ponendo $x = rr + ss$ et $z = 2rs$ erit $x + z = (r + s)^2$ et $x - z = (r - s)^2$, sicque jam quatuor conditionibus est satisfactum, si modo fuerit $rr + ss = pp + qq$. Tum vero adhuc duae conditiones adimplendae restant, scil. ut $y + z = 2pq + 2rs$ et $y - z = 2pq - 2rs$ quadrata reddantur.

§. 3. Ut primo fiat $rr + ss = pp + qq$ statuatur $x = (aa + bb)(cc + dd)$; tum enim iste valor duplici modo in duo quadrata resolvi potest: Fiet enim

$$p = ac + bd; \quad r = ad + bc;$$
$$q = ad - bc; \quad s = ac - bd.$$

Hinc ergo habebimus $y = 2\,(aacd + abdd - abcc - bbcd)$ et $z = 2\,(aacd + abcc - abdd - bbcd)$ hincque adeo $y + z = 4cd\,(aa - bb)$ et $y - z = 4ab\,(dd - cc)$, quas ergo duas formulas adhuc quadrata reddi oportet.

§. 4. Faciamus igitur primo productum:

$$yy - zz = 16\,abcd\,(aa - bb)(dd - cc) = \Box,$$

unde primo necesse est ut haec formula:

$$ab\,(aa - bb) \times cd\,(dd - cc),$$

ad quadratum revocetur. Hunc in finem statuamus:

$$cd\,(dd - cc) = nnab\,(aa - bb)$$

et quia res a relatione inter binas literas a, b et c, d pendet, ponere licebit $d = a$, unde habebimus:

$$c\,(aa - cc) = nnb\,(aa - bb);$$

unde deducitur $aa = \frac{nnb^3 - c^3}{nnb - c}$, quae ergo fractio ad quadratum reduci debet.

§. 5. Hoc autem facile praestabitur, ponendo $a = b + c$, ut fiat $\frac{nnb^3 - c^3}{nnb - c} = bb + 2bc + cc$, qua aequatione evoluta termini b^3 et c^3 utrinque se destruent; nascetur enim ista aequatio: $0 = (2nn - 1)\,bbc + (nn - 2)\,bcc$; unde colligitur $\frac{b}{c} = \frac{2 - nn}{nn - 1}$.

§. 6. Quod si ergo ponamus $b = 2 - nn$ et $c = 2nn - 1$ erit $a = nn + 1$. Nunc totum negotium eo reducitur, ut vel haec formula: $ab(dd - cc)$ vel haec: $cd(aa - bb)$ reddatur quadratum. Prior autem formula ob $d = a$ et $d + c = 3nn$ et $d - c = 2 - nn$, erit $ab(dd - cc) = 3nn(nn + 1)(2 - nn)^2$, quae quadratum erit, dummodo fuerit $3(nn + 1) = \square$.

§. 7. At vero ista formula $3(nn + 1)$ nullo modo quadratum effici potest; interim tamen remedium facile adhiberi potest, dummodo loco valoris $a = b + c$ statuatur $a = b - c$, quo facto fiet $\frac{nnb^3 - c^3}{nnb - c} = bb - 2bc + cc$, unde evolvendo colligitur $\frac{b}{c} = \frac{nn + 2}{2nn + 1}$.

§. 8. Ponatur ergo $b = nn + 2$ et $c = 2nn + 1$, erit $a = nn - 1 = d$; unde ista formula $ab(dd - cc)$ reducitur ad hanc:

$$3nn(nn - 1)(nn + 2)^2.$$

Tantum ergo opus est, ut ista formula $3(nn - 1)$ efficiatur quadratum, id quod facillime praestatur, quia $nn - 1$ habet factores. Quodsi enim ponatur $3(nn - 1) = \frac{ff}{gg}(n + 1)^2$ fieri debet $3(n - 1) = \frac{ff}{gg}(n + 1)$, unde fit $n = \frac{ff + 3gg}{3gg - ff}$.

§. 9. Hoc igitur modo omnibus conditionibus praescriptis est satisfactum, unde regrediamur ad quantitates supra introductas, Ac primo quidem ex hoc valore pro n invento deducimus:

$a = d = \frac{12ffgg}{(3gg-ff)^2}$; $b = nn + 2 = \frac{3f^4 - 6ffgg + 27g^4}{(3gg-ff)^2}$ et $c = \frac{3f^4 + 6ffgg + 27g^4}{(3gg-ff)^2}$. Jam vero quia tota solutio tantum a ratione inter literas a, b, c, d, pendet, primo denominatores omittamus, numeratores vero per communem divisorem 3 dividamus, hocque modo sequentes obtinebimus valores:

$$a = d = 4ffgg;$$
$$b = f^4 - 2ffgg + 9g^4;$$
$$c = f^4 + 2ffgg + 9g^4.$$

Ex his derivemus literas p, q, r, s, quae erunt:

$$p = 8ffgg(f^4 + 9g^4); \quad r = f^8 + 30f^4g^4 + 81g^8;$$
$$q = -(f^4 - 9g^4)^2; \quad s = 16f^4g^4.$$

Praestat autem a primis valoribus f et g, pro arbitrio assumtis, per gradus, primo ad literas a, b, c, d, hinc vero porro ad literas p, q, r, s, hinc denique ad ipsos numeros quaesitos x, y, z, ascendere. Ubi imprimis notasse juvabit, hunc calculum per valores negativos neutiquam turbari; semper enim eorum loco valores positivos tuto scribere licet. Hanc investigationem nonnullis exemplis illustremus.

Exemplum 1,

quo $f = 1$ et $g = 1$.

§. 10. Hic ergo erit $a = d = 4$; $b = 8$; $c = 12$, qu valores depressi fiunt $a = d = 1$; $b = 2$; $c = 3$. Hinc porro colligimus $p = 5$; $q = 5$; $r = 7$; $s = 1$, unde $x = 50$; $y = 50$; $z = 14$, qui valores utique satisfaciunt; verum ista solutio ob simplicitatem ab indole quaestionis excludenda est.

Exemplum 2,

quo $f = 2$ et $g = 1$.

§. 11. Hic erit $a = 16$; $b = 17$; $c = 33$; $d = 16$. Hinc ergo porro deducitur $p = 800$; $q = 305$; $r = 817$; $s = 256$, quamobrem ipsi numeri quaesiti erunt:

$$x = 733025;\ y = 488000;\ z = 418304;$$

Hinc autem erit:

$$x + y = 1105^2;\quad x - y = 495^2;$$
$$x + z = 1073^2;\quad x - z = 561^2;$$
$$y + z = 952^2;\quad y - z = 264^2.$$

Exemplum 3,

quo $f = 3$ et $g = 1$.

§. 12. Hic ergo erit $a = 36$; $b = 72$; $c = 108$; sive per 36 deprimendo erit $a = 1$; $b = 2$; $c = 3$; $d = 1$. Hinc ergo ad ipsum exemplum primum revolvimus, id quod semper evenit, quando pro f multiplum ternarii accipitur. Posito enim $f = 3h$ fiet $n = \frac{gg + 3hh}{gg - 3hh}$, quae a praecedente forma non discrepat.

Exemplum 4.

quo $f = 1$ et $g = 2$.

§. 13. Hic erit $a = 16$; $b = 137$; $c = 153$; $d = 16$; ideoque $p = 4640$; $q = 20705$; $r = 21217$; $s = 256$. Hinc autem ipsi numeri quaesiti x, y, z nimis fiunt magni, quam ut operae pretium sit eos evolvere.

Nota.

§. 14. Quoniam inventis numeris a, b, c, d, hincque p, q, r, s, ipsa solutio ita est adornata, ut fiat $x + y = p + q$, $x - y = p - q$; $x + z = r + s$ et $x - z = r - s$, quadrata etiam, quibus formulae $y + z$ et $y - z$ aequantur, evolvi conveniet. Invenimus autem $y + z = 4cd(aa - bb)$, quae, substitutis valoribus supra inventis, per f et g expressis, reducitur ad hanc formam:

$$4(f^4 + 2ffgg + 9g^4)^2\, 4ffgg(f^4 - 6ffgg + 9g^4),$$

quae manifesto est quadratum, cujus radix:

$$4fg(ff - 3gg)(f^4 + 2ffgg + 9g^4),$$

ita ut jam sit:

$$\sqrt{y + z} = 4fgc(ff - 3gg).$$

Simili modo cum sit $y - z = 4ab(dd - cc)$ erit

$$y - z = 4 \cdot 4ffgg(f^4 - 2ffgg + 9g^4)^2 (f^4 + 6ffgg + 9g^4)$$

ideoque

$$\sqrt{y - z} = 4fg(ff + 3gg)(f^4 - 2ffgg + 9g^4) = 4fgc(ff + 3gg).$$

§. 15. Ceterum, quanquam haec solutio innumerabiles valores satisfacientes pro x, y, z, complectitur, ea tamen neutiquam pro generali est habenda. Quoniam enim supra §. 5. et 7. posuimus $a = b + c$ et $a = b - c$, evidens est, hanc positionem maxime esse particularem, quandoquidem huic aequationi infinitis aliis modis satisfieri potest. Interim tamen hic observasse juvabit, postquam hac methodo numeri idonei pro x, y, z, fuerint inventi, ex iis facile alios, qui sint X, Y, Z, deriuari posse, sumendo $X = \frac{yy + zz - xx}{2}$, $Y = \frac{xx + zz - yy}{2}$ et $Z = \frac{xx + yy - zz}{2}$. Tum enim $X + Y = zz$; $X - Y = xx - yy = \square$; $X + Z = yy = \square$; $Z - X = xx - zz = \square$; $Y + Z = xx = \square$;

$$Z - Y = yy - zz = \square.$$

Hoc autem modo statim ad numeros praegrandes deducimur. Similique modo continuo ad numeros majores pertingere licet.

Additamentum.

§. 16. Pauciores ambages requirit sequens problema affine et jam saepius tractatum.

Problema.

Invenire tria quadrata, xx, yy, zz, *ita ut binorum differentiae sint quadrata.*

Solutio.

§. 17. Posito $x = pp + qq$ et $y = 2pq$ fiet $xx - yy = (pp - qq)^2$. Simili modo, posito $x = rr + ss$ et $z = 2rs$, fiet $xx - zz = (rr - ss)^2$. Tantum igitur superest ut $yy - zz = 4(ppqq - rrss)$ reddatur quadratum, postquam scilicet factum fuerit

$$pp + qq = rr + ss,$$

quod fit, uti supra est ostensum, sumendo $p = ac + bd$; $q = ad - bc$; $r = ad + bc$; $s = ac - bd$. Hinc autem, ut $yy - zz$ fiat quadratum, istud productum $abcd(aa - bb)(dd - cc)$ fiat quadratum, quod vidimus fieri, sumtis $a = d = nn \pm 1$; $b = 2nn \mp 1$ et $c = nn \mp 2$.

§. 18. Quod si jam loco n scribamus $\frac{m}{n}$, habebimus sequentes geminas determinationes:

$$a = d = mm \mp nn; \quad b = 2mm \pm nn; \quad c = mm \pm 2nn.$$

Hinc ergo sumendo pro m et n numeros simpliciores sequens tabula exhibet plures valores idoneos pro literis a, d, b, c. Ubi notandum est, si neuter numerorum m et n fuerit per 3 divisibilis, tum valores ex signis superioribus ortos per 3 deprimi posse, uti in sequente tabula factum est.

Tabula

exhibens valores idoneos pro literis a, b, c, d,

m	n	$a=d$	b	c
1	1	0	1	1
		2	1	1
2	1	1	3	2
		5	7	2
3	1	8	19	11
		10	17	7
3	2	5	22	17
		13	14	1
4	1	5	11	6
		17	31	14
4	3	7	41	34
		25	23	2
5	1	8	17	9
		26	49	23
5	2	7	18	11
		29	46	17
5	3	16	59	43
		34	41	7

m	n	$a = d$	b	c
5	4	3	22	19
		41	34	7
6	1	35	73	38
		37	71	34
6	5	11	97	86
		61	47	14
7	1	16	33	17
		50	97	47
7	2	15	34	19
		53	94	41
7	3	40	107	67
		58	89	31
7	4	11	38	27
		65	82	17
7	5	8	41	33
		74	73	1
7	6	13	134	121
		85	62	23
8	1	21	43	22
		65	127	62

m	n	$a=d$	b	c
8	3	55	137	82
		73	119	46
8	5	13	51	38
		89	103	14
8	7	5	59	54
		113	79	34
10	1	33	67	34
		101	199	98

Qui applicationem facere voluerit, notet, tam literas a et d, quam c et b, inter se permutari pose. Ac si numeri negativi prodeant, signum negationis omittetur, quo observato calculus fiet satis facilis.

Exemplum desumtum ex numeris $m=2$ et $n=1$ pro signis inferioribus.

§. 19. Hic igitur est $a=5$; $b=7$; $c=5$; $d=2$ unde fit $p=39$; $q=25$; $r=45$; $s=11$; unde:

$x=2146$; $y=1950$; $z=990$ sive

$x=1023$; $y=975$; $z=445$.

§. 20. Praeterea notari meretur, ex qualibet solutione hujus problematis facile deduci posse solutionem praecedentis, quo quaeruntur tres numeri X, Y, Z, ita ut binorum tam summa quam differentia sit quadratum, quemadmodum modo ante animadvertimus; quia autem ibi fractiones occurrerent, sumantur quadrupla:

$$X = 2\,(yy + zz - xx)$$
$$Y = 2\,(xx + zz - yy)$$
$$Z = 2\,(xx + yy - zz)$$

qui ergo omnes tres numeri semper erunt pares ideoque diversae prorsus sunt indolis ab illis numeris, quas solutio superior suppeditavit, ubi scilicet unus trium numerorum necessario est impar, quia alioquin deprimi possent.