1811

De insigni paradoxo, quod in analysi maximorum et minimorum occurrit

Leonhard Euler

DE INSIGNI PARADOXO,

QUOD IN ANALYSI MAXIMORUM ET MINIMORUM OCCURRIT.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhib. die 31 Maii 1779.

§. 1. In Paradoxon, quod hic sum expositurus, incidi sequens problema resolvens:

Tab. I. Fig. 1. *Sub recta horizontali AB describere curvam EY, cujus singula elementa Yy si in radicem quadratam distantiae YV ab illa recta multiplicentur, summa omnium horum productorum evadat minima.*

Paradoxon autem in hoc consistit, quod pluribus casibus aliae lineae exhiberi possunt, pro quibus ista summa minor reperiatur quam in curva per calculum inventa, etiamsi intra eosdem terminos contineantur. Praeterea vero etiam evenire potest, ut pro certis terminis propositis curva inventa evadat imaginaria, cum tamen pro aliis curvis, intra eosdem terminos describendis, summa illa memorata modo major existere possit, modo minor; ita ut etiam his casibus aliquod minimum locum habere debere videatur.

Haec igitur Paradoxa operae pretium videtur accuratius perpendere.

§. 2. Hunc in finem repraesentet EY curvam huic problemati satisfacientem, ad axem verticalem AC relatam, pro cujus puncto quovis Y ponatur abscissa $AX = x$, ipsi distantiae YV aequalis, applicata vero $XY = y$; unde posito $\partial y = p \partial x$ erit elementum curvae $Yy = \partial x \sqrt{1 + pp}$, sicque formula integralis, cujus valor omnium minimus esse debet, erit $\int \partial x \sqrt{x(1 + pp)}$.

§. 3. Si haec ad motum referamus, atque ponamus corpus curvam EY percurrens in singulis punctis Y celeritatem habere altitudini VY debitam, si haec dicatur $= v$, cum sit v ut $\sqrt{x}$, curva quaeritur, cujus si singula elementa per hanc celeritatem v multiplicentur, summa omnium horum productorum prodeat minima. At vero olim observavi productum ex spatio percurso in celeritatem convenire cum idea minimae actionis ab illustri *Maupertuis* olim stabilita; unde intelligitur, curvam, quam quaerimus, ipsam esse *Projectoriam*, quam corpus, utcunque projectum, libere describit, ideoque fore *Parabolam*.

§. 4. Cum igitur formula integralis, ad minimum reducenda, sit $\int \partial x \sqrt{x(1 + pp)}$, si ea comparetur cum forma generali $\int V \partial x$, pro qua posui $\partial V = M \partial x + N \partial y + P \partial p$, demonstravi curvam quaesitam ista aequatione: $N\partial x = \partial P$ exprimi. Nostro igitur casu, quo $V = \sqrt{x(1+pp)}$, erit $M = \frac{\sqrt{1+pp}}{2\sqrt{x}}$, $N = 0$ et $P = \frac{p\sqrt{x}}{\sqrt{(1+pp)}}$. Cum autem esse debeat $\partial P = 0$, ista quantitas P erit constans; unde haec deducitur aequatio: $\frac{p\sqrt{x}}{\sqrt{(1+pp)}} = \sqrt{a}$, haecque est aequatio naturam curvae quaesitae exprimens.

Tab. I. Fig. 2. §. 5. Quaeratur jam ex hac aequatione valor ipsius $p = \sqrt{\frac{a}{x-a}}$, unde cum sit $p = \frac{y}{\partial x}$ erit $\partial y = \frac{\partial x\sqrt{a}}{\sqrt{(x-a)}}$, cujus integratio praebet $y = 2\sqrt{ax - aa} + b$. Unde sumto $b = 0$, patet, curvam EY fore parabolam, circa axem AC descriptam, cujus vertex incidet in E, existente intervallo $AE = a$, quod simul distantiae foci parabolae a vertice aequatur, cujus ergo quadruplum erit parameter parabolae scil: $4a$. Hinc igitur patet, quaestioni nostrae satisfacere omnes parabolas, quarum axes sint verticales, verticum autem distantia a recta horizontali AB ipsi distantiae foci a vertice aequalis.

§. 6. Omnes igitur istae parabolae EY hanc habent proprietatem: ut si singula ejus elementa Yy in radicem quadratam distantiae YV ducantur, summa omnium horum productorum sit minima; unde operae pretium erit hunc valorem investigare. Quoniam autem supra invenimus $p = \sqrt{\frac{a}{x-a}}$, erit $\sqrt{1+pp} = \sqrt{\frac{x}{x-a}}$, hincque elementum curvae $Yy = \frac{\partial x\sqrt{x}}{\sqrt{x-a}}$, quod ergo multiplicatum per $\sqrt{x}$ praebet $\frac{x\partial x}{\sqrt{x-a}}$, cujus integrale revera debet esse minimum. At vero hoc integrale pro toto arcu EY reperitur $= \frac{2}{3}(2a+x)\sqrt{x-a}$, quae ergo quantitas minor esse deberet, quam si ulla alia curva intra terminos E et Y describeretur, pro eaque valor ejusdem formulae integralis supputaretur.

§. 7. Interim tamen facile innumeri casus exhiberi possunt, pro quibus iste valor, rite computatus, revera minor reperitur quam valor modo inventus. Quod si enim loco curvae EY ex puncto E per rectas EA, AV, VY usque ad Y progrediamur, quae via utique multo major est, quam si per curvam EY processissemus, valor nostrae formulae integralis pro spatio EA reperitur $\frac{2}{3}a\sqrt{a}$; at pro spatio AV, ubi $x=0$, valor evanescet; pro spatio vero VY habebitur $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$, ita ut pro tota via EAVY valor nostrae formulae futurus sit $= \frac{2}{3}a\sqrt{a} + \frac{2}{3}x\sqrt{x}$; qui quidem utique major est quam expressio inventa $\frac{2}{3}(2a+x)\sqrt{x-a}$, quamdiu x non multo major accipitur quam a; at vero contrarium evenit, si x multo major accipiatur. Veluti, si sumto $a=1$ statuatur $x=100$, pro parabola formula nostra praebet $\frac{2}{3}\times 102\sqrt{99}$; at vero pro via EAVY, nostra formulae erit $\frac{2}{3}\times 1001$; unde cum proxime sit $\sqrt{99}=10-\frac{1}{21}$ ille valor proxime erit $\frac{2}{3}\times 1015$, ideoque revera major quam alter.

§. 8. Cum igitur minores valores pro x assumti cum indole minimi consentiant, majores vero dissentiant, inquiramus in limitem, quo dissensus incipiat, seu ubi fiat $(2a+x)\sqrt{x-a} = a\sqrt{a} + x\sqrt{x}$, quod quo facilius fieri possit sumamus $a=1$ et $x=tt+1$, ut habeatur aequatio $t(tt+3) = 1+(tt+1)^{\frac{3}{2}}$, ideoque $(1+tt)^{\frac{3}{2}} = t^3+3t-1$, et sumtis quadratis erit:

$$t^6+3t^4+3tt+1 = t^6+6t^4-2t^3+9tt-6t+1, \text{ sive}$$
$$3t^3-2tt+6t-6=0.$$

Ponatur $t=\frac{s}{3}$, ut prodeat haec aequatio: $s^3-2ss+18s-54=0$, hinc fit proxime $s=\frac{30}{11}$, ergo $t=\frac{10}{11}$, hincque $x=\frac{221}{121}$. Unde patet, ante quam x sumatur $=2$, dissensum incipere.

Tab. I. Fig. 3. §. 9. Quo autem haec generalius evolvamus, curvam inventam ita instruamus, ut per data duo puncta F et H transeat, statuendo $Ff=f$, $Hh=h$, intervallum vero $fh=2g$, ita ut, bisecto hoc intervallo in g, sit $fg=hg=g$. Quaeritur ergo tam positio axis parabolae quam ejus vertex E. Hunc in finem sit ut supra $AE=a$ et distantia $Ag=v$, ita ut sit $Af=v-g$ et $Ah=v+g$. His positis, si in aequatione nostra inventa $y=2\sqrt{ax-aa}$ sumamus vel $y=v-g$, vel $y=v+g$, esse debebit vel $x=f$, vel $x=h$, unde nanciscimur has duas aequationes: $v-g=2\sqrt{af-aa}$ et $v+g=2\sqrt{ah-aa}$, ex quibus valores tam pro v quam pro x elici debent. Eliminato vero v statim erit $g = -\sqrt{af - aa} + \sqrt{ah - aa}$, sive $g + \sqrt{af - aa} = \sqrt{ah - aa}$; unde sumtis quadratis fit $gg + 2g\sqrt{af - aa} + af - aa = ah - aa$, sive $2g\sqrt{af - aa} = a(h - f) - gg$, iterumque quadrando $4gg(af - aa) = aa(h - f)^2 - 2agg(h - f) + g^4$, sive $aa((h - f)^2 + 4gg) - 2agg(h + f) + g^4 = 0$. Pro hujus aequationis solutione ponamus $a = \frac{gg}{z}$, ut habeamus

$$0 = zz - 2(h + f)z + (h - f)^2 + 4gg, \text{ unde fit}$$

$z = (h + f) + 2\sqrt{hf - gg}$, ideoque $a = \frac{gg}{h + f + 2\sqrt{fh - gg}}$.

§. 10. Hinc jam statim patet, nisi fuerit $fh > gg$ curvam quaesitam esse imaginariam, sive his casibus nullam curvam per puncta F et H traduci posse; cum tamen pro omnibus, quas pro lubitu per haec puncta ducere licet, valor nostrae formulae integralis assignari queat, qui pro ratione curvae traductae modo major modo minor evadere potest, ita ut hinc natura minimi neutiquam excludi posse videatur.

§. 11. Quoties autem fuerit $fh > gg$, ob signum radicale ambiguum duae adeo exhiberi poterunt parabolae per puncta F et H transeuntes, cui utrique indoles minimi conveniet, cum tamen inter se plurimum discrepent. Quod quo clarius appareat, investigemus valorem illum, qui deberet esse minimus, ac primo quidem quaeramus valores formularum $\sqrt{af-aa}$ et $\sqrt{ah-aa}$, pro quarum priori utamur aequatione supra §. 9. inventa: $2g\sqrt{af-aa}=a(h-f)-gg$, quae ob $x=\frac{gg}{f+h+2\sqrt{hf-gg}}$ praebet $\sqrt{af-aa}=-\frac{fg-g\sqrt{fh-gg}}{h+f+2\sqrt{fh-gg}}$. Hoc invento aequatio $\sqrt{ah-aa}=g+\sqrt{af-aa}$ praebet $\sqrt{ah-aa}=\frac{gh+g\sqrt{fh-gg}}{h+f+2\sqrt{fh-gg}}$, sive scribendo brev. gr. $\sqrt{fh-gg}$ simpliciter $\sqrt{\ldots}$, ut sit $a=\frac{gg}{f+h+2\sqrt{\ldots}}$, erit $\sqrt{af-aa}=-\frac{g(f+\sqrt{\ldots})}{f+h+2\sqrt{\ldots}}$ et $\sqrt{ah-aa}=\frac{g(h+\sqrt{\ldots})}{f+h+2\sqrt{\ldots}}$.

§. 12. Designemus nunc valorem nostrae formulae integralis pro curva quacunque nomine ejus momenti, et quia supra vidimus, momentum curvae EY (Fig. 2.) esse $\frac{2}{3}(2a+x)\sqrt{x-a}$, erit id etiam $\frac{2}{3\sqrt{a}}(2a+x)\sqrt{ax-aa}$ unde pro nostro casu momentum curvae EH (Fig. 3.) erit $=\frac{2}{3\sqrt{a}}(2a+h)\sqrt{ah-aa}$, et momentum pro curva $EF=\frac{2}{3\sqrt{a}}(2a+f)\sqrt{af-aa}$, quod a praecedente subtractum relinquit momentum pro arcu proposito

$$FH=\frac{2}{3\sqrt{a}}(2a(\sqrt{ah-aa}-\sqrt{af-aa})+h\sqrt{ah-aa}-f\sqrt{af-hh})$$

quae expressio, si loco radicalium scribantur valores modo inventi, induit hanc formam:

$$\frac{2g}{3(f+h+2\sqrt{\ldots})\sqrt{a}}(2a(f+h+2\sqrt{\ldots})+ff+hh+(f+h)\sqrt{\ldots})$$

quae, si loco a ejus valor substituatur, abit in hanc

$\frac{2g}{3(f+h+2\surd\ldots)\surd a}(2gg+ff+hh+(f+h)\surd\ldots)$, sive in hanc: $\frac{2g}{3\surd a}\left(\frac{2gg+ff+hh+(f+h)\surd\ldots}{f+h+2\surd\ldots}\right)$.

Quod si haec posterior fractio multiplicetur supra et infra per $f+h-2\surd\ldots$ prodibit ejus numerator

$$=(f+h)(2gg+ff+hh)-2(f+h)(fh-gg)$$
$$+(2fh-ff-hh-4gg)\surd\ldots$$

qui reducitur ad hanc formam:

$$(f+h)(4gg+(h-f)^2)-(4gg+(h-f)^2)\surd\ldots$$
$$=(4gg+(h-f)^2)(f+h-\surd\ldots).$$

At vero denominator prodibit $(h-f)^2+4gg$, sicque commode evenit ut evadat momentum quaesitum $=\frac{2g}{3\surd a}(f+h-\surd\ldots)$. Quare cum $\surd a=\frac{g}{\surd(f+h+2\surd\ldots)}$, erit hoc momentum pro arcu FH

$$=\tfrac{2}{3}(f+h-\surd\ldots)(\sqrt{f+h+2\surd\ldots}).$$

§. 13. Quoties ergo fuerit $gg<fh$, ob signum radicale semper duo exhiberi poterunt minima, sive ab F ad H binos arcus parabolicos ducere licebit. Quin etiam, si haec ad motum projectionis referantur, ex puncto F duplici modo corpus cum celeritate altitudini Ff debita ita projici poterit, ut punctum H feriat. Ex quo facile intelligitur, hoc fieri non posse, nisi punctum H ultra certam distantiam fuerit remotum, quo ergo casu mirum non

est, curvam nostram fieri imaginariam, idque continget, quoties fuerit $gg > fh$.

§. 14. Contemplemur autem attentius casum, quo $gg = fh$, siquidem tum binae solutiones in unam coalescunt, ob $\sqrt{fh - gg} = 0$; tum vero arcus parabolicus FH jactum longissimum repraesentabit. Hoc igitur casu momentum istius arcus FH erit $\frac{2}{3}(f + h)^{\frac{3}{2}}$. Sin autem hic per viam $FfhH$ ad H usque progrediamur, erit momentum huic viae respondens $= \frac{2}{3}(f\sqrt{f} + h\sqrt{h})$, quod manifesto semper minus est quam illud, quod pro arcu parabolico FH invenimus, etiamsi hoc in suo genere sit minimum.

§. 15. Ad haec paradoxa explicanda notari oportet momentum viae $FfhH$ respondens etiam in suo genere esse minimum. Scilicet si puncta f et h aliquantum mutentur, momentum, quod respondet viae $Ff'h'H$ manifesto foret majus. Mirum igitur videbitur verum hoc minimum non a calculo fuisse nobis monstratum; verum ratio satis est manifesta, propterea quod haec via non est linea continua. Interim tamen etiam hic casus in calculo ipso comprehenditur. Cum enim esse debeat $\partial . \frac{p\sqrt{x}}{\sqrt{1+pp}} = 0$, evidens est hanc formulam, tam pro rectis Ff, quam pro hH, utpote verticalibus, esse revera $= 0$; at vero pro via horizontali fh, propter $x = 0$, iterum evanescit. Ceterum satis notum est eandem lineam curvam saepenumero plures applicatas minimas, inter se maxime diversas, contineri posse, dummodo quaelibet applicata minor sit quam sibi proximae utrinque. Hincque etiam intelligitur, quando calculus inter puncta F et H duas exhibet curvas, momenta pro utraque minima esse posse, etiamsi a se invicem plurimum differant.