1815

Investigatio quadrilateri, in quo singularum angulorum sinus datam inter se teneant rationem, ubi artificia prorsus singularia in Analysi Diophantea occurrunt

Leonhard Euler

INVESTIGATIO QUADRILATERI IN QUO SINGULORUM ANGULORUM SINUS DATAM INTER SE TENEANT RATIONEM;

UBI ARTIFICIA PRORSUS SINGULARIA IN ANALYSI DIOPHANTEA OCCURRUNT.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhibita die 1 Maii 1780.

§. 1. Sint $p, q, r, s,$ anguli quadrilateri quaesiti, quorum sinus eandem inter se teneant rationem quam isti numeri dati: $a, b, c, d.$ Jam quia summa horum quatuor angulorum aequatur quatuor rectis, inde statim deducimus has tres aequationes:

$$\text{I. } \sin.(p+q) + \sin.(r+s) = 0,$$
$$\text{II. } \sin.(p+r) + \sin.(q+s) = 0,$$
$$\text{III. } \sin.(p+s) + \sin.(q+r) = 0,$$

quarum quidem quaelibet binas reliquas in se complectitur; interim tamen plurimum juvabit, omnes tres considerasse, cum inde solutio multo simplicior et elegantior derivari queat.

§. 2. Nunc istorum angulorum tam sinus quam cosinus sequenti modo designemus:

$$\sin. p = ax; \quad \cos. p = \sqrt{1 - aaxx} = A,$$
$$\sin. q = bx; \quad \cos. q = \sqrt{1 - bbxx} = B,$$
$$\sin. r = cx; \quad \cos. r = \sqrt{1 - ccxx} = C,$$
$$\sin. s = dx; \quad \cos. s = \sqrt{1 - ddxx} = D,$$

et jam totum negotium eo redit, ut quantitas x rite determinetur. Hinc igitur erit

$$\sin. (p + q) = axB + bxA,$$
$$\sin. (r + s) = cxD + dxC,$$

unde prima aequatio statim induet hanc formam:

$$aB + bA + cD + dC = o.$$

Hinc quidem secundum praecepta Algebrae formulae radicales A, B, C, D, quadrata continuo sumendo, successive eliminari possent; verum hoc modo non solum ad aequationem maxime complicatam perveniretur, sed etiam signa harum formularum radicalium nullo amplius modo innotescerent, quo ipso tota solutio nimis prodiret ambigua et incerta. Quamobrem longe aliam viam sum initurus, qua istud incommodum penitus evitabitur, simulque solutio satis concinna et elegans eruetur.

§. 3. Ternae ergo aequationes initio memoratae, istis denominationibus adhibitis, sequentes nobis suppeditabunt aequationes:

$$\text{I.}\quad aB + bA + cD + dC = 0,$$
$$\text{II.}\quad bC + cB + dA + aD = 0,$$
$$\text{III.}\quad dB + bD + cA + aC = 0,$$

unde jam facile intelligitur, rationes inter binas literarum majuscularum definiri posse, quod commodissime fit per hanc combinationem generalem:

$$\text{I. } \lambda + \text{II. } \mu + \text{III. } \nu = 0,$$

§. 4. Ut ergo hinc litera D extirpetur, fieri debet $\lambda c + \mu a + \nu b = 0$. At vero litera C elidetur, sumendo $\lambda d + \mu b + \nu a = 0$. Harum jam duarum aequationum si posterior, per b multiplicata, a priore, in a ducta, aufferatur, ut litera ν extirpetur, prodibit ista aequatio:

$$\lambda(ac - bd) + \mu(aa - bb) = 0,$$

unde erit $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{aa - bb}{bd - ac}$. Et quia hic tantum ratio in computum venit, sumamus $\lambda = aa - bb$ et $\mu = bd - ac$, quibus valoribus in altera postremarum aequationum substitutis prodit $\nu = bc - ad$.

§. 5. Surrogemus nunc istos valores in aequatione assumta I. λ + II. μ + III. $\nu = 0$, et quoniam ambae literae C et D ex calculo expelluntur, litera A jam factorem habebit $\lambda b + \mu a + \nu c$, qui induit hanc formam:

$$-b^3 + b(aa + cc + dd) - 2acd.$$

At vero litera B factorem habebit $\lambda a + \mu c + \nu d$, sive

$$a^3 - a(bb + cc + dd) + 2bcd.$$

Hinc igitur istam deducimus rationem:

$$\frac{A}{B} = \frac{a^3 - a(bb + cc + dd) + 2bcd}{b^3 - b(aa + cc + dd) + 2acd},$$

atque ex hac forma facile concluditur fore simili modo

$$\frac{A}{C} = \frac{a^3 - a(bb + cc + dd) + 2bcd}{c^3 - c(aa + bb + dd) + 2abd},$$

$$\frac{A}{D} = \frac{a^3 - a(bb + cc + dd) + 2bcd}{d^3 - d(aa + bb + cc) + 2abc}.$$

§. 6. His formulis inventis ponamus brev. gr.

$$\alpha = a^3 - a(bb + cc + dd) + 2bcd,$$
$$\beta = b^3 - b(aa + cc + dd) + 2acd,$$
$$\gamma = c^3 - c(aa + bb + dd) + 2abd,$$
$$\delta = d^3 - d(aa + bb + cc) + 2abc,$$

ita ut sit $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$; $\frac{A}{C} = \frac{\alpha}{\gamma}$; $\frac{A}{D} = \frac{\alpha}{\delta}$; unde intelligimus nostrorum angulorum cosinus, A, B, C, D eandem inter se tenere rationem quam habent isti numeri α, β, γ, δ, qui ex numeris datis a, b, c, d, facile formantur. Ex quo manifestum est, si ratio cosinuum singulorum angulorum p, q, r, s, loco sinuum esset praescripta, hac methodo etiam non difficulter solutionem inveniri posse.

§. 7. Quoniam igitur cosinus angulorum proportionales sunt literis $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, statuamus $\cos.p = \alpha y$, $\cos.q = \beta y$, $\cos.r = \gamma y$, $\cos.s = \delta y$; sicque totum negotium jam eo est reductum, ut valores binarum literarum incognitarum x et y investigari debeat, ad quod has duas formulas in subsidium vocasse sufficiet:

I. $aaxx + \alpha\alpha yy = 1$; II. $bbxx + \beta\beta yy = 1$, quarum differentia: $(aa - bb)\,xx + (\alpha\alpha - \beta\beta)\,yy = 0$, nos perduceret ad relationem inter x et y: at vero potius inde investigemus seorsim tam xx quam yy. Primo igitur ab aequatione posteriore, ducta in $\alpha\alpha$, prior, ducta in $\beta\beta$, subtrahatur, et obtinebimus hanc aequationem:

$$(\alpha\alpha bb - \beta\beta aa)\,xx = \beta\beta - \alpha\alpha.$$

Contra autem, prior per bb, posterior vero per aa multiplicata, dat $(\alpha\alpha bb - \beta\beta aa)\,yy = bb - aa$.

§. 8. Incipiamus ab hac postrema aequatione, quae per factores ita repraesentetur:

$$(\alpha b + \beta a)(\alpha b - \beta a)\,yy = (b + a)(b - a),$$

et jam, substitutis pro α et β valoribus supra datis, erit

$$\alpha b + \beta a = 2cd(aa + bb) - 2ab(cc + dd),$$

sive

$$\alpha b + \beta a = 2(ac - bd)(ad - bc).$$

Porro vero erit $\alpha b + \beta a = 2(ab - cd)(aa - bb)$, consequenter

$$yy = \frac{1}{4(ac - bd)(bc - ad)(ab - cd)}.$$

§. 9. Pro altera aequatione, qua xx determinatur, modo vidimus factorem membri ejus sinistri esse

$$\alpha\alpha bb - \beta\beta aa = 4(bb - aa)(bc - ad)(ac - bd)(ab - cd).$$

At vero pro membro dextro $\beta\beta - \alpha\alpha$ habebimus primo

$$\beta + \alpha = (b + a)(bb - 2ab + aa - cc + 2cd - dd)$$

$$= (b + a)[(b - a)^2 - (c - d)^2] = (b + a)(b - a + c - d)(b - a - c + d).$$

Deinde vero erit

$$\beta - \alpha = (b - a)(bb + 2ab + aa) - cc - 2cd - dd)$$
$$= (b - a)[(b + a)^2 - (c + d)^2] = (b - a)(b + a + c + d)(b + a - c - d).$$

Quia nunc productum horum factorum membro sinistro aequatur, utrinque per $bb - aa$ dividendo obtinebimus

$$xx = \frac{(b + a + c + d)(b + a - c - d)(b - a + c - d)(b - a - c + d)}{4(ad - bc)(ac - bd)(ab - cd)}$$

hocque modo nostrum problema penitus est solutum, ejusque solutio ita se habet:

Problema.

Si in quadrilatero sinus angulorum inter se teneant eandem rationem, ut numeri dati a, b, c, d, *ipsos angulos invenire.*

Solutio.

§. 10. Sint p, q, r, s, anguli quaesiti, ponanturque eorum sinus et cosinus:

$$\sin. p = ax; \quad \cos. p = \alpha y,$$
$$\sin. q = bx; \quad \cos. q = \beta y,$$
$$\sin. r = cx; \quad \cos. r = \gamma y,$$
$$\sin. s = dx; \quad \cos. s = \delta y,$$

primo pro sinibus invenimus esse

$$xx = \frac{(a + b + c + d)(a + b - c - d)(a + c - b - d)(b + c - a - d)}{4(ab - cd)(ac - bd)(bc - ad)}$$

ubi singulos factores ita ordinavimus, ut cum ordine literarum conveniant, scilicet, si horum numerorum maximus sit a et minimus d, in numeratore tres priores factores manifesto sunt positivi; quare, quo etiam quartus sit positivus, requiritur ut quoque sit $(b+c) > (a+d)$. Simili modo in denominatore bini factores priores manifesto sunt positivi, unde etiam necesse est ut pro tertio sit bc majus quam ad.

§. 11. Pro cosinibus invenimus, eodem literarum ordine observato, esse

$$yy = \frac{1}{4(ab-cd)(ac-bd)(bc-ad)}.$$

Praeterea vero invenimus

$$\alpha = a^3 - a(bb+cc+dd) + 2bcd,$$
$$\beta = b^3 - b(aa+cc+dd) + 2acd,$$
$$\gamma = c^3 - c(aa+bb+dd) + 2abd,$$
$$\delta = d^3 - d(aa+bb+cc) + 2abc.$$

Antequam autem has formulas ulterius perpendamus, nonnulla exempla evolvamus, numeros a, b, c, d, ita assumendo, ut a sit maximus et d minimus, summa mediorum autem $b+c$ major quam $a+d$.

Exemplum 1.

§. 12. Sit $a=4$, $b=3$, $c=3$ et $d=1$, atque ex his valoribus deducimus literas α, β, γ, δ, hoc modo: $\alpha=6$; $\beta=-27$; $\gamma=-27$; $\delta=39$. Deinde vero prodit $x=\frac{\sqrt{11}}{6\sqrt{5}}$ et $y=\pm\frac{1}{18\sqrt{5}}$. Semper enim duae solutiones locum habent, quoniam, si summa quatuor angulorum fuerit

$360°$, summa complementorum eorundem etiam est $360°$. Hinc ergo sinus et cosinus angulorum quaesitorum, ipsique anguli, erunt ut haec tabula eos indicat:

$$\begin{array}{lll}
\sin. p = \frac{4\sqrt{11}}{6\sqrt{5}}, & \cos. p = \frac{\pm 1}{3\sqrt{5}}, & p = 81°, 25', 37'', \\
\sin. q = \frac{3\sqrt{11}}{6\sqrt{5}}, & \cos. q = \frac{\mp 3}{2\sqrt{5}}, & q = 132, \ 7, 50, \\
\sin. r = \frac{3\sqrt{11}}{6\sqrt{5}}, & \cos. r = \frac{\mp 3}{2\sqrt{5}}, & r = 132, \ 7, 50, \\
\sin. s = \frac{\sqrt{11}}{6\sqrt{5}}, & \cos. s = \frac{\pm 13}{6\sqrt{5}} & s = \ 14, 18, 43, \\
\hline
 & & \quad 360, -\ -
\end{array}$$

Exemplum 2.

§. 13. Sit $a = 8$, $b = 7$, $c = 6$, $d = 1$; eritque $\alpha = -92$; $\beta = -268$; $\gamma = -356$; $\delta = 524$. Porro vero erit $x = \sqrt{\frac{12 . 22}{25 . 41 . 17}}$ et $y = \pm\sqrt{\frac{1}{4 . 50 . 41 . 34}}$, sive

$$x = 0{,}1230880 \text{ et } y = \pm 0{,}0018939$$

$$\begin{array}{lll}
l \sin. p = 9{,}9933055 & \text{Angulus } p = & 100°, \ 2', \ 1'', \\
l \sin. q = 9{,}9353135 & \ .\ \ . \quad q = & 120, 30, \ 6, \\
l \sin. r = 9{,}8683668 & \ .\ \ . \quad r = & 132, 23, 39, \\
l \sin. s = 9{,}0902155 & \ .\ \ . \quad s = & \ 7, \ 4, 14, \\
\hline
 & & 360, -\ -
\end{array}$$

Exemplum 3.

§. 14. Sit $a = 15$, $b = 14$, $c = 11$, et $d = 6$, eritque $\alpha = -72$; $\beta = -624$; $\gamma = -1176$; $\delta = +1584$. Porro fiet $xx = \frac{12 . 46 . 6 . 4}{2^2 . 12^2 . 9^2 . 8^2}$ et $yy = \frac{1}{2^2 . 12^2 . 9^2 . 8^2}$, sive

$$y = \frac{1}{2 . 12 . 9 . 8} = \frac{1}{1728} \text{ et } x = \frac{\sqrt{23}}{72}.$$

Hinc ergo sinus et cosinus nostrorum angulorum, et ipsi anguli, erunt

$$\begin{array}{llll}
\sin. p = \frac{5}{24}\sqrt{23}; & \cos. p = -\frac{1}{24}; & p = & 92^\circ, 23', 16'', \\
\sin. q = \frac{7}{36}\sqrt{23}; & \cos. q = -\frac{13}{36}; & q = & 111, 10, 6, \\
\sin. r = \frac{11}{72}\sqrt{23}; & \cos. r = -\frac{49}{72}; & r = & 132, 53, 14, \\
\sin. s = \frac{1}{12}\sqrt{23}; & \cos. s = +\frac{11}{12}; & s = & 23, 33, 24, \\
\hline
 & & & 360 - - -
\end{array}$$

Hoc exemplum ideo est notatu dignum, quod omnes cosinus prodierint rationales.

§. 15. Quo autem indoles hujus solutionis clarius perspiciatur, indagemus conditiones necessarias, ut anguli evadant reales; ubi quidem assumemus numerorum a, b, c, d primum a esse maximum, d vero minimum: tum vero, esse $b > c$. Ac primo quidem constat, ut valor pro yy inventus prodeat positivus, quia bini factores $ab - cd$ et $ac - bd$ manifesto sunt nihilo majores, necesse esse, ut factor $bc - ad$ etiam fiat positivus, sive ut $bc > ad$. Praeterea vero, ut etiam valor ipsius xx fiat positivus, quoniam tres priores factores per se sunt nihilo majores, res eo redit ut ultimus factor $b + c - a - d$ quoque sit nihilo major, hoc est $(b + c) > (a + d)$; verum hae duae conditiones ad solam posteriorem $(b + c) > (a + d)$ revocantur. Quoties enim fuerit $(b + c) > (a + d)$, semper quoque erit $bc > ad$, sed non vice versa. Ad hoc ostendendum ponamus $a = b + t$ et $c = d + u$, et quia $b + c > a + d$ erit $u > t$, hinc, cum sit $bc = bd + bu$ et $ad = bd + dt$, horum valorum prior manifesto major est posteriore, quia $b > d$ et $u > t$, ideoque $bu > dt$ et $bc > ad$.

§. 16. Loco fractionis pro xx inventae scribamus brevitatis gratia $xx = \frac{v}{z}$, ita ut sit

$$v = (a+b+c+d)(a+b-c-d)(a+c-b-d)(b+c-a-d)$$

et $z = 4(ab-cd)(ac-bd)(bc-ad)$, atque vidimus fore $yy = \frac{1}{z}$. Hinc ergo erit $\sin. p = a\sqrt{\frac{v}{z}}$ et $\cos. p = \frac{\alpha}{\sqrt{z}}$; unde sequitur fore $\frac{aav}{z} + \frac{\alpha\alpha}{z} = 1$, ideoque $z - aav = \alpha\alpha$, quo observato sequens problema diophanteum resolvi poterit, cujus solutio aliàs satis ardua foret.

Problema Diophanteum.

Propositis quatuor numeris quadratis aa, bb, cc, dd, *invenire duos numeros* z *et* v, *ut* z — aav; z — bbv; z — ccv; z — ddv *fiant numeri quadrati.*

Solutio:

§. 17. Ex praecedentibus manifestum est, huic problemati satisfactum iri, sumendo

$$v = (a+b+c+d)(a+b-c-d)(a+c-b-d)(b+c-a-d)$$

et $z = (ab-cd)(ac-bd)(bc-ad)$,

quae solutio non solum ob simplicitatem summa attentione digna videtur, sed etiam inprimis ideo, quod per praecepta cognita Analyseos indeterminatae plerumque solutiones maxime intricatae reperirentur. Interim tamen etiam ista solutio ex hac ipsa Analysi satis commode sequenti modo erui potest.

§. 18. Cum quatuor formulae praescriptae quadrata effici debeant, etiam earum productum erit quadratum, quod quo facilius referri queat, statuamus

$$aa + bb + cc + dd = \mathrm{P};$$

tum vero

$$aabb + aacc + aadd + bbcc + bbdd + ccdd = \mathrm{Q};$$

$$aabbcc + aabbdd + aaccdd + bbccdd = \mathrm{R}$$

denique $abcd = \mathrm{S}$, hincque ipsum productum sequenti modo expressum reperitur:

$$z^4 - \mathrm{P}z^3v + \mathrm{Q}zzvv - \mathrm{R}zv^3 + \mathrm{SS}v^4,$$

quod ut quadratum reddatur, statuamus ejus radicem

$$zz - \tfrac{1}{2}\mathrm{P}zv + \mathrm{S}vv,$$

cujus quadratum, a producto illo ablatum, relinquet

$$(\mathrm{Q} - \tfrac{1}{4}\mathrm{PP})\,z = (\mathrm{R} - \mathrm{PS})\,v, \quad \text{unde fit}$$

$$\frac{v}{z} = \frac{\mathrm{Q} - \frac{1}{4}\mathrm{PP}}{\mathrm{R} - \mathrm{PS}} = \frac{4\mathrm{Q} - \mathrm{PP}}{4(\mathrm{R} - \mathrm{PS})}.$$

§. 19. Evolvamus seorsim tam numeratorem quam denominatorem, ac pro numeratore reperiemus:

$$4\mathrm{Q} - \mathrm{PP} = 2aabb + 2aacc + 2aadd + 2bbcc + 2bbdd + 2ccdd$$
$$- a^4 - b^4 - c^4 - d^4,$$

quae expressio facile in sequentes factores resolvitur:

$$4Q - PP = (a+b+c+d)(a+b-c-d)(a+c-b-d)(b+c-a-d).$$

Simili modo pro denominatore fiet

$$R - PS = aabbcc + aabbdd + aaccdd + bbccdd$$
$$- a^3 b^3 c^3 d - a^3 b^3 d^3 c - a^3 c^3 d^3 b - b^3 c^3 d^3 a$$

quod resolvitur in hos factores:

$$R - PS = (ab - cd)(ac - bd)(bc - ad)$$

qui ergo valores cum solutione praecedente egregie conveniunt. Verum hinc plus non sequitur, nisi quod productum quatuor formularum propositarum sit quadratum, sicque adhuc dubium superesse potest, num etiam singulae formulae fiant quadrata.

§. 20. Tertium exemplum ante allatum occasionem suppeditat, conditiones investigandi, sub quibus valor pro yy inventus fiat quadratum, quamobrem adhuc istud problema adjungamus.

Problema Diophanteum.

Quatuor numeros a, b, c, d, *quorum* a *sit maximus et* d *minimus, tum vero* $b + c > a + d$, *ita determinare, ut tres istae formulae:* 1°) $ab - cd$; 2°) $ac - bd$; 3°) $bc - ad$; *evadant numeri quadrati.*

Solutio.

§. 21. Pro adimplendis binis prioribus conditionibus ponamus $ab - cd = xx$ et $ac - bd = yy$, hincque fiet

$axx+dyy=b(aa-dd)$, tum vero $ayy+dxx=c(aa-dd)$, unde deducimus $b=\frac{axx+dyy}{aa-dd}$ et $c=\frac{ayy+dxx}{aa-dd}$. His valoribus substitutis tertia conditio postulat ut sit

$$\frac{(axx+dyy)(ayy-dxx)}{(aa-dd)^2}-ad=\Box$$

id quod non adeo est facile.

§. 22. Quo huic conditioni satisfaciamus, tractemus primo casum quo $x=y$, et facta multiplicatione per $(aa-dd)^2$ ista formula quadratum reddi debebit:

$$(a+d)^2x^4-ad(aa-dd)^2=\Box$$

quae per $(a+d)^2$ divisa dat $x^4-ad(a-d)^2=\Box$, haecque conditio adimplebitur; si statuamus $x=\frac{a+d}{2}$, sic enim prodit

$$a^4+4a^3d+6aadd+4ad^3+d^4-16ad(a-d)^2=\Box,$$

quod penitus evolutum praebet hanc formulam sponte quadratam:

$$a^4-12a^3d+38aadd-12ad^3+d^4=\Box$$

cujus radix est $aa-6ad+dd$.

§. 23. Cum autem hoc casu fieret $b=c$, ut etiam alios casus hinc eruamus, statuamus $x=\frac{a+d+v}{2}$ et $y=\frac{a+d-v}{2}$, hincque reperietur

$$xx=\frac{(a+d)^2+2(a+d)v+vv}{4},$$
$$yy=\frac{(a+d)^2-2(a+d)v+vv}{4},$$

eritque primo

$$axx+dyy=\frac{(a+d)^3+2v(aa-dd)+(a+d)vv}{4},$$
$$ayy+dxx=\frac{(a+d)^3-2v(aa-dd)+(a+d)vv}{4},$$

quamobrem habebimus

$$b = \frac{(a+d)^2 + 2(a-d)v + vv}{4(a-d)},$$
$$c = \frac{(a+d)^2 - 2(a-d)v + vv}{4(a-d)}.$$

§. 24. Nunc productum bc sequenti modo commode exprimetur:

$$bc = \frac{(a+d)^4 + 2(a+d)^2 vv + v^4 - 4(a-d)^2 vv}{16(a-d)^2}$$

sive $bc = \frac{(a+d)^4 - 2(aa - 6ad + dd)vv + v^4}{16(a-d)^2}$.

Hinc igitur erit

$$bc - ad = \frac{(a+d)^4 - 2(aa - 6ad + dd)vv + v^4 - 16ad(a-d)^2}{16(a-d)^2}$$

unde quadratum fieri debet haec formula:

$$(aa - 6ad + dd)^2 - 2(aa - 6ad + dd)vv + v^4 = \square$$

quod utique evenit; ejus enim radix est $aa - 6ad + dd - vv$. Difficillimum autem foret solutionem indagare, nisi jam sponte pateret formam hanc esse quadratum, cum desint potestates impares.

§. 25. Hinc ergo patet, literam v, in calculum introductam, penitus arbitrio nostro relinqui, unde licebit conditiones praescriptas penitus adimplere. Primo scilicet cum sit $b + c = \frac{(a+d)^2 + vv}{2(a-d)}$, quae quantitas superare debet $a + d$, sequitur fore $v > \sqrt{a^2 - 2ad - 3dd}$, quae conditio primo est observanda. Praeterea vero, quia esse debet $a > b$, hinc deducimus hanc determinationem:

$$4a(a-d) > (a+d)^2 + 2(a-d)v + vv$$

sive $4a(a-2d) > (a-d+v)^2$, consequenter

$$v < 2\sqrt{a(a-2d)} - (a-d),$$

sicque habemus duos limites, intra quos valor ipsius v accipi debet; unde patet, ante omnia requiri, ut sit $a > 2d$, quia alioquin conditionibus praescriptis satisfieri non liceret. Operae igitur pretium erit hanc solutionem aliquot exemplis illustrare.

Exemplum 1.

§. 26. Sit $a = 3d$, et limites, intra quos v subsistere debet, erunt $v > 0$ et $v < 2d\sqrt{3} - 2d$, sive $v < 1{,}464 \cdot d$. Sumto igitur v intra hos limites erit $b = \frac{16dd + 4dv + vv}{8d}$ et $c = \frac{16dd - 4dv + vv}{8d}$. Casus autem simplicissimus eruitur sumendo $v = d$, quo pacto fiet $b = \frac{21}{8}d$ et $c = \frac{13}{8}d$, sive posito $d = 8$ quatuor numeri quaesiti erunt:

$$a = 24;\ b = 21;\ c = 13;\ d = 8.$$

Sumatur $v = \frac{1}{2}d$, sive $d = 2$ et $v = 1$, ideoque $a = 6$, eritque $b = \frac{73}{16}$ et $c = \frac{57}{16}$, unde per 16 multiplicando quatuor numeri quaesiti erunt

$$a = 96;\ b = 73;\ c = 57;\ d = 32.$$

Exemplum 2.

§. 27. Sumamus $a = \frac{5}{2}d$, sive, ut fractiones tollantur, sumatur $d = 2$ et $a = 5$, atque limites pro v erunt $vv > -7$, quod sponte evenit, et $v < 2\sqrt{5} - 3 < 1{,}472$, tum vero erit $b = \frac{49+6v+vv}{12}$ et $c = \frac{49-6v+vv}{12}$. Hic ergo iterum sumere licet $v=1$, unde fit $b=\frac{14}{3}$ et $c=\frac{11}{3}$, et per 3 multiplicando quatuor numeri quaesiti erunt $a=15$, $b=14$, $c=11$, $d=6$, quod est ipsum tertium exemplum supra allatum. Sumto autem $v=\frac{1}{2}$ fiet $b=\frac{209}{48}$ et $c=\frac{185}{48}$, hincque $a=240$; $b=209$; $c=185$; $d=96$.

Exemplum 3.

§. 28. Sit $a=4$ et $d=1$, erit $b=\frac{25+6v+vv}{12}$ et $c=\frac{25-6v+vv}{12}$. At vero limites pro v erunt $v>\sqrt{5}>2,236$ et $v<4\sqrt{2}-3<2,656$. Sumatur ergo $v=2,5=\frac{5}{2}$, eritque $b=\frac{185}{48}$ et $c=\frac{65}{48}$, ideoque quatuor numeri quaesiti erunt $a=192$; $b=185$; $c=65$; $d=48$.

Alia Solutio:

§. 29. Sumatur $d=1$, ut sit $b=\frac{axx+yy}{aa-1}$ et $c=\frac{ayy+xx}{aa-1}$. Nunc pro initio ponamus $x=2y$, fietque $b=\frac{(4a+1)yy}{aa-1}$ et $c=\frac{(a+4)yy}{aa-1}$. Hinc formula $bc-a$, quae quadratum esse debet, induet hanc formam:

$$(4aa+17a+4)y^4 - a(aa-1)^2 = \square.$$

Quia autem hic a in posteriore membro ad quintam potestatem assurgit, statuamus $y=(a+1)z$, ut formula per $(a+1)^2$ dividi queat, ac reperietur

$$(a+1)^2(4aa+17a+4)z^4 - a(a-1)^2 = \square.$$

§. 30. Videamus nunc, qualis forma sit striprodiproditura sumto $z = 1$, ac reperiemus hanc:

$$4a^4 + 24a^3 + 44aa + 24a + 4 = \square,$$

quae per 4 divisa fit $a^4 + 6a^3 + 11aa + 6a + 1 = \square$, ubi praeter omnem expectationem evenit, ut ista formula revera sit quadratum, quippe cujus radix est $aa + 3a + 1$. Quare cum pro hoc casu sit $y = a + 1$, in sequentem usum notetur esse

$$(a + 1)^4 (4aa + 17a + 4) - a(aa - 1)^2 = \square$$

ejusque radix $= 2(a + 1)(aa + 3a + 1)$.

§. 31. Ut hinc solutionem magis generalem eruamus, statuamus $y = a + 1 - v$ et $x = 2(a + 1) - v$; facile enim est praevidere, facta substitutione prodituram esse formulam quarti gradus, cujus tam primus terminus quam ultimus fient quadratum, quae conditio in analysi diophantea maximi est momenti. Cum igitur hinc sit

$$xx = 4(a + 1)^2 - 4(a + 1)v + vv$$

$$\text{et } yy = (a + 1)^2 - 2(a + 1)v + vv,$$

fiet $axx + yy = (4a + 1)(a + 1)^2 - (4a + 2)(a + 1)v + (a + 1)vv$,

$$ayy + xx = (a + 4)(a + 1)^2 - (2a + 4)(a + 1)v + (a + 1)vv,$$

quarum formarum productum, dempto membro $a(aa - 1)^2$, debet reddi quadratum. At vero illud productum reperitur, ut sequitur

$$(4a+1)(a+4)(a+1)^4 - 12(aa+3a+1)(a+1)^3 v$$
$$+ (13aa+30a+13)(a+1)^2 vv - 6(a+1)^3 v^3 + (a+1)^2 v^4,$$

a quo jam subtrahi debet membrum posterius $a(aa-1)^2$, quod a primo membro sublatum, relinquit, ut supra vidimus, quantitatem absolutam $4(aa+3a+1)^2(a+1)^2$, quamobrem tota formula per $(a+1)^2$ divisa evadet

$$4(aa+3a+1)^2 - 12(aa+3a+1)(a+1)v$$
$$+ (13aa+30a+13)vv - 6(a+1)v^3 + v^4,$$

quam formulam quadratum reddi oportet.

§. 32. Hanc autem formulam accuratius perpendenti mirabili profecto casu patebit, eam jam revera esse quadratum, quippe cujus radix deprehenditur esse

$$2(aa+3a+1) - 3(a+1)v + vv;$$

quamobrem, cum haec formula jam sponte sua prodierit quadratum, quantitas v nulla determinatione indiget, sed penitus arbitrio nostro relinquitur. Hinc ergo sumtis binis literis a et v pro lubitu, literae b et c inde ita definiuntur ut sit

$$b = \frac{(4a+1)(a+1) - (4a+2)v + vv}{a-1},$$
$$c = \frac{(a+4)(a+1) - (2a+4)v + vv}{a-1},$$

quo pacto formula $bc - a$, ut vidimus, sponte fit quadratum.

§. 33. Nihil aliud igitur superest, nisi ut reliquis conditionibus praescriptis satisfiat, quibus postulatur: 1°) ut sit $b + c > a + 1$; 2°) ut sit $b < a$; 3°) ut sit $c < a$. Prima autem conditio praebet

$$5(a+1)^2 - 6(a+1)v + 2vv > aa - 1,$$

quae transmutatur in hanc:

$$9(a+1)^2 - 12(a+1)v + 4vv > aa - 2a - 3,$$

seu extracta radice $2v - 3(a+1) > \sqrt{(a+1)(a-3)}$, ideoque $v > \frac{3(a+1) \pm \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2}$, unde gemini limites concluduntur 1°) $v > \frac{3(a+1) + \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2}$;

2°) $v < \frac{3(a+1) - \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2}$.

Soli ergo valores intra hos limites contenti excluduntur.

§. 34. Secunda conditio, qua $b < a$, praebet

$$(4a+1)(a+1) - (4a+2)v + vv < aa - a,$$

quae transformatur in hanc:

$$(2a+1)^2 - 2(2a+1)v + vv < aa - 2a,$$

hinc radice extracta fiet $v < 2a + 1 \pm \sqrt{aa - 2a}$, unde iterum duo limites stabiliuntur, scilicet $v < 2a+1+\sqrt{aa-2a}$ et $v > 2a + 1 - \sqrt{aa - 2a}$; unde sequitur valores ipsius v intra hos limites accipi debere.

§. 35. Tertia conditio postulat ut sit $c < a$, unde prodit $(a+4)(a+1) - (2a+4)v + vv < aa - a$, sive $(a+2)^2 - 2(a+2)v + vv < aa - 2a$, ideoque

$$v < a + 2 + \sqrt{aa - 2a} \text{ et } v > a + 2 - \sqrt{aa - 2a}.$$

§. 36. Quodsi hos limites inter se comparemus, statim patet, eos adimpleri non posse, si capiatur $a < 2$; deinde vero si $a = 2$, limites illi nullum intervallum inter se relinquunt; ex quo intelligitur, solutionem locum habere non posse, nisi sit $a > 2$. Quoniam igitur $2a + 1$ semper majus erit quam $a + 2$, perspicuum est, dummodo fuerit $v < a + 2 + \sqrt{aa - 2a}$, tum quoque fore

$$v < 2a + 1 + \sqrt{aa - 2a},$$

unde iste limes est superfluus. Deinde, dummodo fuerit $v > 2a + 1 - \sqrt{aa - 2a}$, multo magis erit

$$v > a + 2 - \sqrt{aa - 2a};$$

quamobrem duo tantum limites nobis relinquuntur, scil.

$$v > 2a + 1 - \sqrt{aa - 2a},$$

$$v < a + 2 + \sqrt{aa - 2a},$$

qui duo limites, quia nunquam in unum coalescere possunt, semper aliquod intervallum inter se relinquunt, intra quod valor ipsius v cadere debet. Praeterea vero necesse est ut v extra binos limites supra inventos cadat, qui erant

$$v > \frac{3(a+1) + \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2} \text{ et } v < \frac{3(a+1) - \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2}$$

quas conditiones aliquot exemplis illustremus.

Exemplum 1.

§. 37. Existente $d = 1$ sumatur $a = 3$, eritque

$$b = \frac{52 - 14v + vv}{2} \text{ et } c = \frac{28 - 10v + vv}{2}.$$

Nunc vero v cadere debet intra hos limites: $v > 7-\sqrt{3} < 5+\sqrt{3}$, sive $v > 5,268$, et $v < 6,732$. Praeterea vero esse debet vel $v > 6$ vel $v < 6$, quibus ergo satisfit, dum ne sit $v = 6$. Sumamus ergo $v = 5\frac{1}{2} = \frac{11}{2}$, fietque $b = \frac{21}{8}$ et $c = \frac{13}{8}$. Multiplicando per 8 quatuor nostri numeri erunt $a = 24$; $b = 21$; $c = 13$; $d = 8$, quem casum jam supra invenimus, etiamsi haec methodus diversissima sit a praecedente solutione. Sumamus etiam $v = \frac{13}{2}$, erit $b = \frac{13}{8}$ et $c = \frac{21}{8}$, hincque $a = 24$; $b = 13$; $c = 21$; $d = 8$, qui casus praecedenti prorsus est similis, hoc solo discrimine, quod literae b et c sint permutatae.

Exemplum 2.

§. 38. Sumatur $a = \frac{5}{2}$, eritque $b = \frac{77 - 24v + vv}{3}$ et $c = \frac{91 - 36v + 4vv}{6}$; tum vero limites, intra quos valor literae v cadere debet, erunt $v > 6 - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ et $v < \frac{9+\sqrt{5}}{2}$, sive $v > 4,882$ et $v < 5,618$: limites vero, extra quos hic valor cadere debet, sunt imaginarii, qui ergo nullos plane valores excludunt. Sumamus igitur $v = 5$, eritque $b = \frac{7}{3}$ et $c = \frac{11}{6}$, unde nanciscimur hos valores: $a = 15$; $b = 14$; $c = 11$; $d = 6$, qui est iterum casus jam ante inventus.

Exemplum 3.

§. 39. Sit $a = 4$, et prodibit $b = \frac{85 - 18v + vv}{3}$ et $c = \frac{40 - 12v + vv}{3}$. Limites, intra quos v sumi debet, hoc casu sunt $9 - \sqrt{8}$ et $6 + \sqrt{8}$, sive in decimalibus $6,17$

et 8,83; cadere autem v debet extra limites 6,382 et 8,618. Unde intelligitur valorem ipsius v vel intra hos limites: 6,17 et 6,38, vel extra hos: 8,62 et 8,83 cadere debere. Sumamus pro prioribus $v = 6\frac{1}{4} = \frac{25}{4}$, ut sit $b = \frac{185}{48}$ et $c = \frac{65}{48}$, unde quatuor numeri erunt $a = 192$; $b = 185$; $c = 65$; $d = 48$, qui casus iterum convenit cum ultimo exempli tertii superioris solutionis.

---

§. 40. Propter egregium consensum inter exempla, quae ex utraque solutione sunt deducta, summo jure suspicamur, ambas solutiones prorsus inter se convenire; unde operae pretium erit istam convenientiam accuratius perscrutari. Cum igitur prima solutio dedisset

$$b = \frac{(a+1)^2 + 2(a+1)v + vv}{4(a-1)} \text{ et } c = \frac{(a+1)^2 - 2(a-1)v + vv}{4(a-1)}$$

in posteriore loco v scribamus u, ut relationem inter v et u exploremus, eritque ex secunda solutione

$$b = \frac{(4a+1)(a+1) - 2(2a+1)u + uu}{a-1} \text{ et } c = \frac{(a+4)(a+1) - 2(a+2)u + uu}{a-1}.$$

Jam bini valores ipsius b inter se aequati dant hanc aequationem:

$$(a+1)^2 + 2(a-1)v + vv = 4(4a+1)(a+1) - 8(2a+1)u + 4uu$$

bini vero valores ipsius c istam:

$$(a+1)^2 - 2(a-1)v + vv = 4(a+4)(a+1) - 8(a+2)u + 4uu.$$

Harum vero altera ab altera subtracta praebet

$$12(aa-1)-8u(a-1)-4v(a+1)=0,$$

ex qua aequatione sequitur $v=3(a+1)-2u$.

§. 41. Substituamus in prioribus valoribus pro b et c inventis istum valorem loco v, et calculo peracto reperimus $b=\frac{(4a+1)(a+1)-2(2a+1)u+uu}{a-1}$,

$c=\frac{(a+4)(a+1)-2(a+2)u+uu}{a-1}$,

quae cum perfecte congruant cum formulis superioribus, certum est posteriorem solutionem a priore prorsus non discrepare, etiamsi per operationes prorsus diversas sit eruta. Nihilo vero minus utraque analysis summa attentione digna est censenda; idque eo magis, quod per praecepta solita in arte Diophantea vix ullam solutionem elicere liceat, qua simul conditionibus praescriptis, scilicet ut fiat tam $b+c>a+d$ quam $b<a$ et $c<a$, satisfieri posset.