1809

De resolutione fractionum compositarum in simpliciores

Leonhard Euler

DE RESOLUTIONE FRACTIONUM COMPOSITARUM IN SIMPLICIORES

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhib. die 11. Januarii 1779.

§. 1.

Cum olim hoc argumentum tractassem, praecipue ad ejus usum in calculo integrali respexi, unde necesse erat, denominatorem fractionis propositae in suos factores simplices, seu primi gradus, in quibus scilicet quantitas variabilis non ultra primam potestatem assurgit, resolvere; quo facto methodum tradidi, pro quolibet denominatoris factore simplici fractionem partialem inde oriundam investigandi, sive ejus numeratorem, qui semper est constans, definiendi. Quod si enim hac ratione pro singulis factoribus simplicibus tales fractiones partiales fuerint formatae, summa omnium aequalis esse debet ipsi fractioni propositae, siquidem fuerit genuina et quantitas variabilis in numeratore

*

pauciores habeat dimensiones quam in denominatore; sin autem fuerit spuria, et variabilis in numeratore ad totidem, vel adeo ad plures dimensiones surrexerit, tum ad illam fractionum partialium summam insuper partes integras, quae ex divisione numeratoris per denominatorem resultant, addi oportet.

§. 2. Quoniam autem plerumque evenire solet, ut plures denominatoris factores simplices evadant imaginarii, quorum bini conjuncti semper productum reale constituunt, methodum meam etiam ad factores secundi gradus hujus formae: $a+bx+cxx$ extendi, atque demonstravi, quemadmodum fractionis hinc natae numerator inveniri debeat; qui plerumque duabus constabit partibus, dum in eo etiam prima potestas variabilis inesse potest, ita ut fractio inde nata hanc habitura sit formam: $\frac{\alpha+\beta x}{a+bx+cxx}$. In hoc autem negotio calculum imaginariorum in subsidium vocare sum coactus.

§. 3. Peculiaria autem artificia requirebant casus, quibus denominator fractionis propositae duos pluresve complectitur factores inter se aequales, quorum evolutio in fractiones partiales longas ambages postulabat; imprimis quando duo pluresve factores secundi gradus fuerint inter se aequales. Nunc igitur aliam methodum proponam, quam etiam ad factores altiorum graduum applicare liceat;

sub quibus ergo etiam quadrata altioresque potestates factorum tam primi quam secundi gradus comprehendi possunt. Imprimis autem haec methodus a praecedente in eo discrepat, quod totum negotium sine quantitatibus imaginariis absolvi possit, quam ergo methodum hic accuratius exponere mecum constitui.

§. 4. Considero igitur hunc in finem fractionem quamcunque compositam hujus formae: $\frac{N}{P \times Q \times R \cdot etc.}$; cujus denominator complectatur quotcunque factores P, Q, R, S, etc. qui singuli non solum sint primi, vel secundi, vel tertii, sed etiam cujuscunque altioris gradus; ita ut, si cujuspiam factoris gradus ad n dimensiones ascendat, ejus forma futura sit $\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \delta x^{n-3} +$ etc. Imprimis autem in hocce negotio necesse est, ut omnes isti factores sint inter se primi, neque ullum factorem communem involvant. Numerator vero N functio esse potest quaecunque *rationalis integra* ipsius x; ac perinde est sive haec fractio sit *genuina*, sive *spuria*, quandoquidem posteriore casu partes integras in fractione proposita contentas per divisionem actualem eruere licet, quod quidem, postquam jam omnes fractiones partiales fuerint inventae, demum fieri poterit.

§. 5. Primo igitur hanc fractionem resolvi oportebit in hujusmodi partes: $\frac{\mathfrak{P}}{P} + \frac{\mathfrak{Q}}{Q} + \frac{\mathfrak{R}}{R} +$ etc. quae scilicet ex singulis factoribus denominatoris oriuntur. Deinde vero, si in numeratore N quantitas variabilis x ascendat ad totidem dimensiones, quot habet in denominatore PQRS etc. praeterea accedet quantitas constans $\mathfrak{A}$; sin autem ad plures dimensiones ascendat, insuper accedent partes integrae $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}xx$ etc. Quemadmodum igitur omnes istae partes commode inveniri queant, methodum facilem hic sum traditurus, quae ita est comparata, ut quaelibet pars, sine respectu ad reliquas habito, seorsim investigari possit.

§. 6. Cum igitur ex denominatoris factore P oriri statuamus fractionem $\frac{\mathfrak{P}}{P}$, ante omnia est notandum, hanc fractionem esse debere genuinam, ita ut in ejus numeratore $\mathfrak{P}$ quantitas x pauciores habeat dimensiones, quam in denominatore P, quandoquidem partes integrae in forma $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}xx + \mathfrak{D}x^3 +$ etc. contineri ponuntur. Unde si factor P fuerit primi gradus formae $\alpha + \beta x$, numerator $\mathfrak{P}$ erit quantitas constans a; sin autem factor P fuerit secundi ordinis, fieri potest ut etiam x in $\mathfrak{P}$ ingrediatur, ita ut habeat formam $a + bx$; at si P fuerit factor tertii gradus formae $\alpha + \beta x + \gamma xx + \delta x^3$, tum forma numeratoris $\mathfrak{P}$ esse poterit $a + bx + cxx$, et ita porro; ita ut in genere numerator $\mathfrak{P}$ involvere possit omnes potestates ipsius x *minores* quam in denominatore occurrunt. In operationibus igitur sequentibus probe cavendum erit, ne in numeratore $\mathfrak{P}$ investigando istae potestates minores ex calculo extirpentur. Hoc observato methodum hic sum expositurus, cujus ope pro qualibet harum fractionum numerator $\mathfrak{P}$, sine respectu ad reliquas habito, inveniri queat.

Investigatio Fractionis $\frac{\mathfrak{P}}{P}$

quae scilicet ex denominatoris factore P oritur.

§. 7. Quoniam igitur fractio proposita $\frac{N}{PQR\,etc.}$ summae omnium partium aequalis esse debet, ita ut habeatur sequens aequatio:

$$\frac{N}{PQR\,etc.} = \frac{\mathfrak{P}}{P} + \frac{\mathfrak{Q}}{Q} + \frac{\mathfrak{R}}{R} + \ldots + \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}xx + \text{etc.}$$

pro fractione $\frac{\mathfrak{P}}{P}$ indaganda reliquas partes omnes sub charactere *etc.* complectamur, ita ut habeamus hanc aequationem: $\frac{N}{PQR\,etc.} = \frac{\mathfrak{P}}{P} + \text{etc.}$ In ipsa autem fractione proposita, quia hic tantum denominatoris factorem P respicimus, productum reliquorum factorum QRS etc. littera M designemus, ita ut jam habeamus hanc aequationem: $\frac{N}{PM} = \frac{\mathfrak{P}}{P} + \text{etc.}$ unde valorem numeratoris $\mathfrak{P}$ erui oportet.

§. 8. Hunc in finem multiplicemus hanc aequationem $\frac{N}{PM} = \frac{\mathfrak{P}}{P} + \text{etc.}$ per ipsum factorem P, ut prodeat ista: $\frac{N}{M} = \mathfrak{P} + P \times \text{etc.}$, quae ergo statim praebet $\mathfrak{P} = \frac{N}{M} - P \times \text{etc.}$ Quamobrem si statuamus $P = 0$, fiet $\mathfrak{P} = \frac{N}{M}$, quae expressio cum sit fractio, totum negotium huc redit, quemadmodum inde functio integra ipsius x erui possit.

§. 9. Incipiamus a casu simplicissimo, quo factor P est primi gradus, ideoque numerator quaesitus $\mathfrak{P}$ quantitas constans, atque ex aequatione $P = 0$ statim eruitur $x = f$, qui valor in fractione $\frac{N}{M}$ substitutus verum nobis praebebit valorem ipsius $\mathfrak{P}$ quaesitum. Sin autem factor P fuerit secundi gradus, ex aequatione $P = 0$ elicimus $xx = fx + g$, unde omnes altiores potestates ipsius x per similem formam exprimere poterimus. Cum enim inde sit $x^3 = fxx + gx$, si hic loco xx ejus valor scribatur, habebimus

$x^3 = (ff + g)x + fg$; ac denuo per x multiplicando erit
$x^4 = (f^3 + 2fg)x + (ffg + gg)$; tum vero
$x^5 = (f^4 + 3ffg + gg)x + (f^3 g + 2fgg)$;

hocque modo quousque libuerit progredi licebit, ita ut omnes potestates altiores ipsius x per talem formam: $fx + g$ exprimatur.

§. 10. Quod si ergo hos valores tam in numeratore N quam in denominatore M substituamus, manifesto ad talem formam perveniemus: $\frac{N}{M} = \mathfrak{P} = \frac{\alpha + \beta x}{a + bx}$; ubi facile intelligitur, numeratorem et denominatorem per ejusmodi factorem communem multiplicari posse, ut posito $xx = fx + g$ ex denominatore quantitas x penitus extirpetur, quo pacto

debitus valor ipsius $\mathfrak{P}$ obtinebitur. Quod si enim pro illo multiplicatore sumamus $p + qx$, denominator evadet $ap + (aq + bp)x + bqxx$, qui, posito $xx = fx + g$, induet hanc formam: $(aq + bp + fbq)x + (ap + gbq)$, ubi tantum opus est p et q ita definire, ut fiat $aq + bp + fbq = 0$, sive $\frac{p}{q} = \frac{-fb-a}{b}$. Sumto ergo $p = -fb - a$ et $q = b$, denominator erit $= ap + gbq = gbb - afb - aa$, ideoque constans. Numerator vero tum erit
$(\alpha + \beta x)(p + qx) = \alpha p + (\alpha q + \beta p)x + \beta qxx$, qui ob $xx = fx + g$, reducitur ad debitam formam $fx + g$: Erit enim $N = (\alpha q + \beta p + \beta fq)x + (\alpha p + \beta gq)$, ita ut numerator quaesitus sit $\mathfrak{P} = \frac{(\alpha q + \beta p + \beta fq)x + (\alpha p + \beta gq)}{gbb - abf - aa}$.

§. 11. Eodem modo si fuerit P factor tertii gradus, posito $P = 0$ fiet $x^3 + fxx + gx + h$; unde etiam omnes potestates altiores ipsius x per similem formam exprimi poterunt; in qua scilicet tantum prima et secunda ejus insit potestas: inde enim colligitur fore

$$x^4 = (ff + g)xx + (fg + h)x + fh$$

$$x^5 = (f^3 + 2fg + h)xx + (ffg + fh + gg)x + (ffh + gh)$$

Ulterius autem progrediendo evidens est has formulas constituere seriem recurrentem, cujus scala relationis est $f, + g, + h$; quo observato facile, quousque libuerit, progredi licebit.

§. 12. Jam satis manifestum est, si denominator P fuerit gradus cujuscunque, puta n, ex aequatione $P = 0$ semper fore $x^n = fx^{n-1} + gx^{n-2} + hx^{n-3} +$ etc. unde simul omnes altiores potestates ipsius x per potestates n^{ima} inferiores exprimi poterunt. Quod si jam isti valores tam in numeratore N quam in denominatore M substituantur, tum pro $\mathfrak{P}$ reperietur fractio, in cujus tam numeratore quam denominatore tantum potestates minores quam exponentis n occurrent. Tum vero haud difficulter intelligere licet, semper talem multiplicatorem communem investigare licere, ut facta multiplicatione denominator evadat quantitas constans, numerator vero ad potestates minores quam exponentis n reducatur, quo pacto valor desideratus pro littera $\mathfrak{P}$ obtinebitur.

§. 13. Hoc autem modo investigatio postremi multiplicatoris plerumque calculos perquam operosos et taediosos postularet; quamobrem plurimum intererit aliam excogitare methodum, cujus ope fractio inventa $\frac{N}{M}$ in aliam formam transmutari possit, cujus denominator evadat quantitas constans. Talis autem methodus huic principio innititur: quod, si duae fractiones $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ fuerint inter se aequales, tum iisdem etiam fractio haec: $\frac{\alpha p + \beta r}{\alpha q + \beta s}$ futura sit aequalis, cujus rei veritas jam sponte in oculos incurrit.

§. 14. Hoc principio stabilito, quoniam pro $\mathfrak{P}$ invenimus fractionem $\frac{N}{M}$, unde majores potestates ipsius x jam exclusas esse assumimus, si hic successive tam supra quam infra multiplicetur per x, x^2, x^3, etc. et loco x^n et majorum potestatum valores assignati substituantur, prodibunt aliae fractiones, totidem pariter valores ipsius $\mathfrak{P}$ exprimentes, quae sint $\frac{N'}{M'}$, $\frac{N''}{M''}$, $\frac{N'''}{M'''}$, etc. in quas tantum potestates minores quam x^n ingrediuntur. Harum jam binae ita per principium expositum facile combinari poterunt, ut, posito $\mathfrak{P} = \frac{\alpha N + \beta N'}{\alpha M + \beta M'}$, ex denominatore potestas inferiorum maxima, scilicet x^{n-1}, excludatur; quod si pluribus modis fuerit factum, simili modo ex his novis fractionibus aliae formari poterunt, in quarum denominatoribus maxima potestas tantum sit x^{n-3}; hocque modo ulterius progrediendo tandem pervenietur ad fractionem, cujus denominator prorsus sit constans, quae ergo valorem desideratum litterae $\mathfrak{P}$ praebebit. In his autem operationibus cautela supra memorata probe est observanda, ne scilicet istae fractiones, qualemcunque habeant formam, unquam deprimantur, etiamsi forte habuerint factorem numeratori ac denominatori communem.

§. 15. Hac igitur methodo pro quolibet denominatoris principalis factore, sive P, sive Q, sive R, sive S, fractiones partiales $\frac{\mathfrak{P}}{P}$, $\frac{\mathfrak{Q}}{Q}$, $\frac{\mathfrak{R}}{R}$, $\frac{\mathfrak{S}}{S}$, etc. seorsim assignari po-

*

terunt, in quarum numeratoribus quantitas x ubique ad pauciores potestates assurgat quam in denominatore.

Alia Methodus
numeratorem $\mathfrak{P}$ investigandi.

§. 16. Postquam perventum fuerit ad aequalitatem $\frac{N}{M}$, ubi omnes ipsius x potestates jam sint minores quam in ipso denominatore P, singularis se mihi obtulit via, multiplicatorem illum supra memoratum eruendi, qui si litera Π designetur, habebimus $\mathfrak{P} = \frac{N\Pi}{M\Pi}$. Jam quia requiritur ut posito $P = 0$ iste denominator evadat quantitas constans, hoc eveniet statuendo $M\Pi = C + P\Theta$. Sic enim, ratione habita aequationis $P = 0$, utique fiet $\mathfrak{P} = \frac{N\Pi}{C}$; sicque ista littera per functionem integram ipsius x exprimetur, postquam scilicet ex numeratore $N\Pi$ altiores potestates fuerint exclusae.

§. 17. Nunc ad istas quantitates Π et Θ inveniendas, evidens est, si quantitas variabilis x ut infinita spectetur, tum fore $M\Pi = P\Theta$, ideoque $\frac{\Pi}{\Theta} = \frac{P}{M}$; unde patet, fractionem $\frac{\Pi}{\Theta}$ proxime aequalem esse debere fractioni $\frac{P}{M}$. Hic igitur in subsidium vocare conveniet eandem operationem, quae in numeris institui solet, quando fractione quacunque proposita alia ipsi proxime aequalis quaeritur. Simili enim modo, quantitate P per M divisa, residuum sumatur pro divisore, praecedens vero divisor pro dividendo; hocque modo procedatur, donec ad quotos fractos perveniatur, in quorum scilicet denominatore ipsa quantitas x insit. Tum enim si more solito ex quotis repertis fractiones formentur, ea quae ultimo quoto integro respondet, nobis exhibebit ipsam fractionem $\frac{\Pi}{\Theta}$, ex qua deinceps, numeratoribus et denominatoribus seorsim aequatis, numerator $\mathfrak{P}$ facili negotio eruitur.

§. 18. Quoniam autem tales operationes in quantitatibus algebraicis nondum sunt usitatae, rem exemplo illustrasse operae erit pretium. Sumamus igitur denominatorem $P = 1 + x^4$; at pro littera $\mathfrak{P}$ statuamus perventum esse ad hanc formam: $\frac{x^3+1}{x^3+xx+1}$; ita ut $N = x^3 + 1$ et $M = x^3 + xx + 1$, sicque erit fractio $\frac{P}{M} = \frac{x^4+1}{x^3+xx+1}$, pro qua instituatur haec operatio:

$$\begin{array}{r|l|l}
x^3+xx+1 & x^4+1 & x \\
 & x^4+x^3+x & \\ \hline
 & -x^3-x+1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l}
-x^3-x+1 & x^3+xx+1 & -1 \\
 & x^3+x-1 & \\ \hline
 & +xx-x+2 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l}
+xx-x+2 & -x^3-x+1 & -x \\
 & -x^3+xx-2x & \\ \hline
 & -xx+x+1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l}
-xx+x+1 & +xx-x+2 & -1 \\
 & +xx-x-1 & \\ \hline
 & +3 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l}
+3 & -xx+x+1 & \frac{-x^2}{3} \\
 & -xx & \\ \hline
 & +x+1 &
\end{array}
\quad \text{etc.}$$

Hic ergo quoti ordine sunt: $x, -1, -x, -1, -\frac{xx}{3}$. Posita jam prima fractione primo quoto x subscribenda, ut vulgo fieri solet, $= \frac{1}{0}$, sequentes fractiones inde more solito formatae ita se habebunt:

$$x, \quad -1, \quad -x, \quad -1, \quad -\tfrac{1}{3}xx$$
$$\frac{1}{0}, \quad \frac{x}{1}, \quad \frac{-x+1}{-1}, \quad \frac{xx}{x+1}, \quad \frac{-xx-x+1}{-x-2}$$

quarum fractionum ultima $\frac{xx+x-1}{x+2}$ ipsi fractioni $\frac{\Pi}{\Theta}$ est aequanda, ex quo fit $\Pi = xx + x - 1$ et $\Theta = x + 2$.

§. 19. Cum igitur posuerimus $M\Pi = C + P\Theta$, erit $C = M\Pi - P\Theta$. At vero pro nostro casu est

$$M\Pi = x^5 + 2x^4 + x - 1 \text{ et}$$
$$P\Theta = x^5 + 2x^4 + x + 2,$$

unde denominator constans erit $C = -3$, consequenter valor numeratoris $\mathfrak{P}$ quaesitus

$$\mathfrak{P} = \frac{N\Pi}{-3} = -\tfrac{1}{3}(x^5 + x^4 - x^3 + xx + x - 1)$$

ubi autem potestates cubo altiores exturbari debent, quod fit ope aequationis $P = 1 + x^4 = 0$, unde colligitur $x^4 = -1$ et $x^5 = -x$, quo facto erit $\mathfrak{P} = +\tfrac{1}{3}(x^3 - xx + 2)$.

Investigatio partium integrarum, si quae in fractione proposita contineantur.

§. 20. Postquam omnes fractiones partiales, scil. $\frac{\mathfrak{P}}{P}$, $\frac{\mathfrak{Q}}{Q}$, $\frac{\mathfrak{R}}{R}$, etc. per methodos expositas fuerint inventae, nil aliud superest, nisi ut partes integrae, quae forte in fractione proposita $\frac{N}{PQR\,etc.}$ sunt contentae, veluti $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}xx +$ etc. investigentur. Ponamus igitur, postquam omnes factores denominatoris fuerint in se invicem multiplicati, maximam potestatem ipsius x ibi contentam esse x^m. Nisi ergo etiam tanta potestas, vel adeo major, in numeratore insit, nullae prorsus partes integrae habebuntur. Quando autem evenit, ut tales potestates in numeratore N insint, eas partes integras, quae tum necesse in fractione proposita continentur, sequenti modo facillime indagare licebit.

§. 21. Ponamus primo maximam potestatem in numeratore N contentam esse ipsam x^m, atque evidens est, partem integram inveniri, si tantum *supremi* termini tam numeratoris quam denominatoris dividantur, hocque modo obtinebitur pars integra $\mathfrak{A}$. Sin autem summa potestas in numeratore occurrens fuerit x^{m+1}, tum pars integra reperietur, si divisio tantum inter *binos* supremos terminos instituatur, quo pacto orietur pars integra formae $\mathfrak{B}x + \mathfrak{A}$. Simili modo si summa potestas in numeratore occurrens fuerit x^{m+2}, divisionem institui sufficiet inter *ternos* terminos supremos; unde quotus formae $\mathfrak{C}xx + \mathfrak{B}x + \mathfrak{A}$ resultabit. Hoc igitur modo operationes divisionis haud mediocriter sublevabuntur — Conveniet autem omnia, quae hactenus sunt praecepta, aliquot exemplis illustrare.

Exemplum I.

§. 22. *Proposita sit ista fractio:* $\frac{x^4+1}{xx(x+1)}$ *in suas partiales resolvenda.*

Sumatur hic primo $P = xx$ et $Q = x + 1$ et $N = x^4 + 1$, ita ut pro prima fractione partiali habeamus $\frac{\mathfrak{P}}{xx}$, ubi $\mathfrak{P} = \frac{N}{M} = \frac{x^4 + 1}{1 + x}$, posito scilicet $P = xx = 0$, unde superiores potestates omnes evanescunt. Hic autem cavendum est, ne etiam inferiores ipsius x potestates pro nihilo habeantur, etiamsi pariter evanescant, idque ob cautelam supra memoratam. Erit igitur hoc casu 1°) $\mathfrak{P} = \frac{1}{1 + x}$; tum vero, primam methodum adhibendo, h. e. per x supra et infra multiplicando, et loco xx cyphram scribendo, erit 2°) $\mathfrak{P} = \frac{x}{x}$, quae duae fractiones combinatae, uti supra est stabilitum, praebent fractionem, cujus denominator est constans, scil. $\mathfrak{P} = \frac{1 - x}{1}$, qui idem valor etiam prodit dum altera methodus adhibetur.

Fractio igitur partialis prior, ex denominatoris factore xx orta, erit $\frac{1 - x}{xx}$.

Quod si jam fractio ex altero factore $Q = 1 + x$ nata statuatur $= \frac{\mathfrak{Q}}{Q}$, erit per Q multiplicando $\mathfrak{Q} = \frac{1 + x^4}{xx}$, posito scilicet $1 + x = 0$, unde fit $x = -1$, $xx = +1$ et $x^4 = +1$, unte statim in integris oritur $\mathfrak{Q} = 2$, ita ut altera fractio partialis fit $\frac{2}{1 + x}$, ideoque ambae hae fractiones junctae $\frac{1 - x}{xx} + \frac{2}{1 + x}$.

Restat igitur ut partes integrae, in fractione proposita contentae, eliciantur, quod fit, dum numerator $1 + x^4$ dividitur per totum denominatorem, ex duabus tantum partibus constantem x^3+xx, unde oritur quotus $x-1$, ad fractiones partiales, instar partium integrarum, adjiciendus, quo facto fractio proposita $\frac{x^4+1}{x^2(x+1)}$ in sequentes partes resolvitur: $\frac{1-x}{xx}+\frac{2}{1+x}+x-1$, quae tres partes in unam summam collectae revera dant $\frac{x^4+1}{xx(x+1)}$.

Exemplum II.

§. 23. *Sit proposita haec fractio:* $\frac{x^6}{(1+xx)(1-x)^2}$ *in suas fractiones partiales resolvenda.*

Hic ergo est $N=x^6$, $P=1+xx$, $Q=(1-x)^2$. Si igitur fractiones partiales statuantur $\frac{\mathfrak{P}}{1+xx}$ et $\frac{\mathfrak{Q}}{(1-x)^2}$, erit primo $\mathfrak{P}\,\frac{x^6}{(1-x)^2}$, posito scilicet $1+xx=0$, unde fit $xx=-1$, $x^3=-x$, $x^4=+1$, $x^5=+x$ et $x^6=-1$, ex quo colligitur $\mathfrak{P}=\frac{-1}{(1-x)^2}$. Hic autem denominatorem evolvi oportet, quo scribi possit -1 loco xx, ita ut prodeat 1°) $\mathfrak{P}=\frac{1}{2x}$; tum vero, multiplicando supra et infra per x, erit 2°) $\mathfrak{P}=\frac{x}{2xx}=-\frac{x}{2}$, sicque prima fractio partialis erit $\frac{-x}{2(1+xx)}$.

Pro altera fractione habebimus $\mathfrak{Q}=\frac{x^6}{1+xx}$, posito $(1-x)^2=0$, unde autem neutiquam concludi debet $x=1$, sed evolutione facta, perinde ac si nulla binomii potestas esset, statui debet $xx=2x-1$, unde $x^3=3x-2$, $x^4=4x-3$, $x^5=5x-4$, et $x^6=6x-5$. Hinc erit I $\mathfrak{Q}=\frac{6x-5}{2x}$, ex qua fractione more solito formatur II $\mathfrak{Q}=\frac{7x-6}{4x-2}$, quibus debite combinatis ex denominatore elidetur x, ut fiat $\mathfrak{Q} = \frac{5x-4}{2}$, unde altera fractio partialis erit $\frac{5x-4}{2(1-x)^2}$.

Partes integrae denique orientur, si numerator x^6 dividatur per denominatorem, et quidem, uti jam supra innuimus, tantum per ternos terminos supremos $x^4 - 2x^3 + 2xx$, unde quotus oritur $xx + 2x + 2$. Hoc igitur modo tota resolutio ita se habebit:

$$\frac{x^6}{(1+xx)(1-x)^2} = \frac{-x}{2(1+xx)} + \frac{5x-4}{2(1-x)^2} + xx + 2x + 2$$

Exemplum III.

§ 24. *Proposita sit haec fractio:* $\frac{1+xx}{x^5(1-xx)^2}$ *in suas partiales resolvenda.*

Quoniam hic nullae partes integrae occurrunt, sint fractiones partiales $\frac{\mathfrak{P}}{x^5}$ et $\frac{\mathfrak{Q}}{(1-xx)^2}$: ac pro priore erit $\mathfrak{P} = \frac{1+xx}{(1-xx)^2}$, posito scilicet $x^5 = 0$, unde etiam omnes potestates altiores evanescent. Cum igitur facta evolutione sit I. $\mathfrak{P} = \frac{1+xx}{1-2xx+x^4}$, fractiones reliqui erunt: II. $\frac{x+x^3}{x-2x^3}$, III. $\frac{xx+x^4}{xx-2x^4}$, IV. $\frac{x^3}{x^3}$, V. $\frac{x^4}{x^4}$.

Jam eliminando ex fractione principali I. potestatem x^4 ope ultimae V, ex denominatore orietur 1°) $\mathfrak{P} = \frac{1+xx-x^4}{1-2xx}$; at facto eodem cum III. et V. erit 2°) $\mathfrak{P} = \frac{xx+3x^4}{xx}$. Nunc autem 1^{am} et 2^{am} combinando, ut etiam xx exturbetur, pervenietur denique ad $\mathfrak{P} = \frac{1+3xx+5x^4}{1}$, qui est valor quaesitus pro numeratore $\mathfrak{P}$, quo igitur invento prior fractio partialis erit $\frac{1 + 3xx + 5x^4}{x^5}$.

Pro altera fractione habebimus $\mathfrak{Q} = \frac{1 + xx}{x^5}$, posito $(1 - xx)^2 = 0$, sive $1 - 2xx + x^4 = 0$, unde fit $x^4 = 2xx - 1$ et $x^5 = 2x^3 - x$, quo substituto fiet $\mathfrak{Q} = \frac{1 + xx}{2x^3 - x}$. Hinc porro nascentur sequentes valores:

$$\text{I. } \mathfrak{Q} = \frac{x + x^3}{2x^4 - xx} = \frac{x + x^3}{3xx - 2}$$

$$\text{II. } \mathfrak{Q} = \frac{xx + x^4}{3x^3 - 2x} = \frac{3xx - 1}{3x^3 - 2x}$$

$$\text{III. } \mathfrak{Q} = \frac{3x^3 - x}{3x^4 - 2xx} = \frac{3x^3 - x}{4xx - 3}$$

Cum harum derivatarum prima et tertia tantum potestatem secundam xx in denominatore involvat, inde statim obtinetur fractio denominatore constante praedita; erit enim I. $\frac{4}{4}$ — III. $\frac{3}{3} = -\frac{5x^3 + 7x}{1}$, unde altera fractio partialis concluditur $= \frac{7x - 5x^3}{(1 - xx)^2}$. Erit igitur

$$\frac{1 + xx}{x^5 (1 - xx)^2} = \frac{1 + 3xx + 5x^4}{x^5} + \frac{7x - 5x^3}{(1 - xx)^2}$$

cujus veritas calculum evolventi mox patebit.

Exemplum IV.

§. 25. *In fractiones partiales resolvenda sit haec fractio:* $\frac{1}{(1 + xx)(1 + x^3)(1 + x^4)}$.

Statuantur fractiones partiales quaesitae $\frac{\mathfrak{P}}{1 + xx}$, $\frac{\mathfrak{Q}}{1 + x^3}$, $\frac{\mathfrak{R}}{1 + x^4}$; ac primo quidem erit $\mathfrak{P} = \frac{1}{(1 + x^3)(1 + x^4)}$ posito $1 = xx = 0$, unde fit $xx = -1$, $x^3 = -x$, $x^4 = +1$, quibus substitutis erit 1°) $\mathfrak{P} = \frac{1}{2(1 - x)}$ tum vero hinc 2°) $\mathfrak{P} = \frac{x}{2(x + 1)}$, unde statim colligitur

*

fractio ab x, quoad denominatorem, immunis, scil. $\mathfrak{P} = \frac{1+x}{4}$, ita ut prima fractio partialis sit $\frac{1+x}{4(1+xx)}$.

Pro secunda fractione habebimus $\mathfrak{Q} = \frac{1}{(1+xx)(1+x4)}$, existente $1 + x^3 = 0$, unde fit $x^3 = -1$, $x^4 = -x$, ita ut I. $\mathfrak{Q} = \frac{1}{(1-x)(1+xx)} = \frac{1}{2-x+xx}$. Derivantur hinc porro II. $\mathfrak{Q} = \frac{x}{2x-xx-1}$ et III. $\mathfrak{Q} = \frac{xx}{2xx+1-x}$; unde eliminando primo xx ex I. et II. erit 1) $\mathfrak{Q} = \frac{1+x}{x+1}$ et ex I. et III. 2) $\mathfrak{Q} = \frac{2-xx}{3-x}$, ex quibus denuo x eliditur, cum fiat $1^a + 2^a = \frac{3+x-xx}{4}$, ita ut secunda fractio sit $\frac{3+x-xx}{4(1+x3)}$.

Tertia denique fractio est $\mathfrak{R} = \frac{1}{(1+xx)(1+x3)}$, existente $1 + x^4 = 3$, sive $x^4 = -1$ et $x^5 = -x$, quibus substitutis fit I. $\mathfrak{R} = \frac{1}{1-x+xx+x3}$, ex qua porro derivantur

$$\text{II. } \mathfrak{R} = \frac{x}{x+x3-1-xx}$$
$$\text{III. } \mathfrak{R} = \frac{xx}{xx-1-x-x3}$$
$$\text{IV. } \mathfrak{R} = \frac{x3}{x3-x-xx+1}$$

Elidatur x^3, et deriventur hunc in finem sequentes:

1°) ex I. et II. $\mathfrak{R} = \frac{1-x}{2-2x+2xx}$

2°) ex I. et III. $\mathfrak{R} = \frac{1+xx}{2xx-2x}$

3°) ex I. et IV. $\mathfrak{R} = \frac{1-x3}{2xx}$

ex quarum prima et secunda statim tam primam quam secundam potestatem ipsius x eliminare licet: fit enim hinc $\mathfrak{R} = \frac{-x-xx}{2}$, unde tertia fractio partialis erit $\frac{-x-xx}{2(1+x4)}$ ita ut jam sit

$$\frac{1}{(1+xx)(1+x3)(1+x4)} = \frac{1+x}{4(1+xx)} + \frac{3+x-xx}{4(1+x3)} - \frac{x+xx}{2(1+x4)}$$

Quoniam haec postrema investigatio haud exiguas ambages postulavit, eam quoque per alteram methodum tentemus, quam supra §. 16 et seqq. exposuimus. Cum igitur primo invenerimus valorem numeratoris $\mathfrak{N} = \frac{1}{1 - x + xx + x^3}$, ponamus multiplicatorem idoneum esse Π, ita ut sit $\mathfrak{N} = \frac{\Pi}{\Pi(1 - x + xx + x^3)}$. At vero Π ita comparatum esse oportet, ut fiat $\Pi(1 - x + xx + x^3) = C + \Theta(1 + x^4)$, ubi ergo fractionem quaeri oportet $\frac{\Pi}{\Theta}$, quae proxime aequalis sit fractioni $\frac{1 + x^4}{1 - x + xx + x^3}$. Inter terminos igitur hujus fractionis instituatur sequens operatio, cujus ratio jam supra est exposita:

$$
\begin{array}{lllll}
x^3 + x^2 - x + 1 \,|\, x^4 + 1 \,|\, x & & & & \\
\quad x^4 + x^3 - xx + x & & & & \\
\quad -x^3 + xx - x + 1 \,|\, x^3 + xx - x + 1 \,|\, -1 & & & & \\
\qquad\qquad x^3 - xx + x - 1 & & & & \\
\qquad\qquad 2xx - 2x + 2 \,|\, -x^3 + xx - x + 1 \,|\, -\frac{x}{2} & & & & \\
\qquad\qquad\qquad -x^3 + xx - x & & & & \\
\qquad\qquad\qquad + 1 \,|\, 2xx - 2x + 2 \,|\, 2xx & & & & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 2xx & & & & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -2x + 2 \,|\, \text{etc.} & & & &
\end{array}
$$

Nunc ex quotis more solito formentur fractiones:

$$x, \quad -1, \quad -\tfrac{1}{2}x, \quad 2xx$$

$$\frac{1}{0}, \quad \frac{x}{1}, \quad \frac{-x + 1}{-1}, \quad \frac{\frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x + 1}$$

quarum ultimae aequatur fractio $\frac{\Pi}{\Theta}$; sicque erit $\Pi = xx + x$ et $\Theta = x + 2$; hincque jam erit

$$\Pi(x^3 + xx - x + 1) = x^5 + 2x^4 + x \text{ et}$$

$$\Theta(1 + x^4) = x^5 + 2x^4 + x + 2$$

unde manifesto fit $C = \Pi(x^3 + xx - x + 1) - \Theta(1 + x^4) = -2$, quocirca erit $\mathfrak{R} = \frac{\Pi}{C} = \frac{xx + x}{-2}$, qui valor cum ante invento egregie convenit.

Exemplum V.

§. 26. *Proposita fractione $\frac{x^m}{1 + x^n}$, cujus denominatoris factorem constat esse $1 - 2x \cos. \theta + xx$, invenire fractionem partialem ex hoc factore oriundam, quae sit $\frac{\mathfrak{P}}{1 - 2x \cos. \theta + xx}$.*

Cum igitur sit $\frac{x^m}{1 + x^n} = \frac{\mathfrak{P}}{1 - 2x \cos. \theta + xx} +$ etc. erit $\mathfrak{P} = \frac{x^m (1 - 2x \cos. \theta + xx)}{1 + x^n}$, posito scilicet $1 - 2x \cos. \theta + xx = 0$. Quia vero hoc casu tam numerator quam denominator evanesceret, in fractione $\frac{1 - 2x \cos. \theta + xx}{1 + x^n}$ loco numeratoris et denominatoris eorum differentialia substituantur, unde oritur fractio $\frac{2x - 2 \cos. \theta}{nx^{n-1}}$, sive $\frac{2xx - 2x \cos. \theta}{nx^n}$, sicque erit

$$\mathfrak{P} = \frac{x^m (2xx - 2x \cos. \theta)}{nx^n}.$$

Quia vero nostro casu fit $1 + x^n = 0$, ideoque $x^n = -1$, erit $\mathfrak{P} = -\frac{1}{n} x^m (2xx - 2x \cos. \theta)$, ubi jam id sumus adepti, ut denominator non amplius x complectatur.

Nihil aliud igitur superest, nisi ut ex numeratore potestates altiores ipsius x exterminentur; factore autem $1 - 2x \cos. \theta + xx$ nihilo aequato fit $xx = 2x \cos. \theta - 1$, ex quo porro colligitur $\mathfrak{P} = \frac{x^m (2x \cos. \theta - 2)}{-n}$. Jam quaerantur valores altiorum potestatum per simplex x expressi, qui reperiuntur $x^3 = 4x \cos. \theta^2 - x - 2 \cos. \theta$,

$$x^4 = 8x \cos.\theta^3 - 4x \cos.\theta - 4 \cos.\theta + 1,$$

qui valores in progressione recurrente procedunt, cujus scala relationis est $2 \cos.\theta, -1$.

Quoniam autem hi termini continuo fiunt magis complicati, totum negotium egregie sublevari observo, si quaerantur valores formularum $x^3 \sin.\theta$, $x^4 \sin.\theta$, $x^5 \sin.\theta$, $x^6 \sin.\theta$ et ita porro, quippe qui secundum eandem legem progrediuntur. Cum enim sit, uti ex calculi sinuum elementis constat, $2 \cos.\theta \sin.\lambda\theta - \sin.(\lambda - 1)\theta = \sin.(\lambda + 1)\theta$, progressio recurrens sequenti modo se habebit:

$$\begin{aligned}
x \sin.\theta &= x \sin.\theta \\
x^2 \sin.\theta &= x \sin. 2\theta - \sin.\theta \\
x^3 \sin.\theta &= x \sin. 3\theta - \sin. 2\theta \\
x^4 \sin.\theta &= x \sin. 4\theta - \sin. 3\theta \\
x^5 \sin.\theta &= x \sin. 5\theta - \sin. 4\theta
\end{aligned}$$

— — — — — —

— — — — — —

— — — — — —

$$x^m \sin.\theta = x \sin. m\theta - \sin.(m - 1)\theta$$

Hoc igitur valore substituto erit numerator quaesitus

$$\mathfrak{P} = -\frac{2}{n \sin.\theta}\left(x \sin. m\theta - \sin.(m-1)\theta\right)\left(x \cos.\theta - 1\right)$$

sive evolvendo et loco xx suum valorem substituendo, erit

$$\mathfrak{P} = -\frac{2}{n \sin.\theta}\left(\begin{matrix} 2x \sin. m\theta \cos.\theta^2 \\ -x \sin.(m-1)\theta \cos.\theta \\ -x \sin. m\theta \end{matrix} \begin{matrix} + \sin.(m-1)\theta \\ - \sin. m\theta \cos.\theta \end{matrix}\right)$$

pro qua forma scribamus brevitatis gratia

$\mathfrak{P} = \frac{-2}{n \sin. \theta}(\mathrm{F}x + \mathrm{G})$, ita ut sit

$\mathrm{F} = 2 \sin. m\theta \cos. \theta^2 - \sin. (m-1)\theta \cos. \theta - \sin. m\theta$

$\mathrm{G} = \sin. (m-1)\theta - \sin. m\theta \cos. \theta$

Jam pro valore F, cum sit

$\sin. (m-1)\theta = \sin. m\theta \cos. \theta - \cos. m\theta \sin. \theta$,

erit $\mathrm{F} = \sin. m\theta \cos. \theta^2 + \cos. m\theta \sin. \theta \cos. \theta - \sin. m\theta$, sive

$\mathrm{F} = - \sin. m\theta \sin. \theta^2 + \cos. m\theta \sin. \theta \cos. \theta$, hincque

$\frac{\mathrm{F}}{\sin. \theta} = \cos. m\theta \cos. \theta - \sin. m\theta \sin. \theta = \cos. (m+1)\theta$.

Simili modo erit $\mathrm{G} = \sin. m\theta \cos. \theta - \cos. m\theta \sin. \theta - \sin. m\theta \cos. \theta$ $= - \cos. m\theta \sin. \theta$, ideoque $\frac{\mathrm{G}}{\sin. \theta} = - \cos. m\theta$. His rite substitutis erit $\mathfrak{P} = \frac{2}{n}(\cos. m\theta - x \cos. (m+1)\theta)$, ideoque fractio partialis quaesita $= + \frac{2(\cos. m\theta - x \cos. (m+1)\theta)}{n(1 - 2x \cos. \theta + xx)}$. Hinc simul facile inveniri potest, cujusmodi anguli pro θ assumi debeant, ut haec formula $1 - 2x \cos. \theta + xx$ revera evadat factor denominatoris $1 + x^n$; ex formulis enim ante exhibitis erit $x^n = \frac{x \sin. n\theta - \sin. (n-1)\theta}{\sin. \theta}$. Quia igitur casu $xx - 2x \cos. \theta + 1 = 0$ etiam $1 + x^n$ evanescere debet, satisfacienda aequatio erit $x \sin. n\theta - \sin. (n-1)\theta + \sin. \theta = 0$, id quod fieri nequit, nisi fuerit $\sin. n\theta = 0$, ideoque $\cos. n\theta = \pm 1$. Cum igitur sit $\sin. (n-1)\theta = \sin. n\theta \cos. \theta - \cos. n\theta \sin. \theta$, ob $\sin. n\theta = 0$ erit $\sin. (n-1)\theta = \mp \sin. \theta$, sicque aequatio adimplenda fiet $\sin. \theta \pm \sin. \theta = 0$; unde patet signum inferius valere debere, ita ut $\cos. n\theta = -1$.

Hanc ob rem si π denotet angulum duobus rectis aequalem, statui debet $n\theta = i\pi$, existente i numero impari; sicque simul omnes plane valores idonei pro angulo θ obtinebuntur, qui erunt $\frac{\pi}{n}$, $\frac{3\pi}{n}$, $\frac{5\pi}{n}$, $\frac{7\pi}{n}$, $\frac{9\pi}{n}$ .... $\frac{i\pi}{n}$. Unde si pro singulis factoribus denominatoris hinc oriundis quaerantur fractiones partiales, summa earum omnium aequabitur ipsi fractioni propositae, scil. $\frac{x^m}{1+x^n}$, siquidem $m < n$, hoc est si fractio fuerit genuina; alioquin etiam, si fuerit spuria, partes integrae seorsim extrahi debent.