1813

De lineis curvis non in eodem plano sitis, quae maximi minimive proprietate sunt praeditae

Leonhard Euler

E740

DE LINEIS CURVIS NON IN EODEM PLANO SITIS, QUAE MAXIMI VEL MINIMI PROPRIETATE SUNT PRAEDITAE.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhib. die 8 Martii 1779.

1. Quae hactenus de lineis curvis Maximi Minimive proprietate quapiam gaudentibus sunt tradita tantum ad ejusmodi lineas curvas spectant, quae in eodem plano describi possunt, cujus ratio in eo est posita, quod formula integralis Maximum Minimumve involvens duas tantum complectitur quantitates variabiles, quas inter eam relationem investigari oportet, qua valor istius formulae maximus vel minimus evadat, quae si ad lineas curvas transferantur, eae ita comparatae esse debent, ut earum natura per aequationem inter duas coordinatas exprimatur; unde evidens est, hanc conditionem non nisi in lineas super eodem plano descriptas competere posse.

2. Sin autem formula integralis tres variabiles, veluti x, y et z involvat, quoniam ea determinatum valorem recipere nequit, nisi binae per tertiam determinentur,

ita ut tam y quam z tanquam functiones ipsius x sint spectandae, ad Maximum Minimumve definiendum necesse est ut tam inter x et y, quam inter x et z, conveniens relatio exploretur; unde si illae tres variabiles x, y et z tanquam coordinatae spectentur, curva inde oritur non in eodem plano sita, cujus determinatio utique binas aequationes postulat, quarum altera relationem inter x et y altera vero inter x et z exprimat.

3. Quae quo clarius ob oculos ponantur, concipiamus ternos axos inter se normales OA, OB et OC, quorum bini priores in planum tabulae incidant, tertius vero OC ei normaliter insistat. Quodsi jam z fuerit punctum quodcunque curvae quaesitae, ejus locum per ternas coordinatas illis axibus parallelas assignare solemus, quae sint $OX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$. Quare ad hunc locum cognoscendum pro qualibet abscissa $OX = x$, necesse est ut tam applicata $XY = y$ quam altera $YZ = z$ exhiberi queant, ad quod ergo duplici relatione opus est, sive duae aequationes ad hoc requiruntur, ex quibus tam y quam z per tertiam x definiri queat; ubi per se perspicuum est, aequatione inter x et y naturam projectionis curvae quaesitae in plano AOB factam exprimi, altera vero aequatione, inter x et z, ducta recta XV, parallela et aequali ipsi YZ, projectionem ejusdem curvae in plano Tab. I. Fig. 1.

A O C factam exhiberi. Simili modo, si inde aequatio inter y et z eliciatur, ea natura projectionis in planum BOC facta determinabitur. Sufficit autem ad curvam determinandam duas tantum projectiones priores nosse, quandoquidem his tertia projectio jam determinatur.

4. Quodsi jam ejusmodi curva desideretur, in qua formula integralis $\int V \partial x$ maximum minimumve obtineat valorem, ubi V sit functio quaecunque non solum ipsarum trium variabilium x, y et z, sed etiam earum differentialia cujuscunque ordinis involvat, ac fortasse etiam novas formulas integrales complectatur: ad hoc expediendum duae aequationes sunt necessariae, ex quibus tam valorem ipsius y, quam ipsius z, per x definire liceat; quod si praestari poterit, simul ambae projectiones curvae quaesitae modo memoratae innotescent.

5. Quo igitur in hoc negotio simili modo versemur, quo olim sum usus circa formulas duas tantum variabiles complectentes, statuamus primo pro variabili y, ejusque differentialibus, $\partial y = p \partial x$, $\partial p = q \partial x$, $\partial q = r \partial x$ etc. Similique modo pro differentialibus ipsius z ponamus $\partial z = p' \partial x$, $\partial p' = q' \partial x$; $\partial q' = r' \partial x$ etc., at vero a formulis integralibus, quae forte insuper in quantitate V inesse possent, mentem abstrahamus, ita ut jam quantitas V spectari possit, tanquam functio omnium harum quantitatum: x, y, z,

p, p', q, q', r, r' etc. unde, differentiatione more solito instituta, habebitur talis forma:

$$\partial V = M\partial x + N\partial y + P\partial p + Q\partial q + R\partial r \text{ etc.}$$
$$N'\partial z + P'\partial p' + Q'\partial q' + R'\partial r' \text{ etc.}$$

6. Hac forma in genere constituta totum negotium huc redit, ut inde binae aequationes eliciantur, ex literis M, N, N′, P, P′, Q, Q′ etc. formandae, ex quibus deinceps natura curvae quaesitae per binas projectiones memoratas definiri queat. Hic autem ante omnia meminisse oportet, casibus, quibus tertia variabilis z prorsus deest, quos olim uberrime sum prosecutus, naturam curvarum satisfacientium semper hac aequatione exprimi:

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \partial Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} \text{ etc.} = 0.$$

Unde manifestum est, si variabilis y abesset, et formula integralis $\int V \partial x$ tantum variabiles x et z involveret, aequationem pro curva quaesita futuram esse:

$$N - \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial \partial Q'}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R'}{\partial x^3} = 0.$$

7. Quoniam autem praesenti casu duplex relatio est investiganda, quarum altera inter x et y, altera vero inter x et z subsistat, tota quaestio ad casum praecedentem revocari poterit. Primo enim alteram curvae quaesitae projectionem inter x et z tanquam datam spectare licebit, quasi jam revera ejus natura esset cognita, ita ut tantum altera relatio inter x et y sit investiganda, id quod jam

per methodum ordinariam facile expediri poterit. Cum enim nunc z tanquam certa functio ipsius x spectari possit, etiam quantitates inde derivatae tanquam tales functiones spectari poterunt, unde in valore differentiali pro ∂V assumto omnes hi termini:

$$N'\partial z + P'\partial p' + Q'\partial q' + R'\partial r' \text{ etc.}$$

jam in membro $M dx$ contineri erunt censendi; quare cum littera M in aequationem finalem non ingrediatur, aequatio inter x et y hac exprimetur aequatione:

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \partial Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^2} = 0.$$

8. Quodsi jam simili modo valorem ipsius y, quasi jam esset cognitus, contemplemur, ita ut tam y quam p, q, r tanquam functiones cognitae ipsius x spectari queant, hi termini: $N\partial y + P\partial p + Q\partial q + R\partial r$, ad formam $M\partial x$ accedere erunt censendi, sicque aequatio inter z et x per hanc aequationem definietur:

$$N' - \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial \partial Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} = 0.$$

9. Ex his conjunctis manifesto sequitur, si neutra harum aequationum tanquam cognita spectari queat, sed utraque definiri debeat, quaesito satisfieri his binis aequationibus conjungendis:

$$\text{I. } N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \partial Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} = 0,$$

$$\text{II. } N' - \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial \partial Q'}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R'}{\partial x^3} = 0,$$

haecque solutio adeo patet, ad quotcunque gradus differentialia, in formula V contenta, ascendant.

10. Cum autem solutiones talium problematum altiora differentialia implicantium, plerumque nimis evadant difficiles atque adeo plerumque plane intractabiles, hic tantum casus simpliciores, quibus differentialia in formula V non ultra primum gradum ascendant, attentius sumus contemplaturi, quae ergo ex his duabus aequationibus erunt petendae:

$$\text{I. } N\partial x = \partial P \quad \text{et} \quad \text{II. } N'\partial x = \partial P'.$$

11. Quamquam autem hae duae aequationes totum negotium conficere sunt censendae; tamen plerumque plurimum expediet iis adhuc tertiam quandam aequationem, quae quidem in iis jam contineatur, adjungere, quippe quae calculo sublevando plurimum inserviet. Quoniam enim posuimus $\partial y = p\partial x$ et $\partial z = p'\partial x$, ex illis duabus aequationibus elicimus:

$$1^\circ.\ N\partial y = p\partial P \quad \text{et} \quad 2^\circ.\ N'\partial z = p'\partial P',$$

qui valores, in formula differentiali generali:

$$\partial V = M\partial x + N\partial y + N'\partial z + P\partial p + P'\partial p',$$

substituti, producent hanc formam:

$$\partial V = M\partial x + p\partial P + P\partial p + p'\partial P' + P'\partial p', \text{ sive}$$

$$\partial V = M\partial x + \partial(pP + p'P').$$

Hinc ergo, si brevitatis gratia ponamus $V - Pp - P'p' = S$, orietur ista aequatio: $M\partial x = \partial S$, quae ergo cum binis praecedentibus $N\partial x = \partial P$ et $N'\partial x = \partial P'$ commode conjungi poterit. Interim tamen probe est observandum, quamlibet harum trium aequationum jam in binis reliquis esse contentam, ideoque omitti posse, nisi insignem usum in calculo evolvendo saepissime praestaret. His notatis istud argumentum prorsus novum aliquot exemplis illustremus.

Problema I.

Investigare lineam curvam ternis coordinatis x, y *et* z *contentam, in qua haec formula integralis:* $\int\frac{x\partial y\partial z}{\partial x}$ *maximum minimumve obtineat valorem.*

Solutio.

12. Cum igitur sit $\partial y = p\partial x$ et $\partial z = p'\partial x$, cujus loco commoditatis gratia scribamus $\partial z = q\partial x$, quandoquidem haec littera q in primo significatu hic non amplius occurrit, formula nostra integralis erit $\int pqx\partial x$, ita ut sit $V = pqx$, hincque differentiando $\partial V = pq\partial x + px\partial p + px\partial q$, unde facta collatione habebimus $M = pq$; $N = 0$; $N' = 0$; $P = qx$; et $P' = px$, hincque fiet $S = -pqx$, quamobrem tres nostrae aequationes erunt:

1°. $pq\partial x = -\partial.pqx$; 2°. $0 = \partial.qx$ et 3°. $0 = \partial.px$.

13. Ex binis posterioribus aequationibus fit $qx = a$ et $px = b$, unde tota quaestio jam sponte resolvitur. Cum

enim inde sit $\frac{q}{p} = \frac{a}{b} = n$, erit $q = np$, et jam reliqua omnia per variabilem p facile definiri poterunt, existente $n = \frac{a}{b}$. Cum enim sit $x = \frac{b}{p}$, erit $\partial x = -\frac{b \partial p}{pp}$, hincque $p \partial x = \partial y = -\frac{b \partial p}{p}$ et $q \partial x = \partial z = -\frac{n b \partial p}{p}$, unde fit integrando $y = f - blp$ et $z = g - nblp$. Quocirca cum sit $p = \frac{b}{x}$, nunc variabilis y sequenti modo exprimetur: $y = f - blb + blx$, sive mutatis constantibus: $y = f + blx$; tum vero $z = g + nblx$.

14. Hinc igitur patet utramque curvae quaesitae projectionem esse curvam logarithmicam; ubi observasse juvabit, in his determinationibus inesse quatuor constantes arbitrarias f, g, n et b, quemadmodum solutio completa postulat, siquidem utraque aequatio principalis manifesto differentialia secunda complectitur, ideoque necesse est, ut utrumque integrale completum duas constantes arbitrarias contineat.

15. Cum deinde relatio inter y et z ita exprimatur: $z = ny + c$, projectio curvae inventae super plano BOC erit linea recta; unde patet totam curvam nostram in idem planum incidere, neque adeo proprie ad praesentem casum referri posse. Interim tamen etiam hinc nostra methodus haud mediocriter illustratur, cum declaret, quando curva inventa in eodem plano describi possit.

Problema II.

Invenire lineam curvam ternis coordinatis x, y *et* z *contentam, in qua haec formula integralis:* $\int \frac{(y+z)\partial y \partial z}{\partial x}$ *maximum minimumve obtineat valorem.*

Solutio.

16. Posito hic $\partial y = p\partial x$ et $\partial z = p'\partial x = q\partial x$, erit $V = pq\,(y+z)$, hincque differentiando:

$$\partial V = pq\partial y + pq\partial z + (y+z)\,q\partial p + (y+z)\,p\partial q.$$

Unde, facta comparatione cum formula generali:

$$\partial V = M\partial x + N\partial y + N'\partial z + P\partial p + P'\partial p',$$

habebimus $M = 0$; $N = pq$; $N' = pq$; $P = (y+z)\,q$ et $P' = (y+z)\,p$; hinc ergo fiet $S = V - Pp - P'q = -pq(y+z)$. Ex his jam tres nostrae aequationes erunt:

1°. $0 = -\partial . pq . (y+z)$;

2°. $pq\partial x = \partial . (y+z)\,q$;

3°. $pq\partial x = \partial . (y+z)\,p$.

Prima statim praebet $pq\,(y+z) = a$, ita ut sit $y+z = \frac{a}{pq}$, qui valor, in reliquis substitutus, dat:

1°. $pq\partial x = \partial . \frac{a}{p} = -\frac{a\partial p}{pp}$; 2°. $pq\partial x = \partial . \frac{a}{q} = -\frac{a\partial q}{qq}$.

Hinc sequitur fore $\frac{\partial p}{pp} = \frac{\partial q}{qq}$; consequenter $-\frac{1}{p} = -\frac{1}{q} + b$, sive $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + b$, unde elicimus $q = \frac{cp}{c+p}$. Sicque prima aequatio fit $y+z = \frac{a(c+p)}{cpp}$; reliquae vero dant $pq\partial x = -\frac{a\partial p}{pp}$, ideoque $\partial x = -\frac{a(c+p)\partial p}{cp^4}$, cujus integrale praebet $x = \frac{a}{3p^3} + \frac{a}{2cpp} + f$.

17. Deinde ob $\partial y = p\partial x$ erit nunc $\partial y = -\frac{a(c+p)\partial p}{cp^3}$, cujus integrale praebet $y = \frac{a}{2pp} + \frac{a}{cp} + g$. Pro tertia coordinata z quoniam jam vidimus esse $y + z = \frac{a(c+p)}{cpp}$, erit nunc $z = \frac{a - 2gpp}{2pp} = \frac{a}{2pp} - g$. Hic igitur iterum introductae sunt quatuor constantes arbitrariae; unde intelligitur hanc solutionem esse completam.

18. Hic quidem omnes tres coordinatas x, y et z per eandem variabilem p expressas dedimus, id quod pro constructione curvae eundem praestat usum, quoniam pro singulis valoribus loco p assumtis totidem curvae puncta designantur; unde haud difficultur intelligitur totam hanc curvam non in eodem plano esse sitam, propterea quod ex his tribus formulis, elidendo p, nulla talis aequatio: $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ formari potest. Litteram autem p sequenti modo eliminare licebit. Cum sit $y - z = \frac{a}{cp} + 2g$, erit $p = \frac{a}{c(y - z - 2g)}$, qui valor in prima aequatione substitutus producet aequationem inter x, y et z, cui adjungi poterit ea, quae oritur ex tertia $z + g = \frac{a}{2pp}$, unde fit:

$$2a(z + g) = cc(y - z - 2g)^2.$$

Verum hae formulae nihil plane conferunt ad curvam describendam. Caeterum evidens est hanc curvam esse algebraicam, secus atque ea quae problemate praecedente erat inventa.

Problema III.

Invenire lineam curvam ternis coordinatis x, y et z contentam, in qua haec formula integralis: $\int X\sqrt{\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2}$ *maximum minimumve adipiscatur valorem, existente X functione quacunque ipsius x.*

Solutio.

19. Hic ergo, ob $\partial y = p\,\partial x$ et $\partial z = q\,\partial x$, erit $V = X\sqrt{1+pp+qq}$, ubi brevitatis gratia ponamus $\sqrt{1+pp+qq}=s$, ita ut sit $V=Xs$. Quia igitur ipsae litterae y et z non insunt, erit tam $N=0$ quam $N'=0$; deinde ob $\partial s = \frac{p\partial p+q\partial q}{s}$, erit $P=\frac{Xp}{s}$ et $P'=\frac{Xq}{s}$, unde binae aequationes solutionem continentes erunt $\partial P=0$ et $\partial P'=0$, sicque habebimus $\frac{Xp}{s}=a$ et $\frac{Xq}{s}=b=na$.

20. Hinc igitur statim patet fore $\frac{q}{p}=n$, sive $q=np$, hincque porro $\partial z=n\partial y$, et integrando $z=ny+c$, ita ut projectio in planum BOC facta sit linea recta, ideoque tota curva quaesita in certo plano existat. Deinde vero cum sit $s=\sqrt{1+(nn+1)pp}$, erit $Xp=a\sqrt{1+(nn+1)pp}$; unde, posito brevitatis gratia $nn+1=m$, colligimus $p=\frac{a}{\sqrt{(X^2-aamm)}}$. Sicque pro utraque projectione quaesita habebimus has aequationes differentiales:

$$\partial y = \frac{a\partial x}{\sqrt{(X^2-mmaa)}} \text{ et } \partial z = \frac{na\partial x}{\sqrt{(X^2-mmaa)}}.$$

21. Hic observasse juvabit, cum $\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}$ exprimat elementum curvae, casu $X = x$ curvam inventam fore *Catenariam*, si quidem ejus centrum gravitatis infimum occupat locum inter omnes alias curvas isoperimetricas; at vero si fuerit $X = \frac{1}{\sqrt{x}}$, ita ut $\partial y = \frac{a \partial x \sqrt{x}}{\sqrt{1 - mmaax}}$ et $\partial z = \frac{na\partial x \sqrt{x}}{\sqrt{(1 - mmaax)}}$, manifestum est curvam inventam esse *Brachystochronam*.

Problema IV.

Invenire lineam curvam per ternas coordinatas x, y *et* z *determinandam, in qua haec formula integralis:*

$$\int \sqrt{(xx + yy + zz)(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)}$$

maximum minimumve adipiscatur valorem.

Solutio.

22. Ponamus brevitatis gratia $\sqrt{xx + yy + zz} = v$ et $\sqrt{1 + pp + qq} = s$, ita ut nostra formula integralis evadat $\int V \partial x$, existente $V = vs$, ideoque $\partial V = s\partial v + v\partial s$; at vero erit $\partial v = \frac{x\partial x + y\partial y + z\partial z}{v}$ et $\partial s = \frac{p\partial p + q\partial q}{s}$, unde sequitur fore $M = \frac{sx}{v}$; $N = \frac{sy}{v}$; $N' = \frac{sz}{v}$; $P = \frac{vp}{s}$; $P' = \frac{vq}{s}$.

23. Hinc igitur, cum fiat:

$$S = V - Pp - P'q = \frac{v(ss - pp - qq)}{s} = \frac{v}{s},$$

ternae aequationes nostrae erunt:

$$\text{I. } \frac{sx\partial x}{v} = \partial \cdot \frac{v}{s}, \quad \text{II. } \frac{sy\partial x}{v} = \partial \cdot \frac{vp}{s} \quad \text{et III. } \frac{sz\partial x}{v} = \partial \cdot \frac{vq}{s}.$$

Ex quibus solutionem nostri problematis elici oportet, id quod plurimam solertiam atque insignia calculi artificia postulat.

24. Cum sit $\partial.\frac{pv}{s}=\frac{v\partial p}{s}+p.\partial.\frac{v}{s}$ et $\partial.\frac{qv}{s}=\frac{v\partial q}{s}+q.\partial.\frac{v}{s}$, ob $\partial.\frac{v}{s}=\frac{sx\partial x}{-v}$, facta hac substitutione solutio perducetur ad has duas aequationes:

$$\text{I.}\quad (y\partial x - x\partial y) = \frac{v^2\partial p}{ss},$$

$$\text{II.}\quad (z\partial x - x\partial z) = \frac{vv\partial q}{ss};$$

quamobrem videamus, quibusnam artificiis hinc formulas integrabiles elicere queamus, quandoquidem hae aequationes manifesto sunt differentiales secundi gradus, ob $p=\frac{\partial y}{\partial x}$ et $q=\frac{\partial z}{\partial x}$.

25. Harum aequationum altera per alteram divisa praebet $\frac{y\partial x - x\partial y}{z\partial x - x\partial z}=\frac{\partial p}{\partial q}$, unde nascitur haec aequatio: $\frac{\partial p}{y\partial x - x\partial y}=\frac{\partial q}{z\partial x - x\partial z}$, sive $\frac{\partial p}{y - px}=\frac{\partial q}{z - qx}$. Quodsi jam haec aequatio ita referatur: $-\frac{x\partial p}{y-px}=-\frac{x\partial q}{z-qx}$, facile patet in utraque fractione numeratorem esse ipsum differentiale denominatoris, ideoque fore:

$$l\,\overline{y - px} = l\,\overline{z - qx} - l\,n,$$

unde habebimus $z - qx = n(y - px)$, ita ut hinc jam determinetur z per reliquas litteras.

26. Substituatur nunc iste valor loco $z - qx$ in nostra aequatione differentiali, prodibitque $\partial y = n\partial p$, con-

sequenter $q=np+a$, hincque porro integrando fit $z=ny+ax+b$, quae aequatio cum unicam habeat dimensionem, indicat totam curvam, quam quaerimus, in certo quodam plano existere.

27. Hic autem probe notandum est in postrema aequatione inventa constantem additam b per praecedentia jam determinari. Cum enim invenerimus $z-qx=ny-npx$, ob $q=np+a$ erit $z=ny+ax$. Nunc igitur habemus $v=\sqrt{(xx+yy+(ny+ax)^2)}$ et $s=\sqrt{(1+pp+(np+a)^2)}$, ita ut jam quaestio perducta sit ad binas tantum variabiles x et y, propter $p=\frac{\partial y}{\partial x}$, quarum relatio petenda est ex altera aequationum principalium: $y\partial x-x\partial y=\frac{vv\partial p}{ss}$, quae, substitutis pro v et s valoribus, transformatur in hanc:

$$\frac{y\partial x-x\partial y}{xx+yy+(ny+ax)^2}=\frac{\partial p}{1+pp+(np+a)^2},$$

cujus prius membrum, posito $y=ux$, induit hanc formam:

$$\frac{-\partial u}{1+uu+(nu+a)^2}=\frac{\partial p}{1+pp+(np+a)^2},$$

ita ut adepti simus aequationem differentialem separatam, cujus adeo bina membra perfecte sunt similia, ita ut alterutrum tantum integrasse sufficiat.

28. Incipiamus igitur a membro posteriori, quod evolutum fit $\frac{\partial p}{1+aa+2anp(nn+1)pp}$ et quod ita referamus: $\frac{1}{1+nn}\cdot\frac{\partial p}{pp+2\alpha p+\mathfrak{G}}$, ut sit $\alpha=\frac{an}{1+nn}$ et $\mathfrak{G}=\frac{1+aa}{1+nn}$, pro quo ponamus $p+\alpha=t$, sive $p=t-\alpha$, hincque istud membrum

evadet $\frac{1}{1+nn} \cdot \frac{\partial t}{tt-\alpha\alpha+\beta}$, cujus integrale erit:
$\frac{1}{(1+nn)\sqrt{\beta-\alpha\alpha}}$. Arc. tg. $\frac{t}{\sqrt{\beta-\alpha\alpha}}$, sive $\frac{1}{(1+nn)\sqrt{(\beta-\alpha\alpha)}}$ Arc. tg. $\frac{p+\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha\alpha}}$. Eodemque modo, loco p scribendo u, prioris membri integrale est $\frac{-1}{(1+nn)\sqrt{\beta-\alpha\alpha}}$ Arc. tg. $\frac{u+\alpha}{\sqrt{(\beta-\alpha\alpha)}}$.

29. Hinc igitur integrale postremae nostrae aequationis, ob coëfficientes communes, erit:

$$C - \text{Arc. tg.} \frac{u+\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha\alpha}} = \text{Arc. tg.} \frac{p+\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha\alpha}},$$

sive summa horum duorum arcuum aequatur quantitati constanti, consequenter etiam tangens summae horum duorum arcuum debet esse constans, quae est: $\frac{(p+u+2\alpha)\sqrt{\beta-\alpha\alpha}}{\beta-2\alpha\alpha-\alpha(p+u)-pu} = C$, unde aequatio ita poterit repraesentari:

$$pu + \alpha(p+u) + 2\alpha\alpha - \beta = C(p+u+2\alpha), \quad \text{sive}$$

$$pu - \beta = f(p+u+2\alpha).$$

Quod si hic loco α et β valores assumtos restituamus, qui erant $\alpha = \frac{an}{1+nn}$ et $\beta = \frac{1+aa}{1+nn}$, aequatio nostra erit:

$$(1+nn)pu - aa - 1 = f((1+nn)(p+u) + 2an).$$

Ubi notandum est esse $u = \frac{y}{x}$ et $p = \frac{\partial y}{\partial x}$, ita ut haec aequatio adhuc sit differentialis. Ad eam integrandam, cum posuerimus $y = ux$ et $\partial y = p\partial x$, erit $p\partial x = u\partial x + x\partial u$, unde colligitur $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p-u}$. Nunc vero ex postrema aequatione inventa valorem ipsius p per u definire licet, quo invento aequatio differentialis $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p-u}$ est separata, cujus ergo integratio nulla laborat difficultate. Inde igitur

x exprimetur per certam functionem ipsius $u = \frac{y}{x}$, quae ergo erit aequatio inter x et y; at vero pro coordinata z jam vidimus esse $z = ny + ax$, sicque solutio hactenus tradita est perfecta.

30. Commode autem hic evenit, ut hoc algebraice expediri queat. Cum enim sit $p = \frac{6 + f(u + 2\alpha)}{u - f}$, facta substitutione reperitur $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u (u - f)}{6 + 2\alpha f + 2fu - uu}$, cujus integrale manifesto est: $lx = C - \frac{1}{2} l (6 + 2\alpha f + 2fu - uu)$, unde sumtis numeris erit $x \sqrt{6 + 2\alpha f + 2fu - uu} = g$. Denique si hic loco u scribamus $\frac{y}{x}$, prodit ista aequatio:

$$6xx + 2\alpha fxx - 2fxy - yy = gg;$$

unde adeo patet hanc projectionem esse sectionem conicam. Ac si hic loco y scribamus $\frac{z - ax}{n}$, obtinetur aequatio inter x et z, pro altera projectione, quae ergo etiam erit pro sectione conica. Hinc intelligitur hoc problema, quod difficillimum videbatur, ad solutionem simplicissimam esse perductum.

Problema V.

Posito $\sqrt{(xx + yy + zz)} = v$, *si fuerit* w *functio quaecunque ipsius* v, *invenire curvam per ternas coordinatas* x, y *et* z *definiendam, in qua haec formula integralis:* $\int w \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}$ *maximum minimumve valorem obtineat.*

Solutio.

31. Facto igitur $\partial y = p\,\partial x$ et $\partial z = q\,\partial x$, positoque $\sqrt{(1 + pp + qq)} = s$, erit formula nostra Maximi $\int ws\,\partial x$, ideoque $V = ws$; tum vero, posito $\partial w = w'\partial v$, ob $\partial v = \frac{x\partial x + y\partial y + z\partial z}{v}$ et $\partial s = \frac{p\partial p + q\partial q}{s}$, erit $\partial V = sw'\frac{(x\partial x + y\partial y + z\partial z)}{v} + \frac{w(p\partial p + q\partial q)}{s}$. Hinc ergo habebimus: $M = \frac{w'sx}{v}$; $N = \frac{w'sy}{v}$; $N' = \frac{w'sz}{v}$; $P = \frac{wp}{s}$; $P' = \frac{wq}{s}$. Ex his porro colligitur:

$$S = \frac{w(ss - pp - qq)}{s} = \frac{w}{s}.$$

32. Ternae ergo aequationes, ex quibus solutionem peti oportet, erunt:

$$\text{I.}\quad \frac{w'sx\partial x}{s} = \partial\,.\,\frac{w}{s},$$
$$\text{II.}\quad \frac{w'sy\partial x}{v} = \partial\,.\,\frac{wp}{s},$$
$$\text{III.}\quad \frac{w'sz\partial x}{v} = \partial\,.\,\frac{wq}{s}.$$

Hinc igitur cum sit: $\partial\,.\,\frac{wp}{s} = \frac{w\partial p}{s} + p\,.\,\partial\,.\,\frac{w}{s}$ et

$$\partial\,.\,\frac{wq}{s} = \frac{w\partial q}{s} + q\,.\,\partial\,.\,\frac{w}{s},$$

si hic loco $\partial\,.\,\frac{w}{s}$ scribatur ejus valor ex I. aequatione $\frac{w'sx\partial x}{v}$, nanciscemur binas sequentes aequationes:

$$\text{I.}\quad \frac{w's}{v}\,(y\partial x - x\partial y) = \frac{w\partial p}{s},$$
$$\text{II.}\quad \frac{w's}{v}\,(z\partial x - x\partial z) = \frac{w\partial q}{s},$$

quae sub forma sequente repraesententur:

$$\text{I.}\quad \frac{y\partial x - x\partial y}{vv} = \frac{w\partial p}{w'vss} \quad \text{et}$$
$$\text{II.}\quad \frac{z\partial x - x\partial z}{vv} = \frac{w\partial q}{w'vss},$$

haeque sunt binae aequationes, ex quibus solutionem desideratam derivare debemus.

33. Primo igitur harum aequationum alteram per alteram dividamus, et habebimus $\frac{z\partial x - x\partial z}{y\partial x - x\partial y} = \frac{\partial y}{\partial p}$, unde, ob $\partial y = p\partial x$ et $\partial z = q\partial x$, deducimus hanc aequationem: $\frac{\partial q}{z - qx} = \frac{\partial p}{y - px}$, ita ut sit $\frac{-x\partial q}{z - qx} = \frac{-x\partial p}{y - px}$; ubi, cum numeratores sint differentialia denominatorum, integratio statim praebet $z - qx = m(y - px)$. Hoc valore substituto aequatio illa differentialis praebet $\partial q = m\partial p$, hincque integrando erit $q = mp + n$, qui valor in illa integrata substitutus praebet $z = my + nx$, quae, cum coordinatae unicam tantum obtineant dimensionem, indicat totam curvam satisfacientem in eodem plano esse sitam. Hinc igitur jam ex nostris aequationibus principalibus binas quantitates z et q elidere poterimus, unde fiet:

$$vv = xx + yy + (my + nx)^2 \quad \text{et}$$
$$ss = 1 + pp + (mp + n)^2,$$

sicque unica tantum restabit aequatio resolvenda, scilicet: $\frac{y\partial x - x\partial y}{vv} = \frac{w\partial p}{w'vss}$, in qua ante omnia statuamus $y = ux$, ut ea transfundatur in hanc formam:

$$\frac{-\partial u}{1 + uu + (mu + n)^2} = \frac{w\,\partial p}{w'v\,[1 + pp + (mp + n)^2]},$$

quae, posito brevitatis gratia $\frac{w}{w'v} = r$, ita repraesentetur:

$$\frac{\partial u}{1 + uu + (mu + n)^2} + \frac{r\,\partial p}{1 + pp + (mp + n)^2} = 0,$$

in qua ergo binae formulae differentiales inter se prorsus similes continentur.

34. Evidens autem est integrationem utriusque partis, omissa scilicet littera r, ad certum arcum circularem reduci. Hanc ob rem hos ipsos angulos in calculum introducamus, ponendo: $\frac{\gamma \partial u}{1 + uu + (mu + n)^2} = \partial \phi$ et
$\frac{\gamma \partial p}{1 + pp + (mp + n)^2} = \partial \psi$.
Sicque aequatio nostra ad hanc formam simplicissimam reducetur: $\partial \phi + r \partial \psi = 0$. Totum igitur negotium huc redit, quemadmodum hanc aequationem tractari atque ad integrabilitatem reduci oporteat. Evidens autem est hanc aequationem differentialia secundi gradus involvere.

35. Facile quidem patet angulum ϕ ita esse comparatum, ut ejus tangens tali forma: $\alpha u + \beta$ exprimatur; quare si statuamus tg. $\phi = \alpha u + \beta$, erit $\partial \phi = \frac{\alpha \partial u}{1 + (\alpha u + \beta)^2}$. Haec jam forma cum proposita comparetur, ut inde valores litterarum α et β, una cum γ, per litteras m et n determinentur, id quod fiet hanc aequationem:

$$\alpha (1 + uu + (mu + n)^2) = \gamma (1 + (\alpha u + \beta)^2),$$

identicam reddendo. Hunc in finem cum facta evolutione sequens oriatur aequatio:

$$\alpha (mm + 1) uu + 2 \alpha mnu + \alpha (nn + 1) = \alpha \alpha \gamma uu + 2 \gamma \alpha \beta u + \gamma (\beta \beta + 1),$$

inde tres sequentes elicimus determinationes:

1°. $\alpha \gamma = mm + 1$; 2°. $\beta \gamma = mn$; 3°. $\gamma (\beta \beta + 1) = \alpha (nn + 1)$; ex quarum prima colligitur $\alpha = \frac{mm + 1}{\gamma}$; ex secunda $\beta = \frac{mn}{\gamma}$, qui valores in tertia substituti dant $\gamma \gamma = mm + nn + 1$, ideoque $\gamma = \sqrt{mm + nn + 1}$, hincque $\alpha = \frac{mm + 1}{\sqrt{(mm + nn + 1)}}$ et $\beta = \frac{mn}{\sqrt{(mm + nu + 1)}}$.

36. Postquam igitur litteras α, β, γ per m et n determinaverimus, erit tg. $\Phi = \alpha u + \beta$. Deinde cum supra invenerimus:

$$1 + uu + (mu + n)^2 = \frac{\gamma}{\alpha}(1 + (\alpha u + \beta)^2),$$

si loco u valorem $\frac{y}{x}$ restituamus, prodibit:

$$xx + yy + (my + nx)^2 = \frac{\gamma}{\alpha}(xx + (\alpha y + \beta x)^2),$$

ubi prius membrum est ipse valor ipsius vv, unde ergo sequitur fore: $xx + (\alpha y + \beta x)^2 = \frac{\alpha}{\gamma} vv = \frac{(mm + 1) vv}{mm + nn + 1}$. Praeterea vero habebimus tg. $\Phi = \frac{\alpha y + \beta x}{x}$; unde si loco $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{mm + 1}{mm + nn + 1}$ scribamus $\delta\delta$, ut sit $xx + (\alpha y + \beta x)^2 = \delta\delta vv$, erit sin. $\Phi = \frac{\alpha y + \beta x}{\delta v}$ et cos. $\Phi = \frac{x}{\delta v}$, hincque porro:

$$\alpha y + \beta x = \delta v \sin. \Phi \quad \text{et} \quad x = \delta v \cos. \Phi,$$

existente $\delta = \sqrt{\frac{mm + 1}{mm + nn + 1}}$. Hinc patet, si modo angulus Φ daretur per v, tam x quam y per eandem quantitatem v expressum iri, sicque totum problema perfecte solutum fore.

37. Simili vero modo, cum posuerimus $\partial\psi = \frac{\gamma \partial p}{1 + pp + (mp + n)^2}$, statui poterit tg. $\psi = \alpha p + \beta$, ubi litterae α, β, γ pristinos retinebunt valores, eritque etiam ut ante:

$$1 + (\alpha p + \beta)^2 = \frac{\alpha}{\gamma}(1 + pp + (mp + n)^2 = \frac{\alpha}{\gamma} ss;$$

tum vero aequatio principalis resolvenda est: $\partial\Phi + r\partial\psi = 0$, existente $r = \frac{w}{w'v}$, ita ut sit $\partial\psi + \frac{w'v\partial\Phi}{w} = 0$.

38. Quoniam autem in formulis praecedentibus adhuc litterae x et y insunt, pro determinanda relatione inter v et ϕ eas ex calculo excludi conveniet, quod commodissime praestabitur ope aequationum $\alpha y + \beta x = \delta v \sin.\phi$ et $x = \delta v \cos.\phi$, quae differentiatae praebent:

$$\alpha\partial y + \beta\partial x = \delta(\partial v \sin.\phi + v\partial\phi \cos.\phi) \text{ et}$$

$$\partial x = \delta(\partial v \cos.\phi - v\partial\phi \sin.\phi),$$

quarum illa per hanc divisa, ob $\partial y = p\partial x$, praebet:

$$\alpha p + \beta = \frac{\partial v \sin.\phi + v\partial\phi \cos.\phi}{\partial v \cos.\phi - v\partial\phi \sin.\phi}.$$

Vidimus autem esse $\alpha p + \beta = \text{tg.}\psi$, ideoque erit nunc:

$$\text{tg.}\psi = \frac{\partial v \sin.\phi + v\partial\phi \cos.\phi}{\partial v \cos.\phi - v\partial\phi \sin.\phi}.$$

39. In hujus aequationis resolutione praecipuum artificium consistit. Si scilicet statuamus $v\partial\phi = t\partial v$, ut oriatur haec aequatio:

$$\text{tg.}\psi = \frac{\sin.\phi + t\cos.\phi}{\cos.\phi - t\sin.\phi} = \frac{\text{tg.}\phi + t}{1 - t\,\text{tg.}\phi},$$

haec postrema formula manifesto exprimit tangentem summae duorum angulorum, quorum alter est ϕ, alterius vero tangens $= t$, sicque horum angulorum summa aequabitur ipsi angulo ψ, ita ut jam sit $\psi = \phi + \text{Arc. tg. } t$, quae aequatio differentiata dat $\partial\psi = \partial\phi + \frac{\partial t}{1 + tt}$, qui valor in nostra aequatione principali substitutus praebet $\frac{w'v\partial\phi}{w} + \partial\phi + \frac{\partial t}{1+tt} = 0$, quo quidem parum lucrati videmur, quandoquidem haec aequatio, ob $t = \frac{v\partial\phi}{\partial v}$, adhuc differentialia secundi gradus involvit, atque adeo tres veriabilis v, ϕ et t implicat, quas quidem ad duas revocare liceret, si loco t valorem assumtum $\frac{v\partial\Phi}{\partial v}$ scribere vellemus, quo autem facto in aequationem maxime perplexam incideremus.

40. At vero quoniam posuimus $\frac{v\partial\Phi}{\partial v}=t$, sumamus potius valorem $\partial\Phi=\frac{t\partial v}{v}$, qui in nostram aequationem introductus praebet $\frac{w't\partial v}{w}+\frac{t\partial v}{v}+\frac{\partial t}{1+tt}=0$, haecque aequatio per t divisa, ob $w'\partial v=\partial w$, induit hanc formam pulcherrimam: $\frac{\partial w}{w}+\frac{\partial v}{v}+\frac{\partial t}{t(1+tt)}=0$, cujus integratio nulla prorsus laborat difficultate. Cum enim sit $\int\frac{\partial t}{t(1+tt)}=l\frac{t}{\sqrt{1+tt}}$, aequatio nostra integralis erit: $\frac{wvt}{\sqrt{1+tt}}=C$, hocque modo jam unam integrationem absolvimus, ita ut unica tantum nobis adhuc peragenda relinquatur.

41. Ex hac jam aequatione eliciamus valorem ipsius t, qui reperitur $=\frac{C}{\sqrt{wwvv-CC}}$, unde cum sit $t=\frac{v\partial\Phi}{\partial v}$, hinc colligimus fore $\partial\Phi=\frac{C\partial v}{v\sqrt{(wwvv-CC)}}$, quae est aequatio finalis totum negotium absolvens. Cum enim w sit functio ipsius v, hinc angulus Φ per quantitatem v expressus reperitur, qui novam constantem recipiet, ita ut jam in calculo habeamus quatuor constantes arbitrarias, scilicet, praeter hanc novam, istas tres C, m et n, siquidem erat, ut vidimus, $\alpha=\frac{mm+1}{\sqrt{(mm+nn+1)}}$; $\beta=\frac{mn}{\sqrt{(mm+nn+1)}}$; $\gamma=\sqrt{mm+nn+1}$; $\delta=\sqrt{\frac{mm+1}{mm+nn+1}}$. Unde patet nostram solutionem penitus esse completam, propterea quod initio deducti fui-

mus ad duas aequationes differentiales secundi gradus, quarum ergo integralia completa necessario quatuor constantes arbitrarias postulant.

42. Postquam autem determinatus fuerit angulus Φ, pro quovis valore litterae v ternae coordinatae x, y et z per sequentes formulas facillime definiuntur:

$$\text{I. } x = \delta v \cos.\Phi,$$

$$\text{II. } \alpha y + \varepsilon x = \delta v \sin.\Phi,$$

$$\text{III. } z = my + nx.$$

Caeterum statim atque invenerimus totam curvam in eodem plano esse sitam, potuissemus solutionem multo faciliorem adornare. Tantum enim planum principale AOB, cujus positio ab arbitrio nostro pendet, in ipso plano curvae satisfacientis accipere licuisset, unde statim habuissemus $z=0$, ideoque etiam $q=0$, quo pacto tota quaestio ad binas tantum variabiles fuisset reducta, et methodo communi resolvi potuisset. Verum praeterquam quod nostra solutio nobis hanc ipsam proprietatem declaravit, maxime operae pretium fuit insignia illa artificia, quae solutio postulat, accurate evolvere.

43. Interim tamen etiam ex ipsa formula integrali, quae Maximum Minimumve esse debet, statim concludere licuisset, curvam satisfacientem in eodem plano sitam esse debere, propterea quod ipsa haec formula integralis ad

duas tantum variabiles se reduci patitur. Cum enim quantitas $v = \sqrt{xx+yy+zz}$ in figura exprimat rectam OZ, cujus ergo littera w denotat functionem quamcunque, tum vero formula $\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}$ referat ipsum elementum curvae, formula integralis proposita duas tantum variabiles, scilicet distantiam $OZ = v$ et arcum curvae involvit, hincque adeo istud problema sequenti modo proponi et resolvi potuisset, ut quaereretur in plano curva EZz, circa centrum C describenda, in qua, posita distantia $CZ = v$, cujus functio quaecunque sit w, haec formula integralis $\int w \partial s$ sit Maximum vel Minimum, denotante ∂s elementum curvae Zz. Tab. I. Fig. 2.

44. Quo jam solutionem facillimam reddamus, atque ex vulgaribus principiis isoperimetricis commodissime repetere valeamus, designemus distantiam CZ littera x, tum vero, constituta recta fixa CD, ponatur angulus $DCZ = y$, fietque elementum curvae $\partial s = \sqrt{\partial x^2 + xx\partial y^2}$; et cum jam w sit functio quaecunque ipsius x, formula integralis, quae Maximum Minimumve esse debeat, erit: $\int w \sqrt{(\partial x^2 + yy\partial y^2)}$, quae posito $\partial y = p\partial x$ induit hanc formam: $\int w\partial x \sqrt{1+ppxx}$, ita ut hic sit $V = w\sqrt{1+ppxx}$. Posito ergo in genere $\partial V = M\partial x + N\partial y + P\partial p$, quia ipsa quantitas y hic non adest, erit $N = 0$ et $P = \frac{wx^2 p}{\sqrt{(1+ppxx)}}$, littera autem

M plane in computum non ingreditur, cum aequatio pro curva quaesita sit $N\partial x = \partial P$, sive $\partial P = 0$, unde statim sequitur $P = \frac{wpxx}{\sqrt{(1+ppxx)}} = C$, quae ipsa aequatio naturam curvae jam declarat.

45. Ex hac autem aequatione elicimus $p = \frac{c}{x\sqrt{(wwxx - cc)}}$, sicque ob $p = \frac{\partial y}{\partial x}$ erit $\partial y = \int \frac{c\,\partial x}{x\sqrt{wwx^2 - cc}}$, quae aequatio perfecte cum ea congruit, quam ante per tantas ambages sumus consecuti, si modo loco x hic restituamus v, tum vero noster angulus, hic y vocatus, idem erit, quem ante designavimus littera Φ. Ex hoc exemplo intelligitur, quomodo saepenumero problemata in se difficillima per levem transformationem solutu facillima reddi queant.