1810

Solutio problematis ob singularia calculi artivicia memorabilis

Leonhard Euler

E731

SOLUTIO PROBLEMATIS

OB SINGULARIA CALCULI ARTIFICIA MEMORABILIS

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhibita die 22 Martii 1779.

§. 1.

Problema, quod hic solvendum suscipio, ita enunciatur: *Invenire lineam curvam* AM, *in qua, positis coordinatis* CP $= x$, PM $= y$, *arcu* AM $=$ S *et recta* CM$=\sqrt{xx+yy}=z$; *formula integralis* $\int v\partial s$ *maximum minimumve valorem obtineat, existente* v *functione quacunque ipsius* z. Tab. I. Fig. 1.

§. 2. Si in genere quaeratur relatio inter binas variabiles x et y, positoque $\partial y = p\partial x$, fuerit V functio quaecunque ipsarum x, y et p, ita ut ejus differentiale hanc habeat formam: $\partial V = M\partial x + N\partial y + P\partial p$; tum formula integralis $\int V\partial x$ maximum minimumve habebit valorem, si fuerit $N\partial x = \partial P$, ita ut ista aequatio relationem quaesitam inter x et y exprimat.

§. 3. Quanquam hac aequatione totum negotium conficitur, tamen plerumque juvabit aliam iusuper aequationem, etsi priori aequivalentem, considerasse. Cum enim sit $N\partial x = \partial P$, multiplicando per p fiet $N\partial y = p\partial P$, quo valore substituto prodibit

$$\partial V = M\partial x + P\partial p + p\partial P = M\partial x + \partial . Pp.$$

Hinc igitur sequitur fore $M\partial x = \partial . (V - Pp)$, quae est altera illa aequatio ad usum nostrum analyticum maxime accommodata.

§. 4. Transferamus nunc haec praecepta generalia ad problema propositum. Ac primo quidem, posito $\partial y = p\partial x$ habebimus $\partial s = \partial x\sqrt{1+pp}$. Deinde, cum sit $z = \sqrt{xx+yy}$, erit $\partial z = \frac{x\partial x + y\partial y}{z}$. Tum vero, cum v sit functio ipsius z, ponatur $\partial v = q\partial z$, eritque $\partial v = \frac{q(x\partial x + y\partial y)}{z}$. Nunc igitur pro formula maximi vel minimi habebimus $V = v\sqrt{1+pp}$, unde differentiando colligitur $\partial V = \frac{q(x\partial x + y\partial y)\sqrt{1+pp}}{z} + \frac{vp\partial p}{\sqrt{1+pp}}$, quo differentiali cum forma generali collato erit $M = \frac{qx\sqrt{1+pp}}{z}$, $N = \frac{qy\sqrt{1+pp}}{z}$ et $P = \frac{vp}{\sqrt{1+pp}}$.

§. 5. Hinc igitur aequatio totam nostri problematis solutionem complectens, quae erat $N\partial x = \partial P$, induet hanc formam: $\frac{qy\partial x\sqrt{1+pp}}{z} = \partial . \frac{vp}{\sqrt{1+pp}}$. Altera autem aequatio, in subsidium vocanda, propter $V - Pp = \frac{v}{\sqrt{1+pp}}$, ita exprimetur: $\frac{qx\partial x\sqrt{1+pp}}{z} = \partial . \frac{v}{\sqrt{1+pp}}$. Quare cum pro priore aequatione sit

$$\partial . \frac{vp}{\sqrt{1+pp}} = \frac{v\partial p}{\sqrt{1+pp}} + p . \partial . \frac{v}{\sqrt{1+pp}} = \frac{v\partial p}{\sqrt{1+pp}} + \frac{qx\partial y\sqrt{1+pp}}{z},$$

perveniemus ad istam: $\frac{q(y\partial x - x\partial y)\sqrt{1+pp}}{z} = \frac{v\partial p}{\sqrt{1+pp}}$, ideoque erit $y\partial x - x\partial y = \frac{vz\partial p}{q(1+pp)}$, haecque est aequatio, qua utemur ad solutionem problematis nostri concinnandam.

§. 6. Dividamus hanc aequationem per $zz = xx + yy$, ut nanciscamur hanc formam; $\frac{y\partial x - x\partial y}{xx+yy} = \frac{v\partial p}{qz(1+pp)}$, ubi constat integrale prioris membri esse A tang. $\frac{x}{y}$. Verum hinc parum lucri obtineri videtur, cum altera aequationis pars prorsus sit intractabilis. Interim tamen ponamus esse Φ illum angulum, cujus tangens est $\frac{x}{y}$, ita ut nostra aequatio sit $\partial\Phi = \frac{v\partial p}{qz(1+pp)}$.

§. 7. Introducto hoc angulo Φ ipsas coordinatas x et y ex calculo elidere poterimus. Cum enim sit $\frac{x}{y} = \text{tang.}\,\Phi$, erit $x = z\,\sin.\,\Phi$ et $y = z\,\cos.\,\Phi$, quorum valorum ope etiam litteram p extrudi oportet. Quoniam vero $p = \frac{\partial y}{\partial x}$, erit $p = \frac{\partial z\,\cos.\,\Phi - z\partial\Phi\,\sin.\,\Phi}{\partial z\,\sin\,\Phi + z\partial\Phi\,\cos.\,\Phi}$. Jam ponatur $\partial z = tz\partial\Phi$, ut fiat $p = \frac{t\,\cos.\,\Phi - \sin.\,\Phi}{t\,\sin.\,\Phi + \cos.\,\Phi} = \frac{t - \text{tang.}\,\Phi}{1 + t\,\text{tang.}\,\Phi}$, quae expressio manifesto designat tangentem differentiae angulorum duorum, quorum prioris tangens $= t$, posterior vero angulus ipse $= \Phi$.

§. 8. Cum igitur p aequetur tangenti cujuspiam anguli, statuamus $p = \text{tang.}\,\omega$, eritque ω ipsa illorum angulorum differentia, scilicet $\omega = \text{A tang.}\,t - \Phi$, unde fit $\partial\omega = \frac{\partial t}{1+tt} - \partial\Phi$. Praeterea vero, ob $p = \text{tang.}\,\omega$, ideoque $\omega = \text{A tang.}\,p$, erit etiam $\partial\omega = \frac{\partial p}{1+pp}$. Hinc aequatio nostra resolvenda erit $\partial\Phi = \frac{v\partial\omega}{qz}$. Ex praecedente autem forma foret $\partial\omega = \frac{\partial t}{1+tt} - \partial\Phi$, ideoque $\frac{qz\partial\Phi}{v} = \frac{\partial t}{1+tt} - \partial\Phi$, sive $\partial\Phi\left(1 + \frac{qz}{v}\right) = \frac{\partial t}{1+tt}$.

§. 9. Quoniam autem posuimus $\partial z = tz\partial\Phi$, erit $\partial\Phi = \frac{\partial z}{tz}$, quo valore substituto nostra aequatio hanc induit formam: $\frac{\partial z}{z}\left(1 + \frac{qz}{v}\right) = \frac{t\partial t}{1+tt}$. Quare cum sit $q\partial z = \partial v$, integratio commodissime per logarithmos instituetur: erit enim $lz + lv = l\sqrt{1+tt} - ln$, consequenter nacti sumus hanc aequationem integratam: $vz = \frac{\sqrt{1+tt}}{n}$.

§. 10. Investigemus jam ex hac aequatione valorem ipsius t, qui erit $t = \sqrt{nnvvzz - 1}$. Quare cum sit $t = \frac{\partial z}{z\partial\Phi}$, ex hac aequatione colligimus $\partial\Phi = \frac{\partial z}{z\sqrt{nnvvzz-1}}$, quae est aequatio differentialis primi gradus inter angulum Φ et distantiam $CM = z$, siquidem v est functio ipsius z. Pro angulo vero notetur esse $\text{tang.}\,\Phi = \frac{x}{y}$, hincque $x = z\,\text{sin.}\,\Phi$

et $y = z \cos. \Phi$, ita ut jam ambae coordinatae x et y per eandem variabilem z exprimantur, quae est solutio absolutissima nostri problematis.

§. 11. Hic autem fateri cogor, me fortasse nunquam ad hanc solutionem perventum fuisse, nisi ea mihi jam aliunde innotuisset; atque ob hanc ipsam caussam artificia, quibus in hoc calculo sum usus, eo majore attentione digna videntur, quod minime sint obvia et sine dubio maximum usum in pluribus aliis casibus praestare possint.

§. 12. Subjungam igitur hic aliam ejusdem problematis solutionem, quae me sine ullis ambagibus ad ipsam aequationem finalem hic inventam manuduxit. Retuli scilicet totam quaestionem ad alias duas coordinatas, perinde ad curvam construendam accommodatas, quarum altera ipsa sit distantia CM, quam hic vocabo $= x$, altera vero sit angulus BCM, littera y designandus. Hinc erit elementum curvae $Mm = \partial s = \sqrt{\partial x^2 + xx\partial y^2}$, quod posito $\partial y = p\partial x$ abit in $\partial s = \partial x \sqrt{1 + ppxx}$, unde formula integralis pro maximo minimove erit $\int v\partial x \sqrt{1 + ppxx}$. Tab. I. Fig. 2.

§. 13. Comparemus hanc formulam cum formula generali $\int V\partial x$, atque habebimus $V = v\sqrt{1 + ppxx}$, quae ergo quantitas, ob v functionem ipsius x, duas tantum quantitates variabiles involvit x et p, tertia y penitus exclusa; unde cum posuerimus $\partial V = M\partial x + N\partial y + P\partial p$, erit $N = 0$ et $P = \frac{vpxx}{\sqrt{1+ppxx}}$. Hinc aequatio solutionem continens, $N\partial x = \partial P$, abit in hanc: $\partial P = 0$, unde fit $P = \text{const.} = \frac{1}{n}$, ita ut sit $nvpx = \sqrt{1+ppxx}$, hincque statim elicitur $p = \frac{1}{x\sqrt{nnvv-1}} = \frac{\partial y}{\partial x}$, sicque jam adepti sumus hanc aequationem: $\partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{nnvvxx-1}}$.

§. 14. Transferamus nunc hanc solutionem simplicissimam ad denominationes in superiore solutione usurpatas, dum scilicet loco litterae x scribemus z et loco ∂y elementum $\partial\Phi$, hocque modo solutio nostri problematis hac continebitur aequatione: $\partial\Phi = \frac{\partial z}{z\sqrt{nnvvzz-1}}$, quae, ob v functionem ipsius z, perfecte congruit cum ea, ad quam in priore solutione, per plures ambages, sumus deducti. Ubi imprimis est observandum hanc solutionem semper valere, qualiscunque functio ipsius z pro v accipiatur. Imprimis autem hic memoratu dignum usu venit, quod, si pro v accipiatur potestas quaecunque ipsius z, curva satisfaciens adeo proditura sit algebraica.

§. 15. Ponamus enim $v = z^\lambda$, atque habebimus hanc pro curva quaesita aequationem: $\partial\Phi = \frac{\partial z}{z\sqrt{(nnz^{2\lambda+2}-1)}}$, ad quam evolvendam statuamus $\sqrt{nnz^{2\lambda+2}-1} = \omega$, ut fiat

$\partial\phi = \frac{\partial z}{zu}$, tum vero erit $nnz^{2\lambda+2} = uu + 1$, sumtisque logarithmicis differentialibus $(2\lambda + 2)\,\frac{\partial z}{z} = \frac{2u\partial u}{1+uu}$, ideoque $\frac{\partial z}{z} = \frac{u\partial u}{(\lambda+1)(1+uu)}$, ita ut jam habeamus $(\lambda+1)\,\partial\phi = \frac{\partial u}{1+uu}$, hincque integrando $(\lambda + 1)\,\phi = A\,\text{tang.}\,u$. Quod si ergo capiatur angulus ψ, cujus tangens sit $\sqrt{nnz^{2\lambda+2} - 1}$, erit $(\lambda+1)\,\phi = \psi$, ideoque $\phi = \frac{\psi}{\lambda+1}$; unde, dummodo λ fuerit numerus rationalis, ex angulo ψ semper algebraice determinari poterit angulus ϕ, consequenter, cum ex assumto angulo ψ sit $u = \text{tang.}\,\psi = \sqrt{nnz^{2\lambda+2} - 1}$, omnia per istum angulum ψ determinari poterunt, quandoquidem habebimus $nnz^{2\lambda+2} = 1 + \text{tang.}\,\psi^2 = \frac{1}{\cos.\,\psi^2}$, hincque $z = \sqrt[\lambda+1]{\frac{1}{n\cos.\,\psi}}$; tum vero cum sit $\phi = \frac{\psi}{\lambda+1}$, erunt coordinatae $x = z\sin.\frac{\psi}{\lambda+1}$ et $y = z\cos.\frac{\psi}{\lambda+1}$, qui omnes valores ergo algebraice exhiberi possunt.
