



1815

# Geometrica et sphaerica quaedam

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

## Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Geometrica et sphaerica quaedam" (1815). *Euler Archive - All Works*. 749.  
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/749>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact [mgibney@pacific.edu](mailto:mgibney@pacific.edu).

## GEOMETRICA ET SPHAERICA QUAEDAM.

AUCTORE

L. E U L E R O.

---

 Conventui exhibuit die 1 Maii 1780.
 

---

Tab. I. §. 1. Contemplanti mihi nuper casum, quo in  
 Fig. 1. triangulo quocunque ABC ex angulis ad latera opposita  
 utcunque ducuntur rectae Aa, Bb, Cc, se invicem in  
 eodem puncto O secantes, subcurrit ista quaestio: quo-  
 modo ex harum rectarum binis partibus datis triangulum  
 ipsum construi queat? Mox autem perspexi, hanc quae-  
 stionem in genere solutionem non admittere, nisi certa  
 quaedam conditio inter sex illas partes locum habeat. In-  
 cidi ergo in sequens theorema satis memorabile.

*Theorema.*

Si in triangulo quocunque ABC ex angulis ad latera  
 opposita educantur, utcunque, rectae Aa, Bb, Cc,  
 se mutuo in eodem puncto O secantes, tum semper  
 ista proprietas locum habebit, ut sit:

$$\frac{AO}{Oa} \cdot \frac{BO}{Ob} \cdot \frac{CO}{Oc} = \frac{AO}{Oa} + \frac{BO}{Ob} + \frac{CO}{Oc} + 2.$$

## Demonstratio.

§. 2. Ad hoc demonstrandum vocemus partes descriptas:

$$AO = A; BO = B; CO = C,$$

$$Oa = a; Ob = b; Oc = c,$$

tum vero omnes sex angulos, circa punctum O formatos, notemus, uti in figura sunt signati, ubi statim evidens est fore  $p + q + r = 180^\circ$ . Jam ex formula, qua ex duobus lateribus trianguli, cum angulo intercepto, ejus area defini solet, habebimus aream

$$AOc = \frac{1}{2} A c \sin. q,$$

$$\text{atque aream } BOc = \frac{1}{2} B c \sin. p,$$

tum vero erit area  $AOB = \frac{1}{2} AB \sin. (p + q)$ .

Est autem  $\sin. (p + q) = \sin. r$ , unde, quia hoc triangulum aequatur summae duorum praecedentium, hinc deducitur ista aequatio:

$$AB \sin. r = A c \sin. q + B c \sin. p.$$

Similique modo reliquae partes dabunt has aequationes:

$$BC \sin. p = B a \sin. r + C a \sin. q,$$

$$CA \sin. q = C b \sin. p + A b \sin. r.$$

§. 3. Quo has aequationes ad usum nostrum propius accomodemus, eas in sequentes transformemus:

$$\begin{aligned}\frac{\sin. r}{c} &= \frac{\sin. q}{B} + \frac{\sin. p}{A}, \\ \frac{\sin. p}{a} &= \frac{\sin. r}{C} + \frac{\sin. q}{B}, \\ \frac{\sin. q}{b} &= \frac{\sin. p}{A} + \frac{\sin. r}{C}.\end{aligned}$$

Ubi evidens est, ternos angulos  $p, q, r$ , simili modo ad ternas literas  $A, B, C$ , vel etiam ad  $a, b, c$  referri.

§. 4. Ponamus porro  $A = \alpha a$ ;  $B = \beta b$ ;  $C = \gamma c$ ; praeterea vero sit

$$\begin{aligned}\frac{\sin. p}{A} &= \frac{\sin. p}{\alpha a} = P; \\ \frac{\sin. q}{B} &= \frac{\sin. q}{\beta b} = Q; \\ \frac{\sin. r}{C} &= \frac{\sin. r}{\gamma c} = R.\end{aligned}$$

Hoc enim modo tres sequentes formulas simplicissimas adipiscemur:

$$\gamma R = P + Q; \quad \alpha P = Q + R; \quad \beta Q = R + P.$$

Harum autem aequationum differentiae statim suppeditant rationem inter binas literarum  $P, Q, R$ ; inde enim concluduntur istae proportionales:

$$P : R = \gamma + 1 : \alpha + 1,$$

$$Q : P = \alpha + 1 : \beta + 1,$$

$$R : Q = \beta + 1 : \gamma + 1,$$

unde manifesto deducitur ista proportio geminata:

$$P : Q : R = \frac{1}{\alpha + 1} : \frac{1}{\beta + 1} : \frac{1}{\gamma + 1}.$$

Eodem scilicet modo ternae literae  $P, Q, R$  ad  $\alpha, \beta, \gamma$ , ordine referuntur.

§. 5. Cum autem trium nostrarum aequationum prima praebeat  $R = \frac{P+Q}{\gamma}$ , ex secunda vero fiat  $R = \alpha P - Q$ , hi duo valores inter se aequati istam rationem inter P, et Q producent:  $\frac{P}{Q} = \frac{\gamma+1}{\alpha\gamma-1}$ . Quare cum sit  $\frac{P}{Q} = \frac{\beta+1}{\alpha+1}$ , hoc modo ad aequationem pervenietur liberam a literis P, Q, R, quae erit:  $\alpha\beta\gamma = \alpha + \beta + \gamma + 2$ , quae manifesto est ipsa proprietas in theoremate enunciata, cum sit

$$\alpha = \frac{AO}{Oa}; \quad \beta = \frac{BO}{Ob}; \quad \gamma = \frac{CO}{Oc}.$$

Hoc igitur theoremate praemisso ipsam quaestionem initio memoratam aggrediamur.

### Problema.

*Ductis in triangulo quocunque ABC ex singulis angulis ad latera opposita ternis rectis Aa, Bb, Cc se mutuo in eodem puncto O secantibus, si cognitae fuerint harum rectorum binae partes scilicet:*

$$AO = A; \quad BO = B; \quad CO = C,$$

$$Oa = a; \quad Ob = b; \quad Oc = c,$$

*ex his sex quantitibus ita datis, ut proprietas ante demonstrata locum habeat, constructionem ipsius trianguli investigare.*

### Solutio:

§. 6. Maneant omnes denominationes uti in demonstratione theorematis sunt constitutae, scilicet:  $A = \alpha a$ ;

$B = \beta b$ ;  $C = \gamma c$ ; tum vero  $\sin. p = \alpha a P$ ;  $\sin. q = \beta b Q$ ;  $\sin. r = \gamma c R$ ; primo quidem inter literas  $\alpha, \beta, \gamma$  ista relatio locum habere debet:  $\alpha\beta\gamma = \alpha + \beta + \gamma + 2$ .

§. 7. Cum jam literae  $P, Q, R$  inter se eandem teneant rationem, quam fractiones  $\frac{1}{\alpha+1}, \frac{1}{\beta+1}, \frac{1}{\gamma+1}$ , statuamus

$$P = \frac{\Delta}{\alpha+1}; \quad Q = \frac{\Delta}{\beta+1}, \quad R = \frac{\Delta}{\gamma+1},$$

ita ut hoc modo ipsae literae  $P, Q, R$ , ideoque etiam sinus angulorum  $p, q, r$  penitus ex calculo abigantur, earumque loco sola nova incognita  $\Delta$  ingrediatur, cujus valore invento omnia innotescent, quae ad trianguli constructionem requiruntur.

§. 8. Hanc autem incognitam  $\Delta$  ex ea conditione investigari oportet, quod ternorum angulorum summa  $p+q+r$  duos rectos efficere debeat, sive ut sit  $\sin. r = \sin. (p+q)$ . Quia autem horum angulorum tantum sinus expressos invenimus, istam aequationem ad solos sinus redigi conveniēt, quod quo facilius fieri queat, statuamus  $\sin. p = f$ ,  $\sin. q = g$ ;  $\sin. r = h$  et jam fieri necesse est:

$$h = f\sqrt{1-gg} + g\sqrt{1-ff},$$

unde irrationalitates expellere debemus.

Sumantur ergo quadrata, eritque

$$hh = ff + gg - 2ffgg + 2fg\sqrt{(1-ff)(1-gg)}.$$

Partes jam racionales ad sinistram transferantur, sumtisque

denuo quadratis pervenietur ad istam aequationem:

$$f^4 + g^4 + h^4 - 2ffgg - 2ffhh - 2gghh + 4ffgghh = 0.$$

§. 9. Cum igitur sit  $f = \sin. p$ , per denominationes ante stabilitas erit

$$f = \alpha a P = \frac{\alpha a \Delta}{\alpha + 1}; \quad g = \frac{\beta b \Delta}{\beta + 1}; \quad h = \frac{\gamma c \Delta}{\gamma + 1}.$$

Quamobrem ponamus brevitatis gratia  $\frac{\alpha a}{\alpha + 1} = F$ ;  $\frac{\beta b}{\beta + 1} = G$ ;  $\frac{\gamma c}{\gamma + 1} = H$ , ut sit  $f = F \Delta$ ;  $g = G \Delta$ ;  $h = H \Delta$ , hique valores in aequatione modo inventa substituti producent aequationem per  $\Delta^4$  divisibilem, quae erit

$$F^4 + G^4 + H^4 - 2F^2G^2 - 2F^2H^2 - 2G^2H^2 + 4F^2G^2H^2 \Delta^2$$

unde concluditur

$$\Delta^2 = \frac{2F^2G^2 + 2F^2H^2 + 2G^2H^2 - F^4 - G^4 - H^4}{4F^2G^2H^2},$$

ita ut nostra incognita  $\Delta$  jam perfecte sit determinata, cum sit

$$\Delta = \frac{\sqrt{(2F^2G^2 + 2F^2H^2 + 2G^2H^2 - F^4 - G^4 - H^4)}}{2FGH}$$

quod etiam hoc modo exprimitur per factores:

$$\Delta = \frac{\sqrt{(F+G+H)(F+G-H)(F+H-G)(G+H-F)}}{2FGH}.$$

§. 10. Cum igitur hae literae  $F$ ,  $G$ ,  $H$  dentur immediate ex quantitatibus cognitis  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , et  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , expressio inventa, quae non parum implicata videri queat, tamen per aream trianguli facillime construi potest. Construatur enim triangulum, cujus latera sint  $F$ ,  $G$ ,  $H$ , ejusque quaeratur area, quam vocemus  $M^2$ , atque notum est fore

$M^2 = \frac{1}{4} \sqrt{(F+G+H)(F+G-H)(F+H-G)(G+H-F)}$   
 qua denominatione introducta erit  $\Delta = \frac{2M^2}{F+G+H}$ ; hocque va-  
 lore cognito totum negotium est confectum; inde enim  
 statim inveniuntur angulorum  $p, q, r$  sinus; scilicet:

$$\sin. p = \frac{\alpha a}{\alpha + 1} \Delta; \quad \sin. q = \frac{\beta b}{\beta + 1} \Delta; \quad \sin. r = \frac{\gamma c}{\gamma + 1} \Delta;$$

Invento autem unico horum angulorum ipsum triangulum  
 statim construi potest, quod per se facile intelligitur.

§. 11. His autem expeditis, nunc demum perspexi,  
 theorema supra datum multo commodius et elegantius se-  
 quenti modo enunciari posse:

*Theorema.*

*Ductis in triangulo quocunque ABC ex angulis A, B, C,  
 ad latera opposita rectis Aa, Bb, Cc, quae se  
 invicem in eodem puncto O intersecant, semper ista  
 proprietas locum habebit, ut sit  $\frac{Oa}{Aa} + \frac{Ob}{Bb} + \frac{Oc}{Cc} = 1$ ,  
 sive si earum rectarum partes, Oa, Ob, Oc per to-  
 tas singulatim dividantur, tres fractiones inde ortae  
 junctim sumtae semper unitati aequabuntur.*

*Demonstratio, ex superiori derivata.*

§. 12. Positis, ut supra fecimus,  $AO = \alpha \cdot Oa$ ;  
 $BO = \beta \cdot Ob$ ;  $CO = \gamma \cdot Oc$ , ante demonstravimus, sem-  
 per esse  $\alpha\beta\gamma = \alpha + \beta + \gamma + 2$ . Addatur jam utrinque  
 haec expressio:  $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha + \beta + \gamma + 1$ , atque



ex parte sinistra prodibit  $(a + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$ , at vero ex parte dextra  $a\beta + a\gamma + \beta\gamma + 2(a + \beta + \gamma) + 3$ , quae formula manifesto resolvitur in has partes:

$$(a + 1)(\beta + 1) + (a + 1)(\gamma + 1) + (\beta + 1)(\gamma + 1).$$

Hac igitur forma substituta, dividatur utrinque per productum  $(a + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$ , ac prodibit

$$1 = \frac{1}{\gamma + 1} + \frac{1}{\beta + 1} + \frac{1}{a + 1}. \quad \text{Q. E. D.}$$

§. 13. Hinc quoque derivari potest ista memorabilis proprietas:  $\frac{a}{a+1} + \frac{\beta}{\beta+1} + \frac{\gamma}{\gamma+1} = 2$ . Si enim huic addatur praecedens aequatio, orietur ista aequatio identica:  $1 + 1 + 1 = 3$ .

*Demonstratio simplicissima.*

Elementis vulgaribus innixa.

§. 14. Per punctum O singulis trianguli lateribus Tab. I. parallelae ducantur  $f\zeta$  ipsi BC,  $g\eta$  ipsi AC et  $h\theta$  ipsi Fig. 2. AB, et statim evidens est fore  $\frac{Bf}{AB} + \frac{Ag}{AB} + \frac{f\eta}{AB} = 1$ . Nunc vero ob triangula ABa et AfO similia erit

$$Bf : BA = Oa : Aa,$$

sicque prima fractio evadit  $\frac{Oa}{Aa} = \frac{Bf}{BA}$ . Deinde, quia  $\triangle BAb \sim \triangle B\eta O$ , erit  $A\eta : AB = Ob : Bb$ , unde ergo fit  $\frac{A\eta}{AB} = \frac{Ob}{Bb}$ . Denique  $\triangle fO\eta \sim \triangle BCa$ , hinc  $f\eta : BA = fO : BC$ , unde ergo fit  $\frac{f\eta}{AB} = \frac{fO}{BC}$ . Est vero  $fO = BA$ , hincque, quia triangulum  $BCc \sim \triangle \theta CO$ , erit  $\frac{B\theta}{Bc} = \frac{Oc}{Cc}$ , unde fit  $\frac{f\eta}{BA} = \frac{Oc}{Cc}$ .

quibus valoribus substitutis aequalitas identica  $\frac{Bf + A\eta + f\eta}{AB} = 1$  induet hanc formam:  $\frac{Oa}{Aa} + \frac{Ob}{Bb} + \frac{Oc}{Cc} = 1$ , quae est ipsa aequalitas demonstranda.

Tab. I.  
Fig. 3.

§. 15. Haec insignis proprietas etiam semper locum habet, ubicunque punctum O extra triangulum accipiatur, veluti in figura 3, dummodo denominationes per literas Aa, Bb, Cc rite statuantur. Ita in hac figura pro recta Aa erit AO = A, Oa = a, at pro recta Bb, posito BO = B, erit Ob = -b, atque pro recta Cc poni debet CO = C et Oc = -c. Hinc ergo erit Aa = A + a; Bb = B + b; Cc = -(C + c). Cum igitur semper sit  $\frac{a}{a+A} + \frac{b}{b+B} + \frac{c}{c+C} = 1$ , erit pro lineis in figura ductis  $\frac{Oa}{Aa} + \frac{Ob}{Bb} + \frac{Oc}{Cc} = 1$ .

§. 16. Hac autem proprietate stabilita satis commode area totius trianguli ABC inveniri poterit. Cum enim sit area trianguli AOB =  $\frac{1}{2} AB \sin. r$ , ob  $\sin. r = CR$  ista area erit AOB =  $\frac{1}{2} ABC.R$ . Simili modo area AOC reperietur =  $\frac{1}{2} ABC.Q$ , et area BOC =  $\frac{1}{2} ABC.P$ , sicque tota trianguli area erit =  $\frac{1}{2} ABC (P + Q + R)$ .

§. 17. Postmodum vero porro posuimus  $P = \frac{F\Delta}{A}$ ;  $Q = \frac{G\Delta}{B}$ ;  $R = \frac{H\Delta}{C}$ . Erat autem  $F = \frac{A}{\alpha+1}$ ;  $G = \frac{B}{\beta+1}$ ;  $H = \frac{C}{\gamma+1}$  (§. 9.); unde fiet area trianguli =  $\frac{1}{2} ABC\Delta \left( \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\gamma+1} \right)$ . Demonstravimus autem esse  $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\gamma+1} = 1$ , quamobrem area nostri trianguli erit =  $\frac{1}{2} ABC\Delta$ . Praeterea

vero consideravimus triangulum formatum a tribus lateribus  $F, G, H$ , ejusque aream posuimus  $= M^2$ , qua inventa nacti sumus valorem  $\Delta = \frac{a M^2}{FGH}$ , quo valore substituto area nostri trianguli ita exprimetur:  $\frac{ABC M^2}{FGH}$ . Cum ergo, sit

$$F = \frac{A}{\alpha + 1}, \quad G = \frac{B}{\beta + 1}, \quad H = \frac{C}{\gamma + 1}, \quad \text{area erit}$$

$$(\alpha + 1) (\beta + 1) (\gamma + 1) M^2,$$

sicque area trianguli propositi  $ABC$  ad aream trianguli in subsidium vocati  $M^2$  satis simplicem tenet rationem, scilicet ut  $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) : 1$ , sive per lineas erit area  $ABC : M^2 = Aa \cdot Bb \cdot Cc : Oa \cdot Ob \cdot Oc$ .

## S P H A E R I C A.

§. 18. Quae hactenus de triangulis planis sunt inventa, eadem quoque ad triangula sphaerica accommodari possunt. Proponatur scilicet triangulum sphaericum  $ABC$ , in quo ex angulis ad latera opposita ducti sint arcus se mutuo in eodem puncto  $O$  intersecantes, ac primo quidem inquirendum erit, quæenam conditio, inter horum arcuum partes intercedere debeat, ut ex iis datis ipsum triangulum construi queat. Hunc in finem, sequens theorema erit præmittendum:

Tab. I.  
Fig. 4.

### Theorema.

Si in triangulo sphaerico quocunque  $ABC$ , ex singulis angulis in latera opposita ducantur arcus  $Aa, Bb,$

$Cc$ , se mutuo in eodem puncto  $O$  intersecantes, tum  
 positis brevitatis gratia  $\frac{\text{tag. } AO}{\text{tag. } Oa} = \alpha$ ,  $\frac{\text{tag. } BO}{\text{tag. } Ob} = \beta$ ,  $\frac{\text{tag. } CO}{\text{tag. } Oc} = \gamma$ ,  
 semper erit  $\alpha\beta\gamma = \alpha + \beta + \gamma + 2$ , quae proprietas  
 etiam ita referri potest, ut sit  $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\gamma+1} = 1$ .

### Demonstratio:

§. 19. Vocentur anguli circa punctum intersectionis,  
 uti in figura sunt signati, arcus vero  $AO = A$ ,  $BO = B$ ,  
 $CO = C$  et  $Oa = a$ ,  $Ob = b$ ,  $Oc = c$ ,

In triangulo  $AOc$  erit  $\text{tag. } AcO = \frac{\sin. A \sin. q}{\cos. A \sin. c - \sin. A \cos. c \cos. q}$

In triangulo  $BOc$  erit  $\text{tag. } BcO = \frac{\sin. B \sin. p}{\cos. B \sin. c - \sin. B \cos. c \cos. p}$

§. 20. Quia nunc hi duo anguli simul sumti faciunt  
 duos rectos, summa tangentium nihilo debet aequari, unde  
 oritur haec aequatio:

$$\left. \begin{aligned}
 &\sin. A \cos. B \sin. c \sin. q - \sin. A \sin. B \cos. c \cos. p \sin. q \\
 &+ \sin. B \cos. A \sin. c \sin. p - \sin. A \sin. B \cos. c \cos. q \sin. p
 \end{aligned} \right\} = 0,$$

quae reducitur ad hanc simpliciolem:

$$\left. \begin{aligned}
 &+ \sin. A \cos. B \sin. c \sin. q \\
 &+ \sin. B \cos. A \sin. c \sin. p
 \end{aligned} \right\} = \sin. A \sin. B \cos. c \sin. r$$

ex qua colligitur

$$\sin. r = \frac{\sin. A \cos. B \sin. c \sin. q + \sin. B \cos. A \sin. c \sin. p}{\sin. A \sin. B \cos. c}$$

quae expressio porro hanc producit aequationem:

$$\begin{array}{l} \frac{\sin. r}{\text{tag. } c} = \frac{\sin. p}{\text{tag. } A} + \frac{\sin. q}{\text{tag. } B} \\ \frac{\sin. p}{\text{tag. } a} = \frac{\sin. q}{\text{tag. } B} + \frac{\sin. r}{\text{tag. } C} \\ \frac{\sin. q}{\text{tag. } b} = \frac{\sin. r}{\text{tag. } C} + \frac{\sin. p}{\text{tag. } A} \end{array} \quad \text{Eodem modo erit}$$

§. 21. Cum autem posuerimus in theoremate  $\frac{\text{tag. } A}{\text{tag. } a} = \alpha$ ;  $\frac{\text{tag. } B}{\text{tag. } b} = \beta$ ;  $\frac{\text{tag. } C}{\text{tag. } c} = \gamma$ , his valoribus substitutis tres illae aequationes hanc formam induent:

$$\begin{array}{l} \frac{\sin. r}{\text{tag. } c} = \frac{\sin. p}{\alpha \text{ tag. } a} + \frac{\sin. q}{\beta \text{ tag. } b} \\ \frac{\sin. p}{\text{tag. } a} = \frac{\sin. q}{\beta \text{ tag. } b} + \frac{\sin. r}{\gamma \text{ tag. } c} \\ \frac{\sin. q}{\text{tag. } b} = \frac{\sin. r}{\gamma \text{ tag. } c} + \frac{\sin. p}{\alpha \text{ tag. } a} \end{array}$$

§. 22. Statuatur nunc porro  $\frac{\sin. p}{\alpha \text{ tag. } a} = P$ ;  $\frac{\sin. q}{\beta \text{ tag. } b} = Q$ ;  $\frac{\sin. r}{\gamma \text{ tag. } c} = R$ , quo facto ternae nostrae aequationes erunt

$$\gamma R = P + Q; \quad \alpha P = Q + R; \quad \beta Q = R + P,$$

ex quarum prima fit  $R = \frac{P+Q}{\gamma}$ , ex secunda vero  $R = \alpha P - Q$ ,

qui valores inter se aequati dant  $\frac{P}{Q} = \frac{\gamma + \alpha}{\alpha \gamma - 1}$ . Tum vero

secunda aequatio, dempta tertia, praebet  $\alpha P - \beta Q = Q - P$ ,

unde deducitur  $\frac{P}{Q} = \frac{\beta + 1}{\alpha + 1}$ , ita ut habeamus hanc aequationem:

$\frac{\gamma + \alpha}{\alpha \gamma - 1} = \frac{\beta + 1}{\alpha + 1}$ , qua evoluta et in ordinem redacta colligitur:

$$\alpha \beta \gamma = \alpha + \beta + \gamma + 2. \quad \text{Q. E. D.}$$

Alia demonstratio ex primis Geometriae elementis petita.

§. 23. Concipiatur planum, quod sphaeram in puncto O tangat (quod quidem in figura non repraesentamus, quia

facile intelligi poterit), ad quod ex centro sphaerae per puncta A, B, C et a, b, c educantur rectae, plano occurrentes in punctis A', B', C', a', b', c', ad quae puncta si ex O in plano ducantur rectae OA', OB', OC', Oa', Ob', Oc', evidens est fore OA' = tag. A; similique modo OB' = tag. B; OC' = tag. C; tum vero Oa' = tag. a; Ob' = tag. b; Oc' = tag. c, anguli vero literis p, q, r, notati, iidem quoque in hoc plano manebunt.

§. 24. Hoc modo nunc adepti sumus triangulum planum A'B'C' ex cuius angulis ad latera opposita ductae sunt rectae A'a', B'b', C'c', quae se invicem in puncto O intersecant, sicque totum negotium reductum est ad casum trianguli plani, quocirca, si ponamus  $\frac{OA'}{Oa'} = \frac{\text{tag. A}}{\text{tag. a}} = \alpha$ ;  $\frac{OB'}{Ob'} = \frac{\text{tag. B}}{\text{tag. b}} = \beta$ ;  $\frac{OC'}{Oc'} = \frac{\text{tag. C}}{\text{tag. c}} = \gamma$ ; certo erit, ut ante est demonstratum, tam  $\alpha\beta\gamma = \alpha + \beta + \gamma + 2$ , quam  $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\gamma+1} = 1$ .

#### Problema.

*Ductis in triangulo sphaerico quocunque ABC ex singulis angulis in latera opposita arcibus Aa, Bb, Cc, se mutuo in eodem puncto O intersecantibus, si cognitae fuerint horum arcuum binae partes;*

$$AO = A, BO = B, CO = C,$$

$$Oa = a, Ob = b, Oc = c,$$

ex his sex quantitativibus ita datis, ut proprietates ante demonstrata locum habeat, ipsum triangulum investigare.

### Solutio.

§. 25. Statuamus, ut in theoremate jam factum est,  $\frac{\sin. b}{a \operatorname{tag}. a} = P$ ;  $\frac{\sin. q}{\beta \operatorname{tag}. b} = Q$ ;  $\frac{\sin. r}{\gamma \operatorname{tag}. c} = R$ , atque has tres nanciscimur aequationes:  $\gamma R = P + Q$ ;  $\alpha P = Q + R$ ;  $\beta Q = R + P$ , ex quarum differentiis statim deducimus has formulas:

$\gamma R - \alpha P = P - R$ , unde sequitur  $\frac{P}{R} = \frac{\gamma + 1}{\alpha + 1}$ .

Porro  $\alpha P - \beta Q = Q - P$ , unde fit  $\frac{Q}{P} = \frac{\alpha + 1}{\beta + 1}$ .

Denique  $\gamma R - \beta Q = Q - R$ , unde fit  $\frac{R}{Q} = \frac{\beta + 1}{\gamma + 1}$ .

unde patet, has literas P, Q, R eandem inter se tenere rationem, quam tenent hae fractiones:  $\frac{1}{\alpha + 1}$ ,  $\frac{1}{\beta + 1}$ ,  $\frac{1}{\gamma + 1}$ , quamobrem in usum sequentem statuamus:

$$P = \frac{\Delta}{\alpha + 1}; \quad Q = \frac{\Delta}{\beta + 1}; \quad R = \frac{\Delta}{\gamma + 1}.$$

§. 26. Nunc vero ex aequatione prima deducimus  $R = \frac{P + Q}{\gamma}$ , ex secunda vero  $R = \alpha P - Q$ , quibus coaequantis prodibit  $\frac{P}{Q} = \frac{\gamma + 1}{\alpha \gamma - 1}$ . Modo ante autem invenimus  $\frac{P}{Q} = \frac{\beta + 1}{\alpha + 1}$ , qui duo valores, si inter se coequantur, praebent ipsam conditionem jam in theoremate demonstratam.

§. 27. Valoribus autem pro literis P, Q, R constitutis, inde elicimus pro sinubus angulorum p, q, r, hos valores:  $\sin. p = \operatorname{tag}. A \cdot \frac{\Delta}{\alpha + 1}$ ;  $\sin. q = \operatorname{tag}. B \cdot \frac{\Delta}{\beta + 1}$ ;

$\sin. r = \text{tag. C} \cdot \frac{A}{\gamma + 1}$ . Quod si jam porro br. gr. statuamus  $\frac{\text{tag. A}}{\alpha + 1} = F$ ;  $\frac{\text{tag. B}}{\beta + 1} = G$ ;  $\frac{\text{tag. C}}{\gamma + 1} = H$ , conditio, quod summa angulorum debeat esse  $p + q + r = 180^\circ$ , nobis supeditat, prorsus ut in Problemate praecedente, hunc pro  $\Delta$  valorem:

$$\Delta = \frac{\sqrt{(F+G+H)(F+G-H)(F+H-G)(G+H-F)}}{4FGH}$$

Unde si iterum triangulum concipiamus, cujus latera sint  $F, G, H$ , ejusque aream vocemus  $M^2$ , erit prorsus ut ante  $\Delta = \frac{2M^2}{FGH}$ , sicque litera  $\Delta$  per solas quantitates cognitae determinatur.

§. 23. Quia igitur valor ipsius  $\Delta$  est cognitus, habebimus  $\sin. p = \frac{2M^2}{GH}$ ;  $\sin. q = \frac{2M^2}{FH}$ ;  $\sin. r = \frac{2M^2}{FG}$ ; unde singulos angulos  $p, q, r$  definire licet; sufficiet autem unicum eorum nosse ad triangulum construendum. Hic autem notasse juvabit, formulam inventam geminos valores pro angulo  $p$  praebere, quorum alter alterius est complementum ad duos rectos, ita ut duae solutiones locum habeant; et quia angulorum obtusorum cosinus sunt negativi, ista negatio semper ita statui debet, ut fiat  $\cos. r = -\cos. (p+q)$ . Hoc igitur modo etiam hoc problema sphaericum plenissime est solutum.



## SUPPLEMENTUM,

Continens analysin simplicissimam tam pro demonstratione theorematis quam pro solutione problematis ante propositi.

§. 29. Sit  $ABC$  triangulum quodcunque, ex cujus Tab. I.  
angulis ad latera opposita, utcunque sint ductae rectae Fig. 5.  
 $Aa, Bb, Cc$ , se invicem in eodem puncto  $O$  secantes, ac  
vocemus ut ante  $AO = A, Oa = \bar{a}, BO = B, Ob = \bar{b},$   
 $CO = C, Oc = c$ , tum vero ex puncto  $O$  ducantur lateribus  
 $AB$  et  $AC$  parallelae  $O\beta$  et  $O\gamma$ , atque his solis lineis  
opus erit ad totum negotium peragendum.

§. 30. His constitutis similitudo triangulorum  $BCb$   
et  $B\gamma O$  dabit  $\frac{C\gamma}{BC} = \frac{Ob}{B\bar{b}}$ . Deinde similitudo triangulorum  
 $CBc$  et  $C\beta O$  dabit  $\frac{B\beta}{BC} = \frac{Oc}{C\bar{c}}$ . Denique triangulum  $\beta O \gamma$   
simile est triangulo  $BAC$  et in utroque rectae  $Oa$  et  $Aa$   
similiter sunt ductae, unde  $\frac{\beta\gamma}{BC} = \frac{Oa}{A\bar{a}}$ , sicque habemus has

$$\begin{aligned} \text{tres aequationes: } \frac{Oa}{A\bar{a}} &= \frac{a}{A+a} = \frac{\beta\gamma}{BC}, \\ \frac{Ob}{B\bar{b}} &= \frac{b}{B+b} = \frac{C\gamma}{BC}, \\ \frac{Oc}{C\bar{c}} &= \frac{c}{C+c} = \frac{B\beta}{AC}. \end{aligned}$$

Harum ergo trium fractionum summa erit:

$$\frac{\beta\gamma + C\gamma + B\beta}{BC} = 1,$$

quae est sine dubio demonstratio brevissima theorematis  
supra per longas ambages eruta.

§. 31. Ponamus nunc brevitatis gratia  $\frac{Oa}{Aa} = \frac{a}{A+a} = \alpha$ ;  
 $\frac{Ob}{Bb} = \frac{b}{B+b} = \beta$ ;  $\frac{Oc}{Cc} = \frac{c}{C+c} = \gamma$ , ubi istas literas  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  
 cum supra usurpatis non confundi oportet. Hinc ergo  
 erit  $a = \frac{\alpha A}{1-\alpha}$ , sive  $A = \frac{a(1-\alpha)}{\alpha}$ . Eodemque modo  
 $b = \frac{\beta B}{1-\beta}$ , sive  $B = \frac{b(1-\beta)}{\beta}$ , atque  
 $c = \frac{\gamma C}{1-\gamma}$ , sive  $C = \frac{c(1-\gamma)}{\gamma}$ .

Atque nunc literae  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , ita inter se referuntur, ut sit  
 $\alpha + \beta + \gamma = 1$ .

§. 32. Statuamus nunc totam trianguli basin  $bC = x$ ,  
 atque ejus tres partes  $B\beta$ ,  $\beta\gamma$ ,  $\gamma C$ , ita determinabuntur:  
 $\beta\gamma = \alpha x$ ;  $B\beta = \gamma x$  et  $C\gamma = \beta x$ . Deinde quia trian-  
 gulum  $Oa\beta$  simile est triangulo  $AaB$ , erit  $\frac{Ba}{B\beta} = \frac{Aa}{AO}$ , unde  
 deducimus intervallum  $Ba = \frac{B\beta \cdot Aa}{AO} = \frac{\gamma x}{A(A+a)} = \frac{\gamma x}{1-\alpha}$ . Si-  
 mili modo erit  $Ca = \frac{\beta x}{1-\alpha}$ .

Tab. I. §. 33. His valoribus inventis consideremus tantum  
 Fig. 6. hoc triangulum  $BOC$ , in quo ducta est recta  $Oa$ , sitque,  
 uti posuimus,  $OB = B$ ,  $OC = C$ ,  $Oa = a$ , qua recta ba-  
 sis  $BC$  ita secatur in  $a$ , ut sit  $Ba : Ca = \gamma : \beta$ , sicque  
 nunc reducti sumus ad hoc problema: quomodo ex datis  
 trianguli lateribus  $OB$  et  $OC$ , et recta  $Oa$  basin  $BC$  in  
 data ratione secante, ipsum triangulum construi possit.

§. 34. Hunc in finem angulos ad punctum  $O$  ita de-  
 nominemus, uti in figura sunt signati, eorumque summa  
 $p + q + r$  aequetur duobus rectis. Jam ad rationem si-

nūm horūm angulorum investigandam triangulum  $OB\alpha$  dat hanc proportionem:

$$\sin. B : \sin. r = O\alpha : B\alpha = a : \frac{\gamma\alpha}{1-\alpha}.$$

At totum triangulum  $BOC$  praebet  $\sin. p : \sin. B = BC : OC$ , quibus proportionibus inter se multiplicatis fiet

$$\sin. p : \sin. r = a : \frac{c\gamma}{1-\alpha},$$

ita ut sit  $\sin. r = \frac{C\gamma \sin. p}{a(1-\alpha)}$ , similique modo reperietur

$\sin. q = \frac{B\beta \sin. p}{a(1-\alpha)}$ . Sicque ratio constat inter sinus angulorum  $q$  et  $r$  et sinum anguli  $p$ , quandoquidem assumimus, quantitates  $A, B, C$ , et  $a, b, c$ , hincque etiam  $\alpha, \beta, \gamma$ , esse cognitae.

§. 35. Consideremus jam propius hos tres angulos  $p, q, r$ , quorum summa quia duobus rectis aequatur, dabitur aliquod triangulum, cujus anguli illis ipsis sunt aequales. Quare cum hi tres sinus, scil.  $\sin. p, \sin. q, \sin. r$ , eandem inter se teneant rationem, quam tenent istae tres quantitates cognitae:  $a(1-\alpha); B\beta; C\gamma$ , si construamus triangulum ex his tribus lateribus, anguli illis oppositi erunt ipsi anguli quaesiti  $p, q, r$ .

§. 36. Totum ergo negotium conficietur, si construat- Tab. I.  
tur triangulum  $O\mathfrak{C}\mathfrak{B}$ , cujus basis sit  $\mathfrak{B}\mathfrak{C} = a(1-\alpha) = A\alpha$  Fig. 7.  
et latera  $\mathfrak{B}O = B\beta$  et  $\mathfrak{C}O = C\gamma$ , hujus enim anguli erunt:  
ad  $O = p$ , ad  $\mathfrak{B} = r$  et ad  $\mathfrak{C} = q$ . Producto igitur la-

tere  $\mathcal{B}O$  in  $B$ , ut sit  $OB = B$ , si in altero latere  $O\mathcal{C}$  abscindatur portio  $OC = C$ , hae duae lineae jam inter se constituunt angulum  $q + r$ , uti calculus superior postulat; tum vero si ex  $O$  ducamus ipsi  $\mathcal{B}\mathcal{C}$  parallelam  $Oa$ , habebimus simul punctum  $a$  in recta  $BC$ , erit idcirco ipsa recta  $Oa = a$ , hocque modo problema nostrum penitus est solutum. Quod si enim rectae  $BO$  ad alteram partem usque in  $b$ ,  $CO$  usque in  $c$  et  $aO$  usque in  $A$  producantur, tota figura initio proposita erit completa, hocque modo ex datis sex quantitibus  $A, B, C$ , una cum  $a, b, c$ , ita tamen, ut inventa conditio observetur, hac simplicissima operatione totum triangulum construitur.

§. 37. Casus ergo, quem hic tractavimus, eo majore attentione dignus est censendus, quod initio calculos satis abstrusos et molestos requirere videbatur, cum tamen, superatis omnibus difficultatibus, ad solutionem simplicissimam aequae ac elegantissimam sumus perducti.



Page  
406  
514  
579  
585  
610  
628  
650  
662  
719

